Corso di ANALISI NUMERICA - A.A. 2014/15
Prova scritta dell'8 settembre 2015

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Aiutandosi coi teoremi dei cerchi di Gershgorin:

   (a) dimostrare che la matrice non è singolare e ha quattro autovalori distinti, almeno uno dei quali non reale;

   (b) dimostrare che $\rho(A) \leq 5.5$, dove $\rho(A)$ indica il raggio spettrale di A.

   (c) dire se il metodo iterativo di Jacobi converge se applicato alla risoluzione di un sistema lineare con matrice A; in particolare calcolare in questo caso il valore della norma $\|B_J\|_\infty$, dove B_J indica la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

2. Si consideri una funzione f di cui si conoscono solo i valori nei punti del vettore $x = [0, 1, 2, 3]$, dati da $y = f(x) = [0, 1, 3, 0]$;

   (a) si generi a mano la tabella delle differenze divise relativa a tali valori;

   (b) usando la tabella precedente ricavare in modo ricorsivo i valori delle interpolate di Lagrange di f di ordine uno, due e tre $(\Pi_1 f, \Pi_2 f, \Pi_3 f)$ nel punto $x = 1/2$ (usando per la prima solo i primi due nodi, per la seconda i primi tre, per la terza tutti e quattro).

3. Si consideri la funzione $f(x) = 2 - e^{-x}$; dimostrare che ammette un unico zero in $\mathbb{R}$ e calcolarne l'espressione; dimostrare poi che il metodo di Newton partendo da $x_0 = -1$ genera una successione monotona crescente che converge ad esso.

4. Scrivere la formula del metodo di Heun per la risoluzione del problema di Cauchy:

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [t_0, t_0 + T], \qquad y(t_0) = y_0\ ; \quad (*)$$

   (a) discutere come si ricava e il suo ordine di consistenza;

   (b) richiamando il teorema di zero-stabilità, dimostrare che il metodo è zero-stabile se f risulta uniformemente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile;

   (c) scrivere una function Matlab in grado di implementare il metodo di Heun in funzione di t_0, T, y_0, della f e del numero di passi temporali N.