Corso di ANALISI NUMERICA
A.A. 2014/15

Foglio di esercizi N.3

1. Scrivere i codici **jacobi** e **SOR** che implementano i metodi iterativi di Jacobi e del rilassamento successivo (che comprende Gauss-Seidel per $\omega = 1$) per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$. Come criterio di uscita usare nel primo caso il controllo dell'incremento, nel secondo il controllo del residuo.

2. Considerare i quattro sistemi lineari $A_i x = b_i$, con b_i calcolato in modo che la soluzione del sistema sia sempre il vettore unitario e le matrici A_i date da

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

   Studiare la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel nei quattro casi, calcolando e confrontando ogni volta il raggio spettrale delle relative matrici di iterazione.

3. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix},$$

   che ha come soluzione esatta il vettore unitario. Modificare il codice **jacobi** in modo che ad ogni iterazione k salvi in tre distinti vettori i valori delle quantità:

$$err(k) = \|x - x_k\|_\infty, \quad del(k) = \|x_k - x_{k-1}\|_\infty, \quad eps(k) = \frac{(del(k))^2}{del(k-1) - del(k)}.$$

   Al termine plottare in uno stesso grafico mediante il comando `semilogy` i grafici dei tre vettori mettendo in ascissa il numero delle iterazioni. Assumere una tolleranza di $1.e-7$ e confrontare il grafico con la Figura 4.10 del libro di testo.

4. Costruire la matrice simmetrica definita positiva $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ tale che

$$A(i,j) = \begin{cases} 4 & i = j \\ -1 & |i-j| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- verificare che il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è in questo caso il quadrato di quello della matrice di iterazione del metodo di Jacobi;
- ricordando che per una tale matrice il metodo del rilassamento converge per ogni valore del parametro $\omega \in (0,2)$, approssimare sperimentalmente il parametro ottimale ω_{opt}, cioè quello per cui il metodo impiega il minor numero di iterazioni per convergere a parità di tolleranza richiesta ($1.e-12$). Per farlo costruite un termine noto b in modo che la soluzione esatta del sistema $Ax = b$ sia il vettore unitario e fate girare il codice SOR per i valori di $\omega = 0.01 : 0.01 : 1.99$, salvando in un vettore per ognuno di essi il numero di iterazioni necessarie alla convergenza. Volendo potete rappresentare in un grafico l'andamento del numero di iterazioni rispetto ai valori di ω. Confrontare il valore ottenuto per ω_{opt} con il valore esatto:
$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}}$$
- (*facoltativo*) Utilizzare i codici precedentemente scritti per confrontare sperimentalmente le prestazioni dei metodi di Jacobi, Gauss-Seidel e SOR con parametro ω_{opt} nell'esempio considerato, visualizzando in un unico grafico in scala semilogaritmica (rispetto al numero delle iterazioni) l'andamento della norma euclidea $\|\cdot\|_2$ dell'errore nei tre metodi. Ripetere il test utilizzando stavolta la norma dell'energia $\|\cdot\|_A$ definita per matrici simmetriche definite positive A dalla formula
$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}\ .$$