Corso di Laurea in Matematica. SAPIENZA Università di Roma

Seconda prova in itinere del Corso di Analisi Numerica - 11 Giugno 2013

1. Della funzione $f \in C^3[0,1]$ si conoscono le ordinate in 0, 0.5, 1 ed è noto che
$$-10 \leq f'''(x) \leq -1 \quad \forall x \in [0,1].$$
È possibile dare un'approssimazione di $f(\frac{3}{4})$ più accurata di quella fornita dal polinomio interpolatore relativo ai tre nodi?

2. Dimostrare che

   (a)
$$\sum_{i=0}^{n} \ell_i^{(n)}(x) = 1 \quad \forall n,$$
dove i polinomi $\{\ell_i^{(n)}\}_{i=0}^{n}$ sono i polinomi caratteristici che compaiono nella forma di Lagrange del polinomio interpolatore;

   (b)
$$\lambda_n(x) \geq 1 \quad \forall n,$$
dove λ_n è la funzione di Lebesgue.

3. Assegnato l'integrale
$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x dx,$$
stimare il numero minimo di sottointervalli necessari per avere un errore in modulo minore di $2 \cdot 10^{-2}$ usando la formula del trapezio composita.

4. Scrivere la function MATLAB **eulimp1** che compie un passo del metodo di Eulero implicito per la soluzione numerica di una singola equazione differenziale del primo ordine facendo uso del metodo di Newton.

5. Assegnato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y_1'(t) = -5y_1(t) + 4y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) = -3y_1(t)y_2(t) + 2y_2(t) \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2, \end{cases}$$

   (a) eseguire un passo dello schema di Heun con $h = 0.5$;

   (b) scrivere (tutti) i comandi per approssimarne la soluzione al tempo $t = 2$, facendo uso del codice **heun** con $h = 0.5$.