Metodi numerici per le EDP (A.A. 2012/13)

Esercizi d'esame sulla I parte del corso

1. Usando l'analisi di Von Neumann, ricavare il coefficiente di amplificazione del metodo upwind per l'equazione del trasporto lineare e dimostrare che tale metodo è fortemente stabile sotto la condizione CFL.

2. Descrivere lo schema di Eulero implicito backward per l'equazione del trasporto, il suo ordine di consistenza e i dettagli della sua implementazione.

3. Giustificare la seguente approssimazione della derivata prima di $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supponendo che la funzione sia sufficientemente regolare
$$Du(x_i) \approx \frac{1}{12\Delta x}(-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}),$$
e determinarne l'ordine di consistenza.

4. Si consideri la seguente approssimazione alle differenze per l'operatore di Laplace:
$$\Delta u(x,y) \approx h^{-2} \sum_{i,j\in\{-1,0,1\}} c_{i,j}\, u(x+ih, y+jh)$$
Disegnare lo stencil del metodo. Supponiamo che i coefficienti $c_{0,0} = \alpha$, $c_{-1,0} = c_{1,0} = c_{0,-1} = c_{0,1} = \beta$ e $c_{1,1} = c_{1,-1} = c_{-1,-1} = c_{-1,1} = \gamma$. Sotto quali condizioni su α, β e γ lo schema è consistente del secondo ordine? Le condizioni sono soddisfatte per lo schema a 5 punti?

5. Si consideri il problema di Dirichlet non omogeneo
$$\begin{cases} -u'' = f & \text{in } (-1,1) \\ u(-1) = 1, & u(1) = 2 \end{cases}$$
con f funzione continua e positiva in $\Omega = (-1,1)$.
a. Dimostrare che la soluzione verifica $u(x) \geq 1$ in tutto Ω.
b. Scrivere il sistema lineare ottenuto utilizzando lo schema alle differenze finite centrato.
c. Dimostrare che la matrice del sistema è definita positiva.

6. Si consideri la funzione $f(x) = 1 - |x|$ nell'intervallo $\Omega = (-1,1)$; mostrare che la sua derivata prima nel senso delle distribuzioni è data da
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ -1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
e calcolare la norma $H^1(0,1)$ di f. Che forma avrà la sua derivata seconda (sempre n.s.d.d.)? Vale $f \in H^2(\Omega)$?

7. Si consideri il problema di Dirichlet con condizioni miste omogenee al bordo
$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{in } (0,1) \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$
dove c è una costante non negativa e $f \in L^2(0,1)$. Se ne scriva la formulazione variazionale opportuna verificando l'applicabilità del Lemma di Lax-Milgram in questo caso. Si costruisca poi esplicitamente il sistema lineare risultante dall'applicazione del metodo di Galerkin con elementi finiti $\mathbb{P}_1$ di Lagrange su di una griglia uniforme (usando il metodo dei trapezi per il calcolo approssimato degli integrali).