# **Metodi numerici per le EDP** (A.A. 2012/13)

## Esercizi per il Laboratorio (Foglio n.4)

### Problemi di diffusione/trasporto.

Scrivere un programma (in Matlab, Fortran, o C) in grado di fornire la soluzione numerica dell'equazione ellittica di diffusione-trasporto in una dimensione:

$$-\mu u'' + bu' = 0 \quad \text{in } \Omega = (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \tag{2}$$

dove $\mu, b$ sono costanti positive assegnate. Il programma dovrà richiedere in input le costanti $\mu, b$ e il numero di nodi equidistanti $n$ interni all'intervallo (quindi $h = 1/(n+1)$); dovrà fornire i numeri di Péclet globale e locale relativi al termine di trasporto

$$Pe = b/(2\mu), \quad Pe_h = (bh)/(2\mu).$$

Lo schema numerico userà la differenza seconda centrata (D) per $u''$ e, a scelta, la differenza prima centrata (TC) o quella upwind (TU) per $u'$. Il sistema lineare corrispondente può essere risolto con un metodo qualunque, diretto o iterativo, e l'output sarà un file contenente il vettore dei valori nodali della soluzione e il grafico corrispondente (direttamente in Matlab, o tramite Gnuplot per gli altri linguaggi) confrontato con quello della soluzione esatta.

Utilizzare il programma per affrontare il seguente problema 1) (e se possibile uno tra il 2) e il 3)):

1) (*simulazione*) confronto delle soluzioni relative a differenti numeri di Péclet e differenti valori di $h$ per i seguenti metodi:

- D+TC (= diff. finite centrate o el. finiti $P_1$ standard)
- D+TU (= d.f. upwind o e.f. con diffusione artificiale).

2) (*studio dell'errore*) confrontare gli errori di discretizzazione dei diversi schemi in funzione del parametro $h$ per una norma opportuna ($L^2$, $L^\infty$ o $H^1$).

3) (*Scharfetter-Gummel*) implementare lo schema di Scharfetter e Gummel per il problema di diffusione-trasporto, verificando che la soluzione numerica coincide nei nodi con quella esatta ("superconvergenza").

### Problemi parabolici.

Scrivere un programma in grado di fornire la soluzione numerica $u(x,t)$, con elementi finiti affini nello spazio e un $\theta$-metodo nel tempo, del seguente problema di Cauchy:

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{in } (a,b) \times (0,T), \tag{3}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } (a,b),$$

dove $f \in L^2(0,T;L^2(a,b))$, $u_0 \in L^2(a,b)$, accoppiata con condizioni al bordo omogenee di Dirichlet o Neumann. Utilizzare poi il programma per affrontare i seguenti problemi (il primo e almeno un altro dei restanti):

1) (*simulazione*) confronto della soluzione relativa a differenti dati $f$ e $u_0$ ; sforzarsi di predirne il comportamento prima di visualizzarla (come superficie $u(x,t)$ in $(a,b) \times (0,T)$ o con animazione in $(a,b)$ sovrapponendo i valori relativi a tempi successivi). Si può partire ad esempio dal caso $f = 0$ e $u_0 > 0$ per osservare che $u(.,t) \to 0$ per Dirichlet e $u(.,t) \to (\int u_0)/(b-a)$ per Neumann. Si osservi inoltre la proprietà di regolarizzazione di dati iniziali discontinui.

2) (*studio dell'errore*) concentrandosi su di un caso con soluzione esatta nota esplicitamente, studiare l'andamento degli errori di discretizzazione e le proprietà di stabilità in funzione dei parametri $h$, $\Delta t$ e $\theta$ per una norma opportuna, e confrontarle con quanto previsto dalla teoria.

3) (*schema esplicito*) studiare il caso $\theta = 0$ con la tecnica del *mass lumping* (Eulero esplicito), e confrontarne l'efficienza e l'onerosità con un metodo implicito stabile (Eulero backward o Crank-Nicolson).

4) (*Problema 2D*) Scrivere un programma per FreeFem++ in grado di risolvere l'equazione del calore

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

per opportune condizioni iniziali e al bordo, dove $\Omega$ è un dominio limitato di $\mathbb{R}^2$ definito tramite il suo bordo. Utilizzare elementi finiti P1 e P2 per la discretizzazione in spazio e un opportuno teta-metodo in tempo. Sviluppare il postprocessing dei risultati.

## Problemi parabolici 1D usabili per i test

$$u_t - u_{xx} = f \;\; \text{in} \;\; (a,b)$$

1. **Dirichlet omogeneo**: $u(a,t) = u(b,t) = 0$
   $(a,b) = (0,\pi)$, $u_0(x) = \sin(x)$, $f \equiv 0$
   $\Rightarrow \quad u(x,t) = e^{-t}\sin(x) \to 0$ per $t \to \infty$

2. **Neumann omogeneo**: $u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$
   $(a,b) = (0,\pi)$, $u_0(x) = 1 + \cos(x)$, $f \equiv 0$
   $\Rightarrow \quad u(x,t) = 1 + e^{-t}\cos(x) \to 1$ per $t \to \infty$