Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
Docente S. Finzi Vita - A.A. 2012/13
Prova scritta del 19 Settembre 2013

1. Si consideri il seguente problema di trasporto lineare in $(0,2) \times (0,T)$

$$u_t + 3u_x = 0, \quad u(x,0) = (1-x^2)^+ (\ (\cdot)^+ = \text{parte positiva}), \quad u(0,t) = 1$$

   - Scrivere la soluzione esatta al tempo $t = 1/3$.
   - Scrivere lo schema di Lax-Friedrichs per il problema, giustificandone la formula, e richiamarne l'errore di consistenza e la condizione di stabilità in questo caso.
   - Discutere il trattamento dei nodi di bordo per lo schema.

2. Si consideri il problema di Neumann non omogeneo

$$-u'' + cu = f \text{ in } (0,1), \quad u'(0) = \alpha, \ u'(1) = \beta$$

   con $c > 0, \alpha, \beta$ costanti assegnate, $f \in C^0([0,1])$.

   Si scriva nei dettagli il sistema lineare risultante dalla discretizzazione del problema alle differenze finite mediante una partizione uniforme I_h di (0,1) con n nodi interni, differenze seconde centrate per u'' e differenze prime destra e sinistra per le condizioni al bordo.

3. Si consideri il problema di Dirichlet con condizioni non omogenee al bordo

$$-u'' = f \text{ in } (0,1), \quad u(0) = 1, \ u(1) = 3 \ .$$

   Scriverne la formulazione variazionale. Descrivere poi lo schema agli elementi finiti P_1 di Lagrange con nodi equispaziati risultante dall'applicazione del metodo di Galerkin, costruendo il sistema lineare che ne deriva (matrice dei coefficienti e vettore dei termini noti).

4. Si consideri il problema di Dirichlet ellittico a coefficienti variabili

$$-(\mu u')' + bu' + u = f \text{ in } \Omega = (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0 \ ,$$

   con $f \in L^2(\Omega)$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$, $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, $b \in C^1(\bar{\Omega})$.

   - Scrivere la formulazione variazionale del problema nello spazio di Sobolev $H^1_0(\Omega)$
   - Usando la disuguaglianza di Poincarè e l'identità $\int buu' = \frac{1}{2}\int b(u^2)'$, determinare una condizione su b' per cui siano soddisfatte tutte le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.
   - Nel caso a coefficienti costanti $\mu = 1$, $b = 100$, determinare la condizione su h affinchè una discretizzazione agli elementi finiti $P1$ del problema su di una mesh uniforme di passo h non produca oscillazioni spurie sulle soluzioni.

5. Si consideri il problema parabolico con condizioni di Neumann omogenee al bordo

$$\begin{cases} u_t - div(\mu \nabla u) = f & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \text{ in } \Omega, & \frac{\partial u}{\partial n}(\cdot,t) = 0 \text{ su } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

   dove $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$.

   - Scrivere la formulazione variazionale del problema continuo.
   - Mostrare che il problema è solo debolmente coercivo in $H^1(\Omega)$, e spiegare come con un cambio di variabili ci si possa comunque ricondurre a un problema fortemente coercivo.
   - Scrivere la semidiscretizzazione di Galerkin in spazio mediante elementi finiti e la sua corrispondente forma matriciale.