Analisi Numerica (A.A. 2014/15)

Programma svolto (finale)

May 28, 2015

1 Settimana 2-5 marzo 2015

Informazioni pratiche sul corso (registrarsi sul sito).

Matematica numerica: finalità. Dal problema reale al modello matematico, dallo schema di risoluzione all'analisi dei risultati. Buona posizione di un problema matematico: esistenza e unicità della soluzione, dipendenza continua dai dati. Numero di condizionamento (relativo e assoluto) del problema continuo. Consistenza, stabilità e convergenza del metodo numerico. Numero di condizionamento (relativo e assoluto) del problema discreto. Per un problema ben posto convergenza implica stabilità dello schema. Se viceversa il problema è consistente, stabilità implica convergenza [Teorema di equivalenza (D)].

Richiami di algebra lineare: operazioni tra matrici e vettori e loro proprietà; diversi tipi di matrici, in base a struttura, simmetria, segno; autovalori, autovettori, spettro di matrici e raggio spettrale; trasformazioni di matrici per similitudine; decomposizione di Schur.

2 Settimana 9-12 marzo 2015

Matrici diagonalizzabili. Decomposizione ai valori singolari (SVD). Norme matriciali (norme 1, 2, ∞ e di Frobenius) e loro caratterizzazione (D). Rapporto tra raggio spettrale e norma di una matrice. Numero di condizionamento di una matrice e suo significato nel condizionamento di un sistema lineare. Rappresentazione del numero di condizionamento in norma 2 in funzione dei valori singolari o degli autovalori di una matrice.

Metodi diretti per la risoluzione di un sistema lineare. Il caso delle matrici triangolari. I metodi delle sostituzioni in avanti e all'indietro e la loro implementazione Matlab (per righe o colonne). Richiami sul metodo di eliminazione di Gauss (MEG) e sulla sua complessità.

Laboratorio. Introduzione veloce alla programmazione in Matlab: interfaccia, variabili, array e operazioni su di essi, grafica di funzioni, cicli e alternative, funzioni e scripts.

3 Settimana 16-19 marzo 2015

MEG: pseudocodice, rilettura come fattorizzazione. Fattorizzazione LU e sua implementazione (codice **lukji**). Strategia del pivot parziale e fattorizzazione PA=LU. Fattorizzazione $A = LDM^T$. Matrici simmetriche definite positive e fattorizzazione di Choleski (D) (codice **chol2**). Matrici tridiagonali, loro fattorizzazione e algoritmo di Thomas (codice **modthomas**). Fattorizzazione QR di matrici rettangolari, forma ridotta mediante l'algoritmo di Gram-Schmidt e la sua versione modificata (codice **modgrams**).

Laboratorio. Foglio 1: utilizzo dei comandi Matlab per l'algebra lineare, norme di matrici, condizionamento della matrice di Hilbert, matrici tridiagonali; metodi di sostituzione per la soluzione di sistemi con matrici triangolari (codici **forwardrow** e **backwardrow**).

4 Settimana 23-26 marzo 2015

Un'applicazione della fattorizzazione QR: risoluzione di un sistema lineare sovradeterminato nel senso dei minimi quadrati. Metodi iterativi per la risoluzione di un sistema lineare: i metodi lineari stazionari a un passo. Equivalenza tra convergenza e raggio spettrale della matrice di iterazione minore di uno per metodi consistenti (D). Esempi: i metodi di Jacobi, Gauss-Seidel e SOR. Risultati di convergenza per i metodi studiati nel caso di matrici particolari (a dominanza diagonale stretta, simmetriche definite positive o tridiagonali) e velocità di convergenza. Criterio di arresto basato sul controllo dell'incremento.

Laboratorio. Foglio 2: codici per la fattorizzazione LU, il calcolo dell'inversa di una matrice, la fattorizzazione di Choleski per le matrici simmetriche definite positive, il metodo di Thomas per le matrici tridiagonali e la fattorizzazione QR.

5 Settimana 30 e 31 marzo, 9 aprile 2015

Criterio di arresto basato sul controllo del residuo. Implementazione (codici **jacobi** e **SOR**).

Calcolo di autovalori e autovettori. Criteri di localizzazione geometrica degli autovalori: cerchio massimale con raggio la norma della matrice, rettangolo del piano complesso basato su minimo e massimo autovalore della parte hermitiana e di quella antihermitiana della matrice, teoremi dei cerchi di Gershgorin (codice **gershgorin**). Condizionamento del problema agli autovalori: una stima a priori e una a posteriori. Il metodo delle potenze per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo. Stima dell'errore. Criterio d'arresto basato sul controllo dell'incremento. Codice **powerm**.

Laboratorio. Foglio 3: codici per la risoluzione dei sistemi lineari mediante metodi iterativi (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR). Confronti di convergenza mediante stima dei raggi spettrali delle matrici di iterazione.

6 Settimana 13-16 aprile 2015

Il metodo delle potenze inverse per il calcolo dell'autovalore più vicino ad un valore μ assegnato (autovalore di minimo modulo per $\mu = 0$); il codice **invpower**. Il metodo basato sulle iterazioni QR per il calcolo dell'intero spettro di una matrice reale A, nella sua forma base (codice **basiqr**). Convergenza nel caso di matrici con autovalori con moduli distinti. Cenni al metodo dello shift nel caso di autovalori vicini in modulo.

Risoluzione di equazioni non lineari e condizionamento relativo. Ordine di un metodo numerico convergente. Alcuni metodi classici: bisezione, corde, secanti, regula falsi, tangenti (Newton). Il metodo delle iterazioni di punto fisso. Teorema di convergenza globale per funzioni di iterazione contrattive e chiuse.

Laboratorio. Foglio 4: codici gershgorin, powerm, invpower e applicazioni. Osservazioni su vettore iniziale, condizionamento, ordine di convergenza.

7 Settimana 27-30 aprile 2015

Teorema di convergenza locale per le iterazioni di punto fisso. Ordine di convergenza di un metodo di punto fisso. Applicazione ai metodi delle corde e di Newton. Convergenza monotona del metodo di Newton per funzioni monotone e convesse (o concave). Criteri di arresto basati sul controllo dell'incremento o del residuo. Listati dei codici **newton** e **fixpoint**. Osservazioni sul modo di introdurre le funzioni in Matlab. Il programma **scan** per il metodo di scansione. Il caso degli zeri dei polinomi. Calcolo di tutte le radici in campo complesso attraverso il metodo della matrice companion. Criteri di localizzazione delle radici. Tecnica di deflazione (cenno al metodo di Newton-Horner). Risoluzione di sistemi di equazioni non lineari in R^n. Estensione del metodo di Newton e di quello di punto fisso. Il metodo di Newton con valutazione ciclica della matrice Jacobiana (codice **newtonsys**).

8 Settimana 4-7 maggio 2015

Il problema dell'interpolazione polinomiale. Polinomio interpolatore di Lagrange: esistenza, unicità e stima dell'errore. Limiti dell'interpolazione polinomiale su nodi equispaziati: controesempio di Runge. Costante di Lebesgue e stabilità dell'interpolazione. Forma di Newton del polinomio interpolatore mediante le differenze divise. Costruzione ricorsiva, codice **dividif**.

Laboratorio. Foglio 5: codici scan, newton, fixpoint, newtonsys; consistenza, convergenza e relativo ordine dei metodi, radici multiple, companion matrix.

9 Settimana 11-14 maggio 2015

Costo di calcolo delle differenze divise e loro utilizzo per stimare l'errore di interpolazione in un punto assegnato. Interpolazione di Lagrange su nodi di Chebyshev e stima della costante di Lebesgue associata. Interpolazione composita di Lagrange di ordine k su n intervalli. Interpolazione di Hermite generalizzata, e caso particolare del polinomio osculatore. Costruzione (codice **hermpol**) e stima dell'errore. Interpolazione composita mediante funzioni spline. Gradi di libertà, spline periodiche o naturali. Splines cubiche naturali, costruzione nel caso di nodi equispaziati e stime dell'errore in norma uniforme.

Laboratorio. Foglio 6: polinomi caratteristici di Lagrange, codici **dividif** e **interpol** per il calcolo e il disegno dei polinomi di interpolazione di Lagrange, semplice e composita.

10 Settimana 18-21 maggio 2015

Spline cubiche: codice **spline2**. Il problema dell'integrazione numerica. Formule di quadratura di tipo interpolatorio. Grado di esattezza. Esempi: formule del punto medio, del trapezio, di Cavalieri-Simpson, semplici e composite. Formule dell'errore nei diversi casi. Codici **midpntc, trapezc, simpsonc**. Generalizzazione: le formule di Newton-Cotes chiuse e aperte, semplici e composite. Indipendenza dei pesi dall'intervallo di integrazione. Teorema generale dell'errore per formule di ordine pari o dispari.

Laboratorio. Foglio 6: interpolazione polinomiale sui nodi di Chebyshev, interpolazione di Hermite, spline cubiche naturali.

11 Settimana 25-28 maggio/1 giugno 2015

Equazioni differenziali. Richiami di teoria sul problema di Cauchy: esistenza e unicità in piccolo e in grande, stabilità (dipendenza continua dai dati). Metodi a un passo, espliciti o impliciti. Formule alle differenze finite per l'approssimazione della derivata prima e loro ordine di consistenza. Costruzione di semplici metodi a un passo: Eulero esplicito, Eulero implicito, Crank-Nicolson, Heun, Eulero modificato. Metodi espliciti, errore di troncamento locale e globale, ordine di consistenza, zero-stabilità. Teorema di zero-stabilità. Metodi convergenti e Teorema di equivalenza di Lax-Richtmyer. Dimostrazione diretta della convergenza del metodo di Eulero esplicito. Assoluta stabilità e determinazione della regione di assoluta stabilità dei metodi di Eulero esplicito e implicito, C-N ed Heun. Metodi A-stabili e metodi condizionatamente assolutamente stabili. Implementazione dei metodi impliciti mediante il metodo di Newton ad ogni passo. Codici **eulero, eulimp, cranic**.

Laboratorio. Foglio 7: integrazione numerica mediante formule di Newton-Cotes semplici e composite (midpoint, trapezio, C-N, treottavi), andamento degli errori.
Foglio 8: metodi numerici per le EDO, andamento degli errori, assoluta stabilità. Disegno del campo di velocità associato ad un'equazione differenziale (function `quiver` di Matlab).