

**Corsi di ISTITUZIONI DI ANALISI NUMERICA e di FONDAMENTI DI  
ANALISI NUMERICA  
Esercitazioni in Laboratorio 2014/2015**

Foglio 1: ALGEBRA LINEARE NUMERICA - PRIMA PARTE

**A.** Scrivere i codici **lukij**, **luband**, **forwband**, **backband**, **basicILU**, **basicCHOL**, **basicICHOL**, **basicQR**, che implementano i seguenti metodi:

1. Fattorizzazione LU (senza pivoting)
2. Fattorizzazione LU per matrice a banda (senza pivoting)
3. Metodo delle sostituzioni in avanti per matrici L con banda p
4. Metodo delle sostituzioni all'indietro per matrici U con banda q
5. Fattorizzazione LU incompleta (senza pivoting)
6. Fattorizzazione di Cholesky per matrici hermitiane definite positive
7. Fattorizzazione di Cholesky incompleta per matrici hermitiane definite positive
8. Fattorizzazione QR per matrici rettangolari reali

Alcuni codici possono essere trascritti dal manuale Matematica Numerica di Quarteroni, Sacco, Saleri, dopo aver apportato le modifiche discusse in classe.

**B.** Laboratorio MATLAB.

1. Costruire la matrice simmetrica definita positiva  $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$  tale che:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & |i - j| = 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare la fattorizzazione LU di  $A$ , tenendo presente la struttura bandata. Confrontare con la fattorizzazione LU di  $A$  che non si avvale della struttura bandata, e con quella fornita dalla apposita funzione del MATLAB. Trovare la soluzione del sistema lineare  $Ax = b$ , dove

$$b_i = \begin{cases} 0 & i = 2 \\ 2 & i = 10 \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

facendo uso dei metodi delle sostituzioni in avanti e all'indietro per matrici a banda. Confrontare con la soluzione ottenuta utilizzando la backslash del MATLAB. Effettuare le fattorizzazioni incomplete LU e di Cholesky, confrontarle con quelle fornite dalle apposite funzioni del MATLAB. Controllare che fattorizzazioni incomplete coincidano con le fattorizzazioni standard relativamente agli elementi nella *pattern* di  $A$  (Suggerimento: fare uso della funzione **spones**).

2. Eseguire la fattorizzazione QR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Confrontare con quella fornita dalla apposita funzione del MATLAB. Trovare la soluzione del problema ai minimi quadrati

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2^2$$

dove

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

facendo uso del metodo di Cholesky applicato alle equazioni normali. Confrontare con la soluzione (completa) ottenuta facendo uso della fattorizzazione QR. Confrontare con la soluzione fornita dalla funzione backslash del MATLAB.

3. Eseguire ora la fattorizzazione QR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Controllare se il prodotto  $Q * R$  è approssimativamente uguale ad  $A$ . Perché il codice **basicQR** fallisce in questo caso? Come occorrerà modificarlo per ottenere una fattorizzazione corretta?

4. Studiare la documentazione delle funzioni **svd**, **rank**, **det**, **cond**.
5. Produrre un esempio di una matrice che, facendo uso delle funzioni al punto precedente, risulti invertibile (anche se estremamente malcondizionata) ma non di rango massimo...