LABORATORIO DI PROGRAMMAZIONE E CALCOLO
Canale 2, A.A. 2013/14

Foglio di esercizi N. 10

57) Scrivere un programma che genera i valori delle due successioni:

$$a_n = (1 + 1/n)^n , \qquad b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$$

al variare di n. Osservare che $a_n < e < b_n$, con a_n crescente e b_n decrescente. Aggiungere come criterio di arresto $b_n - a_n < \varepsilon$ per una tolleranza ε assegnata e studiare come varia il valore di n finale in funzione della tolleranza.

58) Scrivere un programma che dato $x \in [-2, 3]$ determina un valore approssimato di e^x attraverso il calcolo del relativo polinomio di Taylor $p_n(x)$ (di punto iniziale $x_0 = 0$), e confronta al crescere di n il valore ottenuto con quello fornito dalla funzione *exp(x)* della libreria *math.h* di C. Utilizzare in particolare il programma per calcolare un valore approssimato di e, e confrontare i risultati con quelli forniti dall'esercizio precedente.

59) Usando l'esercizio precedente scrivere in un file i valori del polinomio di Taylor $p_n(x)$ di e^x di grado n assegnato su N nodi equidistanti di un intervallo $[a, b]$ contenente l'origine. Lanciare poi il programma Gnuplot mettendo a confronto il grafico del file creato con quello corrispondente della funzione $\exp(x)$. Ripetere il procedimento per valori di n crescenti. Confrontare l'errore massimo ottenuto sull'intervallo con la corrispondente stima a priori fornita dal resto di Lagrange della formula di Taylor.

60) Scrivere un programma che realizza un'approssimazione polinomiale di Taylor (con $x_0 = 0$) della funzione $\cos(x)$ accurata entro una tolleranza ε per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Usare come criterio di arresto la stima dell'errore relativo.

61) (*facoltativo*) Scrivere un programma in grado di calcolare in modo efficiente il logaritmo naturale di un numero reale positivo x. Dato x il programma determina i numeri $\alpha \in [0.5, 1[$ e β tali che $x = \alpha * 2^\beta$, di modo che $\log(x) = \log(\alpha) + \beta * \log(2)$. Quindi calcola il $\log(\alpha)$ attraverso lo sviluppo di Taylor

$$\log(\alpha) = \log(\frac{1-z}{1+z}) \simeq -2 * (z + \frac{z^3}{3} + ... + \frac{z^{2n-1}}{2n-1})$$

dove $z = (1 - \alpha)/(1 + \alpha) \in]0, 1/3]$, e n è scelto come il primo numero per il quale $z^{2n-1}/(2n - 1) < \varepsilon$ (ε tolleranza assegnata).

62) Scrivere un programma che assegnata una funzione derivabile $f(x)$ e un punto x_0, calcola e stampa in una tabella i valori in x_0 delle differenze finite prime di f in avanti, all'indietro e centrata, al variare del passo h. Iniziare da un passo $h = 0.2$ e ripetere dimezzando ogni volta il passo. Assegnando anche la funzione derivata è possibile tabulare anche l'errore assoluto commesso in funzione di h. Confontare i risultati con le stime teoriche di convergenza delle formule precedenti.