Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente S. Finzi Vita - A.A. 2012/13

Prova in itinere dell'11 Giugno 2013

1. Si consideri un problema lineare ellittico del secondo ordine su di un dominio regolare Ω di $\mathbb{R}^2$ nella sua formulazione variazionale:

$$u \in V, \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

nelle ipotesi del Lemma di Lax-Milgram (con $V \subseteq H^1(\Omega)$ spazio di Hilbert), e la sua discretizzazione di Galerkin con Elementi Finiti triangolari di Lagrange e funzioni continue polinomiali a tratti (di grado k) su Ω. Discutere la convergenza del metodo in norma H^1 e L^2 in funzione di k e della regolarità della soluzione.

2. Descrivere l'elemento finito triangolare P2 di Lagrange in $\mathbb{R}^2$. In particolare:
   - dimostrare che una funzione P2 a tratti su di una triangolazione composta di elementi siffatti è necessariamente continua;
   - descrivere le funzioni di base locali del singolo elemento in funzione delle coordinate baricentriche relative ai tre vertici del triangolo;
   - scrivere una formula di quadratura sul triangolo che sia esatta per polinomi P2 e utilizzarla per integrare le funzioni base;
   - quanti e quali sono i gradi di libertà dell'elemento P2 di Lagrange in $\mathbb{R}^3$ (tetraedro)?

3. Si consideri il problema ellittico in 1D con condizioni omogenee di Dirichlet al bordo :

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + u' = 1 & \text{in } (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove ε denota una costante positiva (piccola).
   - Si scriva la formulazione variazionale corrispondente, e si costruisca esplicitamente il sistema lineare risultante dalla sua discretizzazione con elementi finiti P1 di Lagrange;
   - si calcolino le costanti di Péclet globali e locali, e si dica per quali valori del passo di discretizzazione h la soluzione numerica non presenterà oscillazioni.

4. Si consideri il problema parabolico unidimensionale con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & \text{in } (a, b) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ in } (a, b), & u(a, t) = u(b, t) = 0 \text{ in } (0, T) \end{cases}$$

   - Scrivere lo schema di Eulero esplicito usando differenze finite seconde centrate e dire sotto quale condizione si rivela assolutamente stabile;
   - scrivere la formulazione variazionale del problema;
   - mostrare come usando elementi finiti P1 in spazio e un teta-metodo in tempo si possa riottenere lo stesso schema del primo punto.