Metodi numerici per le EDP (A.A. 2012/13)

Scheda n.2

Esempi di norme nel discreto

1D. Sia $u(x)$ la soluzione di un problema ellittico sull'intervallo (a,b) con dato nullo di Dirichlet al bordo e termine noto f, sia $u_h(x)$ la soluzione approssimata ottenuta risolvendo il problema discreto associato, per esempio con elementi finiti affini, su di una partizione di (a,b) con nodi interni $x_i,\ i=1,...,N$ (dove $h=\frac{b-a}{N+1},\ x_0=a,\ x_{N+1}=b$). Allora, posto

$$u_h(x)=\sum_{i=1}^{N} U_i\phi_i(x),$$

si possono definire diverse norme discrete per valutare l'errore di discretizzazione. Le stesse formule possono essere ovviamente usate per valutare l'errore generato da un metodo alle differenze finite, se pensiamo ad u_h come al vettore dei valori nodali $\{U_i\}_i$ ottenuti dallo schema. Nel caso di altre condizioni al contorno infine, le formule vanno opportunamente corrette.

I) *Norma L^∞.* Direttamente:

$$\|u-u_h\|_\infty=\max_{i=1,\dots,N}|u(x_i)-U_i|\ ; \tag{1}$$

II) *Norme L^p.* Si ottengono dalla formula dei trapezi ripetuta applicata alle norme L^p esatte su (a,b). Ad esempio per $p=1$ e $p=2$ rispettivamente:

$$\|u-u_h\|_1=h\sum_{i=1}^{N}|u(x_i)-U_i|\ ; \tag{2}$$

$$\|u-u_h\|_2=\sqrt{h\sum_{i=1}^{N}(u(x_i)-U_i)^2}\ ; \tag{3}$$

III) *Norma H^1_0 (o seminorma H^1).* Si tratta di calcolare la norma L^2 della differenza tra la derivata della soluzione esatta e quella di u_h. Quest'ultima è ovviamente costante su ogni intervallo (x_{i-1},x_i))(dove vale $\frac{U_i-U_{i-1}}{h}$). Questa volta la formula dei trapezi non è adeguata: l'uso di una formula di grado troppo basso produce fenomeni di cancellazione che potrebbero dare l'impressione di una superconvergenza rispetto alla teoria (provare !). Va meglio la formula di Simpson, che dà in questo caso:

$$|u-u_h|_{1,2}=\sqrt{\frac{h}{6}\sum_{i=1}^{N+1}[(u'(x_{i-1})-D_i)^2+4(u'(x_{i-\frac{1}{2}})-D_i)^2+(u'(x_i)-D_i))^2]}\ , \tag{4}$$

dove si è posto $D_i=\frac{U(i)-U(i-1)}{h}$.

IV) *Norma dell'energia.* Se la forma è simmetrica, allora

$$\|u-u_h\|_V^2=a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u)=\int_a^b f(u-u_h)\,dx\ ;$$

questo suggerisce di prendere come norma discreta dell'energia la radice quadrata dell'integrale precedente opportunamente approssimato. Attenzione che quest'ultimo nel discreto può diventare però negativo (anche se l'integrale esatto non lo è), per cui ne va preso il valore assoluto. Sulla scelta della formula di quadratura valgono le considerazioni del punto precedente; per esempio, l'uso della formula di Simpson dà:

$$\|u-u_h\|_V = \sqrt{\frac{h}{3}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)(u(x_i)-U_i) + \frac{2h}{3}\sum_{i=0}^{N} f(x_{i+\frac{1}{2}})(u(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{U_i+U_{i+1}}{2})} \ . \tag{5}$$

Verificare anche in questo caso che una formula meno precisa, ad esempio quella dei trapezi ($\|u-u_h\|_V = \sqrt{h\sum_{i=1}^{N} f(x_i)(u(x_i)-U_i)}$), non darebbe un'ordine dell'errore corrispondente a quello teorico.

Ovviamente per la coercitività della forma bilineare, segue anche la stima per la norma H^1:

$$\|u-u_h\|_{1,2} \le \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|u-u_h\|_V \ .$$

Tutte queste formule riguardano l'errore assoluto; è spesso molto più utile considerare però l'errore relativo, che meglio dà l'idea del numero di cifre significative esatte ottenute con la soluzione approssimata. Supponendo u non nulla, è quindi sufficiente considerare per ognuna delle norme precedenti il rapporto

$$\frac{\|u-u_h\|}{\|u\|} \ .$$

2D. Sul quadrato $Q=(a,b)\times(a,b)$ reticolato con $N\times N$ nodi interni equispaziati, sempre nel caso di problema di Dirichlet omogeneo, possiamo usare

I) *Norma L^∞.*

$$\|u-u_h\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N^2} |u(x_i)-U_i| \ ; \tag{6}$$

II) *Norma L^2.*

$$\|u-u_h\|_2 = h\sqrt{\sum_{i=1}^{N^2}(u(x_i)-U_i)^2} \ ; \tag{7}$$

III) *Norma dell'energia.*(Con osservazioni analoghe a quelle del caso 1D)

$$\|u-u_h\|_V = h\sqrt{\sum_{i=1}^{N^2} f(x_i)(u(x_i)-U_i)} \ . \tag{8}$$

Per ottenere le ultime due formule è sufficiente usare su ogni triangolo in cui resta suddiviso Q con la reticolazione di Courant la formula di quadratura definita sui tre vertici e poi sommare i (sei) contributi relativi ad ogni nodo interno (sul bordo sono nulli !).