Corso di ANALISI NUMERICA - A.A. 2014/15
Prova scritta del 16 Luglio 2015

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Utilizzando i teoremi dei cerchi di Gershgorin si dimostri che:

   (a) ogni matrice a dominanza diagonale stretta (per righe o per colonne) è non singolare;

   (b) A possiede un solo autovalore con parte reale negativa;

   (c) il raggio spettrale di A vale 5 .

   Dire quindi se converge il metodo di Jacobi per un sistema lineare di matrice A; scrivere esplicitamente la matrice B_J di iterazione in questo caso e fornire una stima per eccesso del suo raggio spettrale.

2. (a) Per disegnare il grafico di una funzione $f(x)$ nell'intervallo $I = [a, b]$ a partire dai suoi valori $f(x_i)$ su di una partizione uniforme di $(m + 1)$ punti x_i in I (di passo $h = (b - a)/m$) si ricorre alla funzione continua lineare a tratti corrispondente alla sua interpolata composita di Lagrange $\Pi_h^1 f(x)$. Scrivere l'espressione esplicita di questa funzione per un generico $x \in (x_i, x_{i+1})$;

   (b) siano ora $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ e $I = [0, 2]$; fornire una stima dell'errore massimo $|f(x) - \Pi_h^1 f(x)|$ in funzione del passo h della partizione;

   (c) scrivere una formula di quadratura composita in grado di fornire l'integrale approssimato della f del punto (b) in I a partire dalla stessa partizione, e stimare anche in questo caso l'errore risultante in funzione di h.

3. Si vuole determinare il punto di intersezione non banale dell'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$ con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (l'altro è chiaramente il punto $A = (1, 1)$). Scrivere il problema come ricerca delle radici di una funzione vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e descrivere come si estende il metodo di Newton in questi casi. Scrivere esplicitamente la matrice Jacobiana nell'esempio studiato e suggerire un possibile vettore iniziale per l'algoritmo.

4. Scrivere la formula del metodo di Eulero implicito per la risoluzione del problema di Cauchy:

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [t_0, t_0 + T], \qquad y(t_0) = y_0\ , \quad (*)$$

   (a) discutere il suo ordine di consistenza;

   (b) discutere la sua implementazione pratica;

   (c) dimostrare che il metodo è assolutamente incondizionatamente stabile.