Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente S. Finzi Vita - A.A. 2012/13

Prova scritta del 19 Giugno 2013

1. Si consideri l'equazione del trasporto lineare in $(a, b) \times (0, T)$
$$u_t + cu_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$
dove $c \in \mathbb{R}$ e u_0 è una funzione a supporto compatto in (a, b). Fornire un esempio di schema alle differenze finite per ognuno dei casi seguenti:
1) consistente ma mai convergente
2) stabile ma non consistente
3) stabile ma non fortemente stabile
4) incondizionatamente fortemente stabile
precisando nel caso le ipotesi necessarie su c e sui passi di discretizzazione Δx e Δt.
Solo per l'ultimo caso fornire una dimostrazione per motivare la risposta.

2. Si consideri il problema ellittico
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{per } x \in Q \equiv [0, 1]^2 \\ u(x) = 0 & \text{per } x \in \partial Q \end{cases}$$
   - Scrivere lo schema a cinque punti definito su di una griglia uniforme di punti di Q e dimostrare la sua consistenza. Di che ordine è lo schema?
   - Dimostrare che lo schema verifica il principio di massimo discreto.

3. Si consideri il problema ellittico in 1D con condizioni miste al bordo :
$$-u'' = f \text{ in } (0, 1), \quad u(0) = 0,\ u'(1) = 1$$
   - Si scriva la formulazione variazionale corrispondente, precisando lo spazio V in cui si cerca la soluzione e verificando le ipotesi di Lax-Milgram rispetto alla norma dell'energia.
   - Dimostrare che la soluzione discreta $u_h \in V_h$ fornita da un metodo di Galerkin conforme coincide con la proiezione ortogonale di u sul sottospazio V_h.

4. Si consideri la risoluzione mediante elementi finiti P2 del problema ellittico unidimensionale con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo
$$-u'' = f \text{ in } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$
   - Descrivere gli elementi P2 relativi a una partizione uniforme e le relative funzioni base.
   - Richiamare l'ordine di convergenza atteso per il metodo.
   - Indicare la struttura della matrice di rigidità risultante e quale formula di quadratura è necessaria per calcolarla esattamente.

5. Si consideri il problema parabolico unidimensionale con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & \text{in } (a, b) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ in } (a, b), & u(a, t) = u(b, t) = 0 \text{ in } (0, T) \end{cases}$$
   - Partendo dalla sua formulazione variazionale, descrivere lo schema numerico che si ottiene usando elementi finiti P1 in spazio e il metodo di Crank-Nicolson in tempo.
   - Richiamare le proprietà di consistenza e stabilità del metodo e descrivere una possibile implementazione pratica dello schema di avanzamento in tempo.