Metodi numerici per le EDP (A.A. 2012/13)

Esercizi per il Laboratorio (Foglio n.2)

Problemi ellittici unidimensionali

Scrivere un programma (in Matlab, Fortran, o C) in grado di fornire la soluzione numerica dell'equazione ellittica in una dimensione:

$$-u'' + cu = f \quad \text{in } \Omega = (a, b), \tag{1}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante non negativa assegnata e $f \in L^2(\Omega)$, con una delle seguenti condizioni al bordo omogenee:

$$Dirichlet: \quad u(a) = u(b) = 0, \tag{D}$$

$$Neumann: \quad u'(a) = u'(b) = 0, \tag{N}$$

$$Mista: \quad u(a) = u'(b) = 0. \tag{M}$$

Si può pensare ad uno schema alle differenze finite (con la differenza seconda centrata) o ad uno schema agli elementi finiti affini: in entrambi i casi il programma dovrà richiedere in input la costante c (non nulla nel caso (N)), gli estremi dell'intervallo (a, b) e il numero di nodi equidistanti n interni ad esso; una function fornirà il termine noto f (o meglio diverse scelte preinserite) e il programma conterrà al suo interno le matrici di rigidità e massa corrispondenti alle diverse condizioni al contorno. Il sistema lineare può essere risolto con un metodo diretto (ad esempio Cholesky) o iterativo (Jacobi o Gauss-Seidel), e l'output sarà un file contenente il vettore dei valori nodali della soluzione e il grafico corrispondente (direttamente in Matlab, o tramite Gnuplot per gli altri linguaggi).

Utilizzare poi il programma per affrontare alcuni dei seguenti problemi (almeno i primi due, più un altro a scelta):

1) (*simulazione*) Confronto della soluzione relativa a differenti termini noti e a differenti valori di c ; sforzarsi di predirne il comportamento prima di visualizzarla. In particolare provare anche casi di f non continue (ad es. costanti a tratti o concentrate in sottoinsiemi di (a, b)). Osservare anche la validità del principio del massimo, attraverso proprietà di segno e di ordinamento delle soluzioni, e l'effetto del termine di reazione al crescere di c.

2) (*studio dell'errore*) Concentrandosi su di un caso con soluzione esatta nota esplicitamente, studiare l'andamento degli errori di discretizzazione in funzione del parametro h per una norma opportuna (L^2, L^∞ o H^1, v. Scheda n.2), e confrontarlo con le stime a priori previste dalla teoria.

3) (*problemi non omogenei*) Modificare il programma per trattare anche condizioni al bordo non omogenee (di Dirichlet o Neumann).

4) (*elementi quadratici*) Introdurre le matrici relative agli elementi finiti quadratici e confrontare le soluzioni corrispondenti con quelle ottenute con gli elementi affini.

5) (*formule di quadratura*) Come appendice al problema 2), valutare gli effetti sull'errore di discretizzazione delle diverse formule di quadratura usate per la costruzione

del sistema lineare nel metodo degli elementi finiti: Simpson invece dei trapezi per il termine noto, trapezi invece di Simpson per la matrice di massa (che diviene così diagonale, tecnica del *mass lumping*).

6) (*coefficienti variabili*) Modificare le matrici di rigidità e massa degli elementi finiti affini per risolvere problemi al contorno per l'equazione a coefficienti variabili

$$-(\alpha(x)u')' + c(x)u = f \quad \text{in } \Omega = (a, b),$$

con $\alpha, c \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, $c(x) \geq c_0 > 0$ in Ω. (Idea: in ogni intervallo assumere tali coefficienti uguali al loro valore nel punto medio).

7) (*boundary layer*) Studiare il comportamento delle soluzioni del problema:

$$-\varepsilon u'' + u = f$$

con la condizione al bordo (D) al decrescere della costante ε a zero, per termini noti f non nulli sul bordo; ad es., per $f \equiv 1$ si può determinare la soluzione esatta in funzione di ε e valutare quindi l'andamento dell'errore; introdurre contromisure (griglie infittite o non uniformi) per mantenere in tutti i casi la stessa precisione.

Alcuni esempi da usare come possibili test

Si consideri il problema ellittico

$$-u'' + u = f \quad \text{in} \quad (a, b).$$

Per ognuno dei seguenti esempi sono indicati i dati (estremi dell'intervallo, termine noto) e la soluzione esatta. Ovviamente è sempre possibile costruire altri esempi partendo da funzioni che soddisfino le condizioni al bordo richieste, applicandoci l'operatore differenziale e ricavando il termine noto da assegnare all'equazione.

Problemi con condizioni di Dirichlet omogenee $(u(a) = u(b) = 0)$

- $(a, b) = (0, 1)$, $f(x) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = 1 - \frac{e^x + e^{1-x}}{1+e}$
- $(a, b) = (0, \pi)$, $f(x) = 2\sin(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \sin(x)$
- $(a, b) = (-1, 1)$, $f(x) = 1 - |x| + 2\delta_0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = 1 - |x|$

Un problema con condizioni di Neumann omogenee $(u'(a) = u'(b) = 0)$

- $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$, $f(x) = 2\sin(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \sin(x)$

Un problema con condizioni miste omogenee $(u(a) = u'(b) = 0)$

- $(a, b) = (-1, 0)$, $f(x) = x^3 - 6x + 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x^3 + 1$