Metodi numerici per le EDP (A.A. 2012/13)

Esercizi per il Laboratorio (Foglio n.3)

Problemi ellittici bidimensionali.

Scrivere un programma (in Matlab, Fortran, o C) in grado di fornire la soluzione numerica dell'equazione ellittica in due dimensioni:

$$-\Delta u + cu = f \qquad \text{in } \Omega = (a,b) \times (a,b), \tag{1}$$

dove c è una costante non negativa assegnata e $f \in L^2(\Omega)$, con almeno una delle seguenti condizioni al bordo omogenee:

$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (Dirichlet) \tag{D}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (Neumann) \tag{N}$$

$$u = 0 \quad \text{su } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \Gamma_N, \quad \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N. \quad (Misto) \tag{M}$$

Si può pensare ad uno schema alle differenze finite (formula dei 5 punti per il Laplaciano) o ad uno schema agli elementi finiti affini sulla mesh uniforme di Courant: in entrambi i casi il programma dovrà richiedere in input la costante c (non nulla nel caso (N)), gli estremi dell'intervallo (a,b) e il numero di nodi equidistanti n interni ad esso (quindi $h = (b-a)/(n+1)$, il numero totale dei nodi interni ad Ω sarà n^2, e quello comprendente anche i nodi di frontiera $(n+2)^2$) ; una function fornirà il termine noto f (o meglio diverse scelte preinserite) e il programma conterrà al suo interno le matrici di rigidità e massa corrispondenti alle diverse condizioni al contorno. Il sistema lineare può essere risolto con un metodo qualunque, diretto o iterativo, e l'output sarà un file contenente il vettore dei valori nodali della soluzione e il grafico della superficie corrispondente (direttamente in Matlab, o tramite Gnuplot per gli altri linguaggi).

Utilizzare poi il programma per affrontare alcuni dei seguenti problemi (almeno il primo e il sesto, più un altro a scelta, diverso da quello già scelto nel caso unidimensionale):

1) (*simulazione*) confronto della soluzione relativa a differenti termini noti e a differenti valori di c ; sforzarsi di predirne il comportamento prima di visualizzarla. In particolare provare anche casi di f non continue (ad es. costanti a tratti o concentrate in sottoinsiemi di Ω). Osservare anche la validità del principio del massimo, attraverso proprietà di segno e di ordinamento delle soluzioni, e l'effetto del termine di reazione al crescere di c.

2) (*studio dell'errore*) concentrandosi su di un problema di Dirichlet con soluzione esatta nota esplicitamente [idea: partire da una funzione $u(x,y)$ che si annulli al bordo, applicarci l'operatore differenziale e ricavare il termine noto f da inserire; in alternativa usare uno degli esempi alla pagina seguente], studiare l'andamento degli errori di discretizzazione in funzione del parametro h per una norma opportuna (L^2, L^∞ o H^1) usando le formule 2D della Scheda n.2, e confrontarlo con le stime a priori previste dalla teoria.

3) (*formule di quadratura*) come appendice al problema 2), valutare gli effetti sull'errore di discretizzazione delle diverse formule di quadratura sui triangoli usate per la costruzione del sistema lineare: formula dei punti medi invece che dei vertici per il termine noto, il viceversa per la matrice di massa (che diviene così diagonale, tecnica del *mass lumping*).

4) (*condizionamento della matrice di rigidità*) usando un metodo iterativo per la risoluzione del problema (1)-(D), se ne studi la velocità di convergenza al variare del passo di discretizzazione h, in termini cioè del numero di iterazioni necessarie a parità di precisione richiesta. Scrivere poi un piccolo programma Matlab in grado di calcolare il numero di condizionamento della matrice di rigidità in funzione di h (usare le apposite routines di Matlab) e confrontare i risultati con la teoria.

5) (*caso non simmetrico*) modificare il programma iniziale aggiungendo un termine di trasporto all'equazione

$$-\Delta u + p \cdot \nabla u + cu = f,$$

dove $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\cdot$ indica l'operatore di prodotto scalare tra vettori (occorre calcolare le matrici dei prodotti scalari $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}, \phi_j)$); studiare poi il comportamento delle soluzioni per diverse scelte di p (fare particolare attenzione al caso in cui il termine di trasporto è dominante).

6) (*uso di FreeFem++*) Scrivere un programma per FreeFem++ in grado di risolvere il problema (1) (D) su di un dominio convesso Ω del piano definito a partire dal suo bordo (può essere un cerchio, un'ellisse, un dominio a elle, o altro). Utilizzare elementi finiti P1 e P2, confrontando le soluzioni. Modificare poi le condizioni al bordo (D, N o miste), omogenee e non.

Problemi 2D con condizioni di Dirichlet omogenee usabili per i test

$$-\Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ su } \ \partial\Omega$$

- $\Omega = (0,1)^2$, $f(x,y) = 2[x(1-x) + y(1-y)] \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = xy(1-x)(1-y)$
- $\Omega = (0,\pi)^2$, $f(x,y) = 2\sin(x)\sin(y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \sin(x)\sin(y)$