Corso di ANALISI NUMERICA - A.A. 2014/15
Prova scritta del 25 settembre 2015

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1+i & 0 \\ 0 & 1-i & 3 & -i \\ 0 & 0 & i & 5 \end{pmatrix}.$$

   Aiutandosi dove serve col primo teorema di Gershgorin:

   (a) dimostrare che la matrice è hermitiana e definita positiva;

   (b) calcolare le norme $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$ e dimostrare che $\|A\|_2 \leq 6$;

   (c) dire per quali valori del parametro ω convergerebbe il metodo iterativo di rilassamento (SOR) se applicato ad un sistema lineare con matrice A.

2. Si vogliono calcolare i due zeri della funzione $f(x) = x^2 + x - 2$ mediante un metodo di punto fisso del tipo $x_{k+1} = \phi(x_k)$; le funzioni di iterazione candidate sono le seguenti:

$$\phi_1(x) = 2 - x^2, \quad \phi_2(x) = \sqrt{2-x}, \quad \phi_3(x) = \frac{2}{x} - 1;$$

   (a) verificare se gli zeri di f sono punti fissi delle ϕ_i;

   (b) per ciascuno dei due zeri quali di queste funzioni fornirebbe un metodo di punto fisso convergente per un valore iniziale scelto opportunamente?

3. Si consideri l'integrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\ dx\ ;$$

   (a) calcolare il valore esatto di I;

   (b) calcolare i valori approssimati di I con le formule interpolatorie semplici del punto medio, del trapezio e di Simpson rispettivamente;

   (c) nel caso del trapezio confrontare l'errore commesso (in valore assoluto) con la stima a priori dell'errore fornita dalla teoria.

4. Si consideri il problema di Cauchy per $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$y'(t) = \lambda y(t),\ t > 0, \qquad y(0) = 1\ ; \quad (*)$$

   (a) scrivere la soluzione esatta del problema (*);

   (b) ricavare la regione di assoluta stabilità dei metodi di Eulero esplicito e implicito nel piano complesso;

   (c) in particolare precisare l'intervallo in cui andrà scelto il passo h per il metodo di Eulero esplicito se $\lambda = -2 + i$.