Corso di ANALISI NUMERICA - A.A. 2014/15
Prima prova in itinere - 21 Aprile 2015

1. Si dimostri che per ogni norma matriciale consistente con una norma vettoriale vale:
$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$
dove $\rho(A)$ indica il raggio spettrale della matrice A.

2. Si consideri un metodo iterativo del tipo
$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad \forall k \geq 0, \quad x^{(0)} \text{ dato},$$
consistente con la soluzione del sistema lineare $Ax = b$; se indichiamo con $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ l'errore del metodo alla k-ma iterazione, dimostrare che vale la relazione
$$e^{(k)} = B^k e^{(0)}, \quad \forall k = 0, 1, ...;$$
dedurne che il metodo converge per ogni scelta di $x^{(0)}$ se $\rho(B) < 1$.

3. Si consideri la matrice seguente:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0.2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & -0.2 & 4 \end{pmatrix}$$
Rispondere alle seguenti richieste giustificando le risposte:
   (a) calcolare le norme 1, ∞ e di Frobenius di A;
   (b) dimostrare che in questo caso vale $\|A\|_2 = \rho(A)$;
   (c) dimostrare che $\lambda_{min}(A) > 0$ (usare i teoremi sulla localizzazione geometrica degli autovalori); A è simmetrica definita positiva?
   (d) A è a dominanza diagonale stretta?

4. Dato un sistema lineare $Ax = b$:
   (a) scrivere in formule il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema e una function in Matlab di non più di 10 righe che lo implementi, arrestandosi mediante controllo dell'incremento;
   (b) dire se il metodo di Gauss-Seidel convergerebbe se applicato ad un sistema con la matrice A dell'esercizio 3); più in generale, per quali valori del parametro ω convergerebbe il metodo del rilassamento (SOR) in questo caso?
   (c) dire se la stessa matrice A ammette una fattorizzazione di Cholesky e descrivere come la sua conoscenza potrebbe essere utilizzata per risolvere il sistema.

Corso di ANALISI NUMERICA - A.A. 2014/15
Prima prova in itinere - 21 Aprile 2015

1. Si dimostri che per ogni norma matriciale consistente con una norma vettoriale vale:
$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n},$$
dove $\rho(A)$ indica il raggio spettrale della matrice A.

2. Si consideri un metodo iterativo del tipo
$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad \forall k \geq 0, \quad x^{(0)} \text{ dato},$$
consistente con la soluzione del sistema lineare $Ax = b$; se indichiamo con $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ l'errore del metodo alla k-ma iterazione, dimostrare che vale la relazione
$$e^{(k)} = B^k e^{(0)}, \quad \forall k = 0, 1, ...;$$
dedurne che il metodo converge per ogni scelta di $x^{(0)}$ se $\rho(B) < 1$.

3. Si consideri la matrice seguente:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 3 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
Rispondere alle seguenti richieste giustificando le risposte:
   (a) calcolare le norme 1, ∞ e di Frobenius di A;
   (b) dimostrare che in questo caso vale $\|A\|_2 = \rho(A)$;
   (c) dimostrare che la matrice ha un (un solo) autovalore negativo (usare i teoremi sulla localizzazione geometrica degli autovalori); A è a dominanza diagonale stretta?
   (d) A è simmetrica definita positiva?

4. Dato un sistema lineare $Ax = b$:
   (a) scrivere in formule il metodo di Jacobi per la risoluzione del sistema e una function in Matlab di non più di 10 righe che lo implementi, arrestandosi mediante controllo dell'incremento;
   (b) dire se il metodo di Jacobi convergerebbe se applicato ad un sistema con la matrice A dell'esercizio 3); per quali valori del parametro ω convergerebbe in questo caso il metodo del rilassamento (SOR)?
   (c) dire se la stessa matrice A ammette una fattorizzazione LU e descrivere come la sua conoscenza potrebbe essere utilizzata per risolvere il sistema.