Corso di Laurea in Matematica, SAPIENZA Università di Roma

Corsi di ISTITUZIONI DI ANALISI NUMERICA e di FONDAMENTI DI ANALISI NUMERICA
Esercitazioni in Laboratorio

Foglio 2: ALGEBRA LINEARE NUMERICA - SECONDA PARTE

A. Scrivere i codici **richardson**, **gradiente**, **conjgrad**, **GSarnoldi + basicGMRES**, che implementano i seguenti metodi:

1. Metodo di Richardson (stazionario)
2. Metodo del gradiente precondizionato
3. Metodo del gradiente coniugato precondizionato
4. Metodo GMRES (non precondizionato)

Alcuni codici possono essere trascritti dal manuale Matematica Numerica di Quarteroni, Sacco, Saleri, dopo aver apportato le modifiche discusse in classe.

B. Laboratorio MATLAB.

1. Studiare l'help delle functions **numgrid** e **delsq**. Considerare il sistema lineare con matrice dei coefficienti generata con le istruzioni MATLAB

   ```
   m=22;
   A=delsq(numgrid('S',m));
   ```

   e termine noto b scelto in modo che la soluzione esatta del sistema sia il vettore con tutte le $(m-2)^2$ componenti uguali a 1. Accertarsi che A sia (una M-matrice tridiagonale a blocchi) simmetrica definita positiva. Costruire il precondizionatore $L_{\text{inc}} * L_{\text{inc}}^T$ generato dalla fattorizzazione incompleta di Cholesky di A. Calcolare il condizionamento (in norma spettrale) del sistema assegnato e del sistema precondizionato. Per tutti i metodi fissare la tolleranza a 10 cifre significative esatte, e scegliere x_0 uguale al vettore con tutte le componenti uguali a 0.

   Risolvere il sistema assegnato con il metodo di Richardson (stazionario) con parametro ottimale e con il metodo del gradiente steepest descent. Confrontarne le prestazioni in termini di numero di iterazioni e norma dell'energia dell'errore. Calcolare la norma dell'energia dell'errore prodotto dal metodo del gradiente dopo aver eseguito il medesimo numero di iterazioni che sono state necessarie al metodo di Richardson per arrivare a convergenza. Fare analogamente con i relativi metodi precondizionati.

   Produrre il grafico in scala semilogaritmica dei residui (in funzione del numero delle iterazioni) generati dal metodo del gradiente con e senza precondizionatore.

2. Risolvere il sistema lineare al punto 1 con il metodo del gradiente coniugato con e senza precondizionatore, facendo uso del codice **conjgrad**.

   Studiare l'help della function **pcg**. Confrontare con l'output fornito dalla function **pcg** con e senza precondizionatore. (Nel caso precondizionato passare in input L_{inc} e L_{inc}^T.)

   Produrre il grafico in scala semilogaritmica dei rispettivi residui (in funzione del numero delle iterazioni) e confrontare con il grafico ottenuto al punto precedente.

3. Risolvere il sistema lineare al punto 1 con il metodo GMRES, facendo uso dei codici **GSarnoldi** e **basicGMRES**.

   Studiare l'help della function **gmres**. Confrontare con il tempo di esecuzione e l'output fornito dalla function **gmres**.

   Confrontare le prestazioni in termini di residuo finale e norma dell'energia dell'errore con quelle del metodo del gradiente coniugato non precondizionato.

   Risolvere il sistema lineare al punto 1, dopo averlo precondizionato con il precondizionatore generato dalla fattorizzazione incompleta di Cholesky di A e risolvere con il metodo GMRES facendo uso dei codici **GSarnoldi** e **basicGMRES**. Confrontare con l'output fornito dalla function **gmres** a cui siano stati passati in input A, b, L_{inc} e L_{inc}^T.

   Confrontare le prestazioni in termini di numero di iterazioni e norma dell'energia dell'errore con quelle del metodo del gradiente coniugato precondizionato. (Perché non ha senso confrontare il vettore dei residui?)

4. Studiare l'help delle functions **sprand** e **speye**. Considerare il sistema lineare con matrice dei coefficienti generata con le istruzioni MATLAB

```
n=400;
rng('default')
A=sprand(delsq(numgrid('S',22)))+speye(n);
```

   e termine noto b scelto in modo che la soluzione esatta del sistema sia il vettore con tutte le componenti uguali a 1. Definire tolleranza e vettore iniziale come sopra.

   Risolvere il sistema lineare con il metodo GMRES, facendo uso dei codici **GSarnoldi** e **basicGMRES**. Confrontare con il tempo di esecuzione e l'output fornito dalla function **gmres**.

   Risolvere il sistema precondizionato con il precondizionatore $L_{\text{inc}} * U_{\text{inc}}$ generato dalla fattorizzazione LU incompleta di A e risolvere con il metodo GMRES facendo uso dei codici **GSarnoldi** e **basicGMRES**. Confrontare con il tempo di esecuzione e l'output fornito dalla function **gmres** a cui stati passati in input A, b, L_{inc} e U_{inc}.

   Fare analogamente con il precondizionatore di Jacobi.