Corso di ANALISI NUMERICA
A.A. 2014/15

Foglio di esercizi N.2

N.B. Controllate la sintassi di tutte le funzioni intrinseche di Matlab usate mediante il relativo comando di `help`.

1. Calcolare il numero di condizionamento K_1 della matrice di Hilbert di ordine 4 $A = H_4$, con i comandi:

   ```
   cond(A,1)
   condest(A)
   1/rcond(A)
   norm(A,1)*norm(invhilb(4),1).
   ```

2. Utilizzare il comando di Matlab

   ```
   [L,U,P]=lu(A);
   ```

   per verificare che la matrice $A = [7, 1, 3; 1, 8, 2; 3, 2, 9]$ ammette un'unica fattorizzazione LU senza ricorso alla pivotazione. Confrontare con il risultato fornito dal codice **lukji** del libro di testo.

3. Scrivere un codice per l'inversione di una matrice quadrata A $n \times n$, basata sulla sua fattorizzazione LU e la risoluzione di n coppie di sistemi triangolari $Ly = e_i$, $Ux_i = y$, dove e_i indica come al solito l'i-mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$, e x_i sarà la i-ma colonna della matrice C inversa di A. Utilizzare le funzioni già studiate **lukji, forwardrow e backwardrow**, e concludere il codice con la prova che $A * C = I$.

4. Si consideri ancora la matrice di Hilbert $A = hilb(4)$, e la si fattorizzi mediante la fattorizzazione di Choleski $A = H^T H$ usando il codice **chol2** visto a lezione. Confrontare con l'output del comando Matlab

   ```
   chol(A)
   ```

5. Si considerino i tre vettori:

   $$a = [1, 2, 3], \quad b = [2, 1, 3], \quad c = [3, 2, 1]$$

   e si verifichi (usando Matlab) che sono linearmente indipendenti; scrivere poi un codice per l'ortogonalizzazione di n vettori mediante il metodo di Gram-Schmidt e usarlo per costruire due vettori d ed e tali che i vettori (a, d, e) costituiscano una terna di vettori a 2 a 2 ortogonali. Verificare che l'ortogonalità ottenuta non è esatta.

6. Scrivere un codice **thomas** che utilizza l'algoritmo di Thomas nella sua forma base per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$ con matrice A tridiagonale e verifica il risultato ottenuto calcolando il vettore residuo $r = Ax - b$.

7. Risolvere il sistema $Ax = b$, dove A è la matrice 7×7 dell'esercizio 6 del Foglio 1 e b il vettore 7×1 costituito da tutti 1, nei seguenti modi:

   - mediante fattorizzazione di Choleski di A e metodi di sostituzione in avanti e all'indietro;
   - mediante l'algoritmo di Thomas.

8. Sia $A = hilb(4)$ la matrice di Hilbert di ordine 4. Calcolare la norma infinito della matrice $(I - \tilde{Q}^T\tilde{Q})$, dove $\tilde{Q}$ è la matrice ortogonale della fattorizzazione QR ridotta di A. Per ottenere quest'ultima usare una volta la funzione **modgrams** del libro di testo e un'altra il comando Matlab (date un'occhiata a *help qr*)

   ```
   [Q,R]=qr(A,0)
   ```

9. Calcolare la soluzione $x \in \mathbb{R}^2$ nel senso dei minimi quadrati del sistema sovradeterminato $Ax = b$ mediante la fattorizzazione QR, dove

   $$A = [2, 1; -1, 3; 1, 4] \qquad e \qquad b = [1; 1; 1].$$

   Calcolare la norma 2 del vettore residuo. Osservare che la soluzione trovata coincide con quella fornita dal comando diretto di Matlab:

   ```
   x=A\b
   ```