Corso di ANALISI NUMERICA
A.A. 2014/15

Foglio di esercizi N.4

1. Scrivere un codice (**gershgorin**) in grado di utilizzare graficamente il Teorema dei Cerchi di Gershgorin per la localizzazione geometrica degli autovalori di una matrice quadrata A a valori complessi. Il programma deve disegnare in colori diversi i cerchi riga e i cerchi colonna in una finestra grafica $[-M, M, -M, M]$, dove $M = \|A\|_\infty$.

   Per il disegno dei cerchi usare opportunamente il comando `plot` e le coordinate polari (oltre al comando `axis square` per evitare effetti distorsivi). Aggiungere poi al grafico mediante asterischi i punti corrispondenti agli autovalori calcolati con il comando `eig` di Matlab.

2. Applicando i teoremi dei cerchi di Gershgorin alla matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2+2i & 2\sqrt{2} \\ 0.25 & 2 & -5.75i \end{pmatrix}$$

   rispondere alle seguenti domande (aiutarsi con **gershgorin**):

   - si può escludere che A abbia autovalori multipli?
   - si può assicurare che A sia invertibile?

3. Scrivere il codice **powerm** che implementa il metodo delle potenze per il calcolo approssimato dell'autovalore di massimo modulo. Come criterio di uscita usare il controllo dell'incremento.

4. Calcolare con una tolleranza di 10^{-7} l'autovalore λ di massimo modulo della matrice A dell'esercizio 2 e l'autovettore unitario x associato. Calcolare la norma euclidea del vettore residuo $r_\lambda = Ax - \lambda x$ corrispondente.

5. Applicare il metodo delle potenze alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

   prima con $z_0 = [1; 1; 1]$, poi con $z_0 = [0.5846; 1.7186; 0.5494]$. Confrontare i risultati. Cercare di darsi una spiegazione utilizzando la matrice X degli autovettori di A ottenibile mediante il comando:

```
[X,D]=eig(A)
```

6. Scrivere il codice **invpower** che implementa il metodo delle potenze inverse per il calcolo approssimato dell'autovalore più vicino ad un valore μ assegnato. Come criterio di uscita usare il controllo dell'incremento.

7. Calcolare con una tolleranza di 10^{-7} gli altri due autovalori della matrice A dell'esercizio 2. Nel caso dell'autovalore intermedio usare per μ una stima ricavata dal teorema dei cerchi.

8. Calcolare con i codici a disposizione e una tolleranza di 10^{-5} l'intero spettro della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Confrontare i risultati con quelli forniti dalla funzione `eig`.

9. Costruire la matrice A che corrisponde alla parte triangolare superiore della matrice di Hilbert di ordine 25. Partendo da $z_0 =$ `ones`$(25, 1)$ approssimare l'autovalore di modulo minimo e quello più vicino al valore 2, con tolleranza 10^{-10} e $nmax = 500$. Visualizzare l'intero spettro di A con la funzione `eig` e utilizzare la funzione di Matlab `condeig` (e l'help relativo) per interpretare i risultati ottenuti.

10. (*facoltativo*) Confrontare la velocità di convergenza del metodo delle potenze per il calcolo dell'autovalore di modulo massimo λ_1 delle due matrici $A =$ `hilb(5)` e $B =$ `triu(hilb(5))`. In entrambi i casi plottare in scala semilogaritmica (con le iterazioni k in ascissa) il vettore `relres` generato dalla funzione **powerm** a confronto con le potenze corrispondenti s^k e s^{2k}, dove $s = \lambda_2/\lambda_1$ (calcolato mediante `eig`). Verificare il diverso andamento nei due casi e spiegarne il perché.