Le successioni definite per ricorrenza e l'algoritmo di Erone per approssimare $\sqrt{2}$.

Stefano FINZI VITA
Nota per il corso di Laboratorio di Programmazione e Calcolo
(A.A. 20013/14)

12 ottobre 2013

In molte situazioni, per descrivere soprattutto eventi che si ripetono a tempi discreti e la cui evoluzione dipende dagli stati precedenti, è naturale considerare successioni definite in modo ricorsivo, assegnando uno o più stati iniziali e la legge che determina ogni nuovo stato in funzione dei precedenti. Nel caso più semplice di dipendenza dal solo stato precedente si scriverà in simboli

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) , \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

dove α indica lo stato iniziale del sistema, mentre la funzione $f(x)$ descrive la sua dinamica. Ad esempio la successione definita da $x_{n+1} = 3x_n + 1$, $x_0 = 1$, genererà la sequenza: $1, 4, 13, 40, 121, 364, ...$

Studiare una successione di questo tipo è in genere molto più difficile di quando si disponga di una formula esplicita per il termine n-mo. D'altra parte, specie per un computer, è molto semplice generare l'evoluzione di un simile sistema. Il primo problema è già quello di dimostrare che la successione sia ben definita: per esempio se la funzione f contenesse una radice quadrata, si dovrebbe controllare che al crescere di n il radicando non possa mai diventare negativo. E' chiaro che una simile verifica non può essere fatta controllando tutti i termini, ed è qui che può aiutarci il principio di induzione (v. Esempio 1).

Se poi vogliamo studiare il comportamento della successione, di nuovo dobbiamo ricorrere a ragionamenti induttivi. Riguardo al limite, supponendo che la funzione f sia continua, si può ragionare così: se la successione ammette un limite L, allora per $n \to \infty$ nella relazione costitutiva si otterrebbe $L = f(L)$, per cui L deve necessariamente essere tra i punti fissi della funzione f, cioè tra i valori che f manda in sé stessi; ma l'esistenza di uno o più punti di questo tipo non dimostra ancora nulla (v. Esempio 2). Potrebbe succedere ad esempio che cambiando il solo dato iniziale α, a parità di f, la nostra successione possa cambiare il valore del proprio limite o addirittura smettere di essere convergente. Dovremo aiutarci col ragionamento e con alcuni risultati noti dell'analisi, come ad esempio quello che ci dice che una successione monotona ammette limite, finito, se limitata, o infinito, altrimenti, e di nuovo ci servirà il principio di induzione. Rimandiamo al corso di Calcolo per gli approfondimenti.

Qui ci limiteremo ad analizzare un algoritmo molto efficiente per l'approssimazione della radice quadrata di due, noto come algoritmo di Erone (v. Esempio 3), che in seguito ritroveremo come caso particolare di un più generale metodo di approssimazione degli zeri di una funzione. Questo algoritmo ha la forma di una successione definita per ricorrenza, per la quale, usando solo semplici disuguaglianze algebriche, riusciremo a dimostrare interessanti proprietà di convergenza, oltre a fornire un pratico criterio di arresto in funzione della precisione di calcolo desiderata.

Esempio 1 *Verificare che la successione*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n - 1} \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

non è ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre lo è la successione

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \\ x_0 = 0 \end{cases} .$$

Calcoliamo i primi termini della prima successione:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = \sqrt{-1}!$$

e non possiamo più andare avanti. Nel secondo caso invece si vede facilmente che la quantità sotto radice resterà sempre non negativa. È il principio di induzione ad aiutarci:

$$i)\ 2 + x_0 > 0; \quad ii) \text{ se } 2 + x_n > 0 \text{ allora } 2 + x_{n+1} = 2 + \sqrt{2 + x_n} > 2 > 0 .$$

Esempio 2 *Si consideri la successione*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2/x_n \\ x_0 = \alpha \end{cases} .$$

Si vede subito che questa successione è ben definita per ogni $\alpha \neq 0$, ma che in genere non ha limite. Infatti i suoi valori oscillano alternativamente tra α e $2/\alpha$. D'altra parte se cerchiamo soluzioni dell'equazione $L = 2/L$ troviamo i valori $L = \pm\sqrt{2}$. Corrispondono in effetti al limite solo nel caso in cui sia già $\alpha = \pm\sqrt{2}$, quando si otterrebbero successioni costanti. Tenendo conto che tali valori non sono numeri rappresentabili esattamente su di un calcolatore, possiamo concludere che in pratica questa successione sarà sempre oscillante.

Esempio 3 *Consideriamo l'*algoritmo di Erone*, ovvero il seguente sistema di iterazioni*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \\ x_0 = 2 \end{cases} .$$

Proviamo le seguenti relazioni:
(i)

$$x_n > 0 , \qquad x_n^2 > x_{n+1}^2 > 2 .$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}.$$

(iii)

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{x_0 - \sqrt{2}}{2^n} .$$

(iv)

$$x_{n+1} - \sqrt{2} < x_n - x_{n+1} .$$

Con poca fatica possiamo calcolare i primi termini della successione:

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.41666666, \quad x_3 = 1.41421569, \quad x_4 = 1.41421356\ldots$$

Ricordando che $\sqrt{2} = 1.414213562373094...$ sembra notarsi una rapida convergenza, con un numero di cifre esatte che appare 'raddoppiare' a ogni iterazione. Ma vediamo di dimostrare rigorosamente questo fatto.

(i) Il fatto che x_n sia positivo è una conseguenza del fatto che $x_0 = 2 > 0$ e che le iterazioni successive sono ottenute come media aritmetica di due quantità positive.
Dalla disuguaglianza $(a^2 + b^2) \geq 2ab$ segue poi che

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2} 2\sqrt{x_n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_n}} = \sqrt{2},$$

che è quanto dovevamo provare. Dobbiamo infine dimostrare che la successione decresce, cioè che $x_n > x_{n+1}$. Quindi che, dalla definizione,

$$x_n > \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) ;$$

si vede abbastanza facilmente che ciò si verifica se e solo se $x_n^2 > 2$, che è quanto avevamo appena dimostrato.
(ii) I precedenti argomenti dovrebbero farci intuire che le iterazioni convergono proprio a $\sqrt{2}$. La successione infatti decresce mantenendosi sempre maggiore di $\sqrt{2}$; questo basta a dimostrare, per il già citato teorema sulle successioni monotone, che converga a un numero $L \geq \sqrt{2}$. Ma L dovrà per forza verificare l'equazione $2L = L + 2/L$, cioè $L^2 = 2$, quindi $L = \sqrt{2}$. Infatti l'algoritmo di Erone fornisce proprio un metodo pratico per approssimare questo numero irrazionale.
(iii) Per ogni n si ha $x_n > \sqrt{2}$ e quindi $2/x_n < \sqrt{2}$. Allora

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) < \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{2}),$$

da cui $x_{n+1} - \sqrt{2} < (x_n - \sqrt{2})/2$. Iterando segue la tesi. Quindi la differenza tra x_n e il valore $\sqrt{2}$ tende a zero al crescere di n, e l'errore si dimezza almeno ad ogni passo.
(iv) Ancora dalla relazione vista al punto precedente: $2x_{n+1} < x_n + \sqrt{2}$, da cui , sottraendo a entrambi i membri $(x_{n+1} + \sqrt{2})$ si ottiene la tesi, che afferma in sostanza che se mi fermo dopo $n + 1$ passi, la mia distanza dal valore corretto di $\sqrt{2}$ è minore della differenza $x_n - x_{n+1}$. Abbiamo quindi trovato un ottimo criterio d'arresto per il nostro algoritmo: ci riterremo soddisfatti, e quindi fermeremo le iterazioni, non appena quella differenza sarà diventata più piccola della precisione voluta.

Osservazione. I ragionamenti che abbiamo fatto possono essere ripetuti senza grossi cambiamenti per ottenere un algoritmo efficiente per il calcolo di qualunque radice quadrata di un numero positivo β:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\beta}{x_n}\right) \\ x_0 = \alpha \end{cases} .$$

dove per α possiamo prendere un qualunque valore per eccesso del numero cercato.