Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
Docente S. Finzi Vita - A.A. 2012/13
Prova scritta del 10 Settembre 2013

1. Si consideri il sistema iperbolico
$$\mathbf{u}_t(x,t) + A\mathbf{u}_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$
dove $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)$, e la matrice del sistema è
$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$
Riscrivere il sistema nelle sue variabili caratteristiche e scrivere per esso un possibile schema di approssimazione alle differenze finite consistente e stabile.

2. Si consideri il problema di Dirichlet non omogeneo
$$-u'' + u' = f \text{ in } (0,1), \quad u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta\ .$$
   - Introdotta una partizione uniforme I_h di (0,1) con passo $h = 1/N$ e nodi $x_j = jh$, si scriva per esteso il sistema lineare ottenuto discretizzando su I_h il problema con differenze finite centrate per entrambe le derivate, tenendo conto dei dati al bordo.
   - Si dimostri che la matrice del sistema ottenuto è definita positiva e a dominanza diagonale debole.

3. Si consideri il problema di Neumann con condizioni non omogenee al bordo
$$-u'' + u = 1 \text{ in } (0,1), \quad u'(0) = 1,\ u'(1) = 2\ .$$
Scriverne la formulazione variazionale corrispondente, verificando la validità delle ipotesi del Lemma di Lax-Milgram. Descrivere poi lo schema agli elementi finiti P_1 di Lagrange con nodi equispaziati necessario per risolvere il problema, costruendo esplicitamente per il sistema lineare risultante la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti.

4. Dimostrare che lo spazio V_h delle funzioni continue lineari a tratti sulla triangolazione uniforme di Courant del quadrato $\Omega = (0,1)^2$ di passo h è un sottospazio dello spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Giustificando la risposta, dire se viceversa, data una funzione $u \in H^1(\Omega)$, risulta sempre ben definita in V_h la sua interpolata lineare a tratti. Infine, data $u \in H^1(\Omega)$, si consideri la soluzione $u_h \in V_h$ del problema variazionale discreto
$$a(u_h, v_h) := \int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h + \int_\Omega u_h v_h = a(u, v_h), \quad \forall v_v \in V_h,$$
dimostrando che u_h è la proiezione ortogonale di u su V_h.

5. Si consideri il problema parabolico unidimensionale con condizioni di Neumann omogenee al bordo
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & \text{in } (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ in } (0,1), & u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \text{ in } (0,T) \end{cases}$$
Si scrivano:
   - la formulazione variazionale del problema continuo;
   - la relativa semidiscretizzazione di Galerkin in spazio mediante elementi finiti e la sua corrispondente forma matriciale, discutendo la scelta del dato iniziale approssimato;
   - il sistema di avanzamento in tempo ottenuto applicando poi il metodo di Crank-Nicolson.