LABORATORIO DI PROGRAMMAZIONE E CALCOLO
Canale 2, A.A. 2013/14

Foglio di esercizi N. 7

43) Scrivere un programma che realizza il metodo di Gauss naive (cioè senza ricerca del pivot) per risolvere un sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A}$ matrice quadrata $n \times n$. Al termine calcolare e stampare la soluzione calcolata $\mathbf{x_c}$ e il vettore residuo $\mathbf{r} = \mathbf{Ax_c} - \mathbf{b}$.

44) Modificare il programma precedente per implementare il metodo di Gauss con ricerca parziale del pivot nella risoluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

45) Scrivere un programma che utilizza il metodo di Gauss con ricerca del pivot per il calcolo del determinante di una matrice quadrata $\mathbf{A}$.

Applicare i programmi degli esercizi 43) e 44) ai sistemi lineari seguenti (almeno negli ultimi due casi si consiglia la lettura dei dati da file) confrontando il valore del residuo nell'esecuzione con o senza ricerca del pivot. Quindi testare sperimentalmente il condizionamento delle matrici in gioco apportando piccole perturbazioni ai termini noti.

1.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -19 \\ -34 \\ 16 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 & 0 & 7 \\ 7 & 6 & 9 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & 7 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 35 \\ 58 \\ 53 \\ 37 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1250000000 & 0.1111111111 & 0.1000000000 & 0.0909090909 \\ 0.1111111111 & 0.1000000000 & 0.0909090909 & 0.0833333333 \\ 0.1000000000 & 0.0909090909 & 0.0833333333 & 0.0769230769 \\ 0.0909090909 & 0.0833333333 & 0.0769230769 & 0.0714285714 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.4270202020 \\ 0.3853535354 \\ 0.3511655012 \\ 0.3225940726 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.142857 & 0.125 & 0.111111 & 0.1 & 0.0909091 & 0.0833333 \\ 0.125 & 0.111111 & 0.1 & 0.0909091 & 0.0833333 & 0.0769231 \\ 0.111111 & 0.1 & 0.0909091 & 0.0833333 & 0.0769231 & 0.0714286 \\ 0.1 & 0.0909091 & 0.0833333 & 0.0769231 & 0.0714286 & 0.0666667 \\ 0.0909091 & 0.0833333 & 0.0769231 & 0.0714286 & 0.0666667 & 0.0625 \\ 0.0833333 & 0.0769231 & 0.0714286 & 0.0666667 & 0.0625 & 0.0588235 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.653211 \\ 0.587277 \\ 0.533705 \\ 0.489261 \\ 0.451761 \\ 0.419675 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

46) (*facoltativo*) Scrivere un programma che utilizza il metodo di Gauss per calcolare la matrice inversa di una matrice quadrata $\mathbf{A}$. Verificare il risultato calcolando alla fine il prodotto $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$.

47) Scrivere un programma che realizza il metodo di Jacobi per calcolare una soluzione approssimata del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ quando la matrice è a diagonale strettamente dominante, assegnati un vettore iniziale $\mathbf{x^0}$, una tolleranza e un numero massimo di iterazioni. Il programma si arresta quando viene raggiunta la tolleranza richiesta (criterio di arresto a posteriori) o si è superato il numero massimo di iterazioni. Applicare il programma agli esempi seguenti per diverse scelte di $\mathbf{x^0}$ e della precisione richiesta. Provarlo poi su di un sistema con matrice a diagonale non dominante di cui si conosca la soluzione esatta.

1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 22 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 19 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 28 & -7 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 18 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 27 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & -3 & 31 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 33 \\ 21 \\ 26 \\ 23 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$