Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corso di ISTITUZIONI DI ANALISI NUMERICA
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 6: RISOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI - PRIMA PARTE

A. Scrivere i codici **PredictorCorrector** e **RungeKutta4** che implementano i seguenti metodi per la discretizzazione di equazioni differenziali ordinarie:

1. Metodo predictor corrector [AB2][AM3] in modalità PECE

2. Metodo di Runge-Kutta a quattro stadi.

B. Laboratorio MATLAB

1. Scrivere uno script che utilizzi i metodi di Adams-Bashforth-Moulton [AB2][AM3] e di Runge Kutta a quattro stadi, per risolvere numericamente i seguenti problemi differenziali ai valori iniziali:

   (a) oscillatore armonico
   $y''(t) = -\gamma y(t)$. Scegliere $\gamma = 1$;
   $[t_0, t_N] = [0, 2\pi]$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$;

   (b) oscillatore armonico smorzato
   $y''(t) = -\delta y'(t) - \gamma y(t)$. Scegliere $\delta = 1$, $\gamma = 2$;
   $[t_0, t_N] = [0, 4\pi]$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$;

   (c) oscillatore armonico forzato
   $y''(t) = -\delta y'(t) + f(t)$. Scegliere $\delta = 1$; $f(t) = \sin(t)$ $[t\sin(t)]$;
   $[t_0, t_N] = [0, 4\pi]$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$;

   (d) pendolo matematico piano
   $y''(t) = -\sin(y(t))$.
   $[t_0, t_N] = [0, 10]$; $y(0) = \pi/2$ e $y'(0) = 1$;

   (e) pendolo matematico piano con attrito
   $y''(t) = -\delta y'(t) - \sin(y(t))$. Scegliere $\delta = 1$,
   $[t_0, t_N] = [0, 4\pi]$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$;

   (f) modello di Lotka-Volterra (predatore-preda)
   $y_1'(t) = y_1(t)(1 - y_2(t))$; $\qquad y_2'(t) = -y_2(t)(1 - y_1(t))$.
   $[t_0, t_N] = [0, 30]$; $y_1(0) = 2$ e $y_2(0) = 2$.

Utilizzare il metodo di Runge Kutta a quattro stadi per calcolare i valori di innesco del metodo multistep. Effettuare 100 iterazioni. Produrre il grafico delle soluzioni approssimate in funzione del tempo. Nel caso dei problemi di secondo ordine trasformati in sistemi di equazioni differenziali del primo ordine, visualizzare la soluzione anche nel piano delle fasi (y, y'), ovvero con traiettoria in ascissa e velocità in ordinata. Quando possibile, calcolare anche la norma infinito dell'errore compiuto nell'approssimare la traiettoria.

2. Considerare il problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & Ay(t) + \varphi(t), \quad t > 0, \\ y(0) & = & y_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 997 & -999 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 999(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix}.$$

Visualizzare le soluzioni approssimate fornite dal metodo [AB2][AM3] nell'intervallo $[0, 10]$ con un passo di discretizzazione h_1 che soddisfa la limitazione data dall'intervallo di stabilità del metodo [AB2][AM3] applicato al problema (1), e con un passo h_2 che non la soddisfa. Fare analogamente con il metodo di Runge Kutta a quattro stadi.

3. Calcolare le soluzioni approssimate del problema (1) fornite dal codice **ode45** e dal codice **ode15s** nell'intervallo $[0, 10]$. Produrre il grafico delle soluzioni approssimate. Facoltativo: calcolare le soluzioni approssimate fornite dal codice **ode15s** con passaggio dello Jacobiano.