Corso di ANALISI NUMERICA
A.A. 2014/15

Foglio di esercizi N.5

1. Scrivere un codice (**scan**) che implementi il metodo di scansione, in grado determinare uno o più intervalli al cui interno una funzione continua assegnata ammetta radice. Argomenti di input: la funzione, gli estremi dell'intervallo iniziale e lo step della scansione; argomenti di output: gli estremi degli intervalli contenenti le radici. Testarlo sulla funzione:
$$f(x) = \cos(x) - \sin(3x)$$
nell'intervallo $[-10, 10]$, per diverse scelte del passo di scansione (tra 0.1 e 3). Quante radici di f individuate nell'intervallo dato?

2. Scrivere il codice **newton** di una function che implementa il metodo di Newton per il calcolo approssimato della radice di una funzione. Argomenti di input: la funzione, la sua derivata, il valore iniziale x_0, la tolleranza e il massimo numero di iterazioni; argomenti di output: il valore calcolato, il numero di iterazioni (volendo anche i vettori delle iterate, degli incrementi e dei residui). Come criterio di uscita usare il controllo dell'incremento.

3. Approssimare la radice della funzione $f(x) = x + \log(x)$ con il metodo di Newton; dimostrare preventivamente che f ammette una e una sola radice in $(0, +\infty)$, e stabilire per quali scelte di x_0 il metodo convergerà sicuramente, e in modo monotono (controllare poi ad esempio con i valori $x_0 = 0.1, 0.3, 0.6, 1, 2, 3$ con precisione 10^{-5}, stampando i valori della successione).

4. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, che ha radici $x_1 = 1$ (doppia) e $x_2 = 3$; approssimare col metodo di Newton la radice x_1 partendo ad esempio da $x_0 = 0$; ricalcolare la stessa radice col metodo di Newton modificato
$$x^{k+1} = x^k - 2f(x^k)/f'(x^k),$$
e confrontare il numero di iterazioni impiegate.

5. Scrivere il codice **fixpoint** di una function che implementa il metodo delle iterazioni di punto fisso per il calcolo approssimato della radice di una funzione assegnata. Argomenti di input: la funzione iniziale, la funzione di iterazione, il valore iniziale x_0, la tolleranza e il massimo numero di iterazioni; argomenti di output: il valore calcolato, il numero di iterazioni (volendo anche i vettori delle iterate, degli incrementi e dei residui). Come criterio di uscita usare il controllo dell'incremento.

6. Per il calcolo dell'unica radice reale della funzione $f(x) = x^3 - x^2 + 8x - 8$ (data da $\alpha = 1$) applicare il metodo di punto fisso $x^{k+1} = \phi(x^k)$, con le seguenti scelte della funzione ϕ:
$$\phi_1(x) = -x^3 + x^2 - 7x + 8, \qquad \phi_2(x) = \frac{8 - x^3}{8 - x},$$

$$\phi_3(x) = -\frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{10} + \frac{x}{5} + \frac{4}{5}, \qquad \phi_4(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 8}{3x^2 - 2x + 8};$$

verificare preventivamente la consistenza del metodo in tutti i casi; assumere sempre una tolleranza di 10^{-5} e lo stesso numero massimo di iterazioni. Testare ogni caso con i valori di $x_0 = -2, 0, 3$. Giustificare i risultati ottenuti calcolando a mano i valori di $\phi'(\alpha)$ nei quattro casi.

7. Si consideri la ricerca degli zeri della funzione $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-1}$; si dimostri che il metodo del punto fisso $x^{k+1} = \phi(x^k)$ con

$$\phi(x) = x - 2 + \frac{x}{x-1}$$

converge all'unica radice positiva di f per ogni $x_0 \in (1, \alpha)$; qual è l'ordine del metodo in questo caso?

8. Si consideri il polinomio $p_5(x) = x^5 - 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2$; per approssimarne tutte le radici in campo complesso, si costruisca la matrice companion associata e se ne trovino gli autovalori (col metodo QR base, programma **basicqr**, o semplicemente con `eig` di Matlab); confrontare i risultati con quelli forniti dal comando `roots(c)` di Matlab, dove `c` indica l'array dei coefficienti del polinomio (ordinati secondo le potenze decrescenti).

9. Scrivere il codice **newtonsys** di una function che implementa il metodo di Newton con la valutazione ogni p passi della matrice Jacobiana per il calcolo approssimato della radice di un sistema di due equazioni in $\mathbb{R}^2$. Testarlo per approssimare la soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1/2) + x_2^3 = 0 \end{cases};$$

porre $x_0 = [1; 1]$, tolleranza 10^{-5}, massimo numero di iterazioni 10 e diverse scelte del numero p. *Facoltativo*: in base ai test fatti qual è secondo voi il valore di p più conveniente in questo caso?