Corso di ANALISI NUMERICA - A.A. 2014/15
Prova scritta del 22 Giugno 2015

1. Si consideri la matrice a valori complessi

$$A = \begin{pmatrix} 4i & 0.5 & 0 & -i \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ i & 0 & 1 & -3i \end{pmatrix},$$

calcolandone le norme 1, ∞ e di Frobenius. Quindi, utilizzando i teoremi dei cerchi di Gershgorin

   (a) mostrare che la matrice è non singolare;

   (b) dimostrare che non possiede autovalori reali negativi né autovalori multipli;

   (c) indicare un possibile valore dello shift μ per calcolare col metodo delle potenze inverse l'autovalore con la parte immaginaria più grande.

2. Di una funzione $f(x)$ si conoscono i seguenti valori

$$f(0) = 0, \quad f(1/3) = 1/2, \quad f(2/3) = 1, \quad f(1) = 1/2;$$

   (a) costruire a partire da essi il polinomio interpolatore di Lagrange di grado 3 di f e calcolarne il valore nel punto $x_0 = 1/2$;

   (b) ricavare un valore approssimato dell'integrale di f sull'intervallo $(0, 1)$ utilizzando l'opportuna formula di Newton-Cotes relativa agli stessi nodi.

3. Si consideri un metodo iterativo della forma:

$$(*) \quad x_{k+1} = \phi(x_k), \quad x_0 \in I \ .$$

Dimostrare che se α è un punto fisso per la funzione $\phi(x) : I \to I$ di classe C^1, allora per ogni punto iniziale x_0 sufficientemente vicino ad α:

   (a) se $0 < \phi'(\alpha) < 1$ allora $x_k \to \alpha$ in modo monotono;

   (b) se $-1 < \phi'(\alpha) < 0$ allora $x_k \to \alpha$ in modo oscillante.

Presa la funzione $\phi(x) = 2^{-x}$, mostrare che essa ammette un unico punto fisso in $(0, \infty)$, e partendo da $x_0 = 1$ in (*) dedurre una stima per difetto e una per eccesso di esso.

4. Ricavare il metodo numerico a un passo di Crank-Nicolson per la risoluzione di un problema di Cauchy, calcolandone l'ordine di consistenza. Descriverne poi la sua implementazione pratica, inserendo un possibile listato Matlab al riguardo.