Corso di ANALISI NUMERICA
A.A. 2014/15

Foglio di esercizi N.6

1. Scrivere un codice (**baselag**) in grado di disegnare i polinomi caratteristici di Lagrange $l_i(x)$ relativi a $n+1$ nodi equispaziati x_i $(i = 0, 1, ..., n)$ in un intervallo assegnato $[a, b]$. Usare il comando `linspace` per generare la partizione, e sfruttare il carattere ricorsivo della definizione (per risparmiare calcoli potreste anche usare la simmetria $l_i(a + x) = l_{n-i}(b - x)$). Disegnarli tutti nella stessa finestra grafica per valori di n non troppo grandi.

2. Scrivere un codice in grado di disegnare una funzione continua $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ insieme alla sua interpolata di Lagrange di ordine n su $(n+1)$ nodi equispaziati $(\Pi_n(x))$. Il programma legge in input a, b, n. La funzione può essere definita in una funzione a parte o come handle in input. Usare il comando `linspace` per generare i nodi per l'interpolazione, e la funzione **interpol** del libro di testo per il calcolo dei valori del polinomio interpolatore relativi a 100 punti dell'intervallo $[a, b]$. Aggiungere il calcolo (e il relativo grafico) dell'errore
$$E_n(x) = |f(x) - \Pi_n(x)| \ .$$

3. Usare lo script del punto precedente su almeno tre esempi diversi di funzione, per diversi valori di n. Considerare in particolare il controesempio di Runge relativo a $f(x) = 1/(1 + x^2)$ in $[-5, 5]$. In questo caso verificare che per $n \to \infty$ non si ha $\|f - \Pi_n\|_\infty \to 0$.

4. Costruire mediante la funzione **dividif** del libro di testo la tabella delle differenze divise per $x = 0 : 0.4 : 1.6$ e $f(x) = 1 + \sin(3x)$. Servendovi dello stesso programma, sapreste stimare l'errore $E_4(0.2) = |f(0.2) - \Pi_4(0.2)|$?

5. Scrivere un codice in grado di disegnare una funzione continua $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ insieme alla sua interpolata di Lagrange composita di ordine m calcolata su di una partizione uniforme di n sottointervalli ($\Pi_h^m(x)$, dove $h = (b - a)/n$). Usare `linspace` e **interpol** in ogni sottointervallo per costruire e valutare il polinomio interpolatore su di una griglia di punti ai fini del grafico. Alla fine aggiungere il calcolo (e il relativo grafico) dell'errore
$$E_n^m(x) = |f(x) - \Pi_h^m(x)| \ .$$

6. Usare lo script del punto 5) sugli stessi esempi del punto 3). Mostrare in particolare che per l'esempio di Runge stavolta si ha $\|f - \Pi_h^m\|_\infty \to 0$, per m fissato (anche piccolo) e $n \to \infty$ (cioè $h \to 0$).

7. Modificare il codice del punto 2) in modo che usi al posto dei nodi equispaziati i nodi di Chebyshev. Volendo potete mettere a confronto in un'unica finestra grafica i polinomi interpolatori dello stesso ordine n sui due set di nodi. Riprendere gli esempi visti in precedenza e confrontare gli errori di interpolazione.

8. Scrivere un codice che disegni il polinomio osculatore di Hermite della funzione $f(x) = sin(4\pi x)$ in $[0, 1]$ relativo a $n + 1$ nodi equispaziati (usare il programma **hermpol** del libro di testo). Confrontarlo graficamente col polinomio interpolatore di Lagrange calcolato a partire degli stessi nodi.

9. Presi 11 nodi equispaziati sull'intervallo $[-5, 5]$, costruire la spline cubica naturale s_3 della funzione di Runge $f(x) = 1/(1 + x^2)$ relativa a tali nodi, valutandola in 100 punti dell'intervallo (utilizzare le funzioni **spline2** e **modthomas**). Disegnare in tre finestre grafiche distinte s_3 e le sue derivate s_3' e s_3'' a confronto con i grafici di f, f', f'' [ricordando che $f'(x) = -2x/(1 + x^2)^2$ e $f''(x) = 2(3x^2 - 1)/(1 + x^2)^3$]. Valutare le norme infinito del vettore degli errori. *Facoltativo:* raddoppiare progressivamente il numero degli intervalli di costruzione delle spline (da $n = 10$ a $n = 160$) stimando l'ordine di convergenza dell'errore in norma infinito.