Corso di Laurea in Matematica. SAPIENZA Università di Roma

Prova scritta del Corso di Analisi Numerica - appello 21/01/2014

1. Assegnati la matrice $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ed il vettore $c \in \mathbb{R}^4$

$$M = 0.2 \begin{pmatrix} -2 & 0.1 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & 2 & 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.2 & 4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & -4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.2 \\ -1 \\ 0.3 \end{pmatrix},$$

   (a) dimostrare che M è invertibile e che i suoi autovalori sono reali e distinti;

   (b) fornire una maggiorazione del raggio spettrale di M;

   (c) verificare che il metodo di Gauss Seidel applicato al sistema lineare $Mx = c$ converge all'unica soluzione.

2. Dimostrare che per una formula di quadratura a $n+1$ nodi il grado di precisione è di minore $2n+2$.

3. Assegnato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{5+10\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{3} y(t) & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

   (a) scriverne la soluzione approssimata del problema (1) al tempo $t = 3$ fornita dal metodo di Eulero esplicito con passo di discretizzazione $h = 0.3$;

   (b) stabilire se lo schema è assolutamente stabile con tale passo di discretizzazione.