Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente S. Finzi Vita - A.A. 2012/13

Prova scritta dell'8 Luglio 2013

1. Ricavare lo schema di Lax-Wendroff per l'equazione del trasporto lineare
$$u_t + cu_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x),$$
dove $c \in \mathbb{R}$, determinandone l'errore di consistenza. Richiamare poi le proprietà di stabilità dello schema e le sue caratteristiche di dissipazione e dispersione anche in rapporto alla equazione equivalente.

2. Si consideri il problema di Dirichlet non omogeneo
$$\begin{cases} -u'' = 1 & \text{in } (-1,1) \\ u(-1) = 2, \ \ u(1) = 0.5 \end{cases}$$
   - Dimostrare che la soluzione verifica $u(x) \geq 1/2$ per ogni $x \in [-1,1]$.
   - Scrivere per esteso il sistema lineare ottenuto discretizzando il problema con differenze finite centrate.
   - Scrivere la formulazione variazionale associata al problema soddisfacente le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

3. Dimostrare che la funzione $u(x) = |x| - 1$ è soluzione debole del problema
$$-u'' = -2\delta_0 \text{ in } (-1,1), \quad u(-1) = u(1) = 0$$
dove δ_0 indica la Dirac relativa al punto $x = 0$.
   - Precisare se tale soluzione appartiene allo spazio $H^2(-1,1)$.
   - Approssimando il problema col metodo di Galerkin, cosa si può dire riguardo alla convergenza del metodo degli elementi finiti P1?

4. Si considerino una triangolazione uniforme (di Courant) di passo h del quadrato $\Omega = (0,1)^2$, ed elementi finiti P1 di Lagrange su di essa. Calcolare esplicitamente la matrice di massa approssimata relativa alle funzioni base P1 nei nodi interni:
   - usando la formula di quadratura che usa solo i vertici dei triangoli;
   - usando la formula di quadratura che usa solo il baricentro dei triangoli ($\int_T f \simeq |T| f(b_T)$).

   Dimostrare poi che entrambe le formule precedenti sono esatte per polinomi P1.

5. Si consideri il problema parabolico unidimensionale con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & \text{in } (a,b) \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ in } (a,b), & u(a,t) = u(b,t) = 0 \text{ in } (0,T) \end{cases}$$
   - Partendo dalla sua formulazione variazionale, descrivere lo schema numerico che si ottiene usando elementi finiti P1 in spazio e il metodo di Eulero implicito in tempo.
   - Scrivere esplicitamente la matrice del sistema lineare e il vettore del termine noto del generico passo di avanzamento in tempo.
   - Richiamare le proprietà di consistenza e stabilità del metodo.