Corso di ANALISI NUMERICA
A.A. 2014/15

Foglio di esercizi N.8

1. Scrivere le funzioni (**eulero, eulimp, eulmod, heun, cranic**) in grado di calcolare la soluzione numerica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mediante rispettivamente i metodi di Eulero esplicito, Eulero implicito, Eulero modificato, Heun e Crank-Nicolson. Ogni metodo esplicito richiederà come argomenti la funzione $f(t, y)$ termine noto dell'equazione differenziale (da definire come handle $@(t, y)$), il tempo iniziale t_0 e l'intervallo di tempo T considerati, il dato iniziale y_0 e il numero di passi di integrazione N, e restituirà i vettori t dei nodi di integrazione e u della soluzione numerica calcolata su di essi. Ogni metodo implicito chiederà inoltre la funzione $f_y(t, y)$, la tolleranza tol e il numero massimo di iterazioni $itmax$, parametri necessari al funzionamento del metodo di Newton.

2. Costruire un programma che assegnate le funzioni $f(t, y)$, $f_y(t, y)$ ed $y(t)$ (soluzione esatta) risolva mediante uno dei metodi precedenti (usare il comando `switch case` per la scelta) il problema di Cauchy corrispondente disegnando in un unico grafico la traiettoria esatta y e quella approssimata u (rispetto ai nodi di integrazione), oltre a calcolare l'errore finale

$$E(N) = |y(t_0 + T) - u(N)|.$$

Applicare il programma almeno ai seguenti esempi (a destra la soluzione esatta):

$$\begin{cases} y'(t) = -e^{-(t+y(t))} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y(t) = \log(e + e^{-t} - 1)$$

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(1 - y(t)) \\ y(0) = 0.5 \end{cases} \qquad y(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t)/(t + 1) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y(t) = (t + 1)^3$$

3. Concentrandosi su uno solo degli esempi precedenti, scrivere un programma che per ogni metodo esegue il calcolo della soluzione raddoppiando via via il numero dei passi di integrazione in cui suddividere l'intervallo di tempo T considerato, da $N = 2$ a $N = 2^9$, e salvando l'errore finale in un vettore:

$$Err(i) = |y(t_0 + T) - u(2^i)|, \qquad i = 1 : 9 \ .$$

Analizzare la velocità di convergenza del metodo (mediante il grafico di Err in scala semilogaritmica o il calcolo dei rapporti tra le sue componenti successive).

4. Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -5y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

calcolarne la soluzione approssimata in $[0, 20]$ mediante 49 passi dei metodi di Eulero esplicito, Heun ed Eulero implicito. Visualizzare le traiettorie approssimate nel piano (t, y) in un unico grafico (con intervallo delle ordinate $[-4, 4]$). Ripetere l'esercizio con un diverso numero di passi (50, 51, 52, 55, 80, 100) per lo stesso intervallo temporale. Confrontare le proprietà di assoluta stabilità dei metodi.

5. Il comando `quiver` di Matlab consente di disegnare il campo di velocità definito dall'equazione differenziale in tutto il piano (t, y). Provate a eseguire il seguente script, relativo al secondo esempio del punto 2., cercando di capire come funziona (usate l'help di `meshgrid` e `quiver`):

```
% uso di quiver per il campo di velocit\`a  indotto da un edo
close all
fun=@(t,y) y.*(1-y)  ;
n=20; tpt=linspace(0,3,n); ypt=linspace(-2,2,n);
[t,y]=meshgrid(tpt,ypt); %genera matrici nxn t e y dai vettori tpt e ypt
pt=ones(size(y)); py=fun(t,y);
quiver(t,y,pt,py,1.5) %campo vett. mediante array di pendenza (1,f(t,y))
axis([ 0 3 -2 2])
```

Provate a sovrapporre a questo grafico quello (in rosso) della soluzione numerica del problema di Cauchy corrispondente al dato iniziale $y_0 = y(0)$, per diversi valori di y_0 tra -2 e 2, usando un metodo a vostra scelta (con $T = 3$ e N sufficientemente grande). Osservate come le soluzioni si sovrappongono al campo delle velocità. Riuscite a intuire i possibili comportamenti delle soluzioni per $t \to \infty$ in base ai valori iniziali?