Corso di ANALISI NUMERICA - A.A. 2014/15
Seconda prova in itinere - 4 Giugno 2015

1. (a) Dimostrare che la funzione $\phi(x) = \sin(x/2 + 1)$ ammette un unico punto fisso α nell'intervallo $I = [-\pi/2, \pi/2]$ e che la successione definita da

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

convergerà ad α per ogni scelta del dato iniziale $x_0 \in I$.

(b) Si mostri come il metodo di Newton per la ricerca di una radice semplice α di una funzione $f(x)$ possa essere riscritto come metodo delle iterazioni di punto fisso, ricavandone la convergenza dell'algoritmo con ordine 2 (scrivere chiaramente gli enunciati dei risultati utilizzati).

2. (a) Si consideri la funzione $f(x) = \log_2(x)$ e si costruisca a mano la tabella delle differenze divise di Newton corrispondente ai nodi $x = [1/8, 1/4, 1/2, 1]$. A partire da questa ricavare l'espressione del polinomio interpolatore di Lagrange $\Pi_3(x)$ di f relativo ai quattro nodi assegnati, e valutarlo nel punto $x_0 = 3/4$.

(b) Scrivere poi l'espressione dell'errore di interpolazione $E_3(x)$ in un generico punto $x \in (1/8, 1)$.

3. (a) Dire quale formula di quadratura possa essere usata per calcolare esattamente l'integrale

$$\int_0^1 (x - 0.5)(x^2 + x + 1)\ dx$$

e poi determinarne il valore. Giustificare la risposta scrivendo l'espressione dell'errore per la formula usata e il suo grado di esattezza.

(b) Scrivere il listato Matlab della funzione che approssima l'integrale definito di una funzione $f(x)$ sull'intervallo (a, b) mediante la versione composita della formula usata al punto precedente su una griglia uniforme di m intervalli.

4. (a) Si dimostri che il metodo di Eulero esplicito per la risoluzione del problema di Cauchy

$$y'(t) = \lambda y(t),\ t \in [0, T], \qquad y(0) = 1\ , \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (*)$$

è convergente per ogni $T > 0$ (ha ordine di consistenza 1 ed è zero-stabile);

(b) si determini la regione di assoluta stabilità del metodo per $\lambda = -1 + i$ (in altre parole dire in quale intervallo deve stare il passo h affinché il modulo della soluzione numerica u_n del problema (*) tenda a zero per $t_n \to \infty$).