Metodi numerici per le EDP (A.A. 2012/13)

Esercizi per il Laboratorio (Foglio n.1)

Equazioni iperboliche lineari

Scrivere un programma in Matlab (oppure in Fortran o C) in grado di fornire la soluzione numerica del problema di trasporto scalare in una dimensione:

$$u_t + cu_x = 0 \text{ in } (a,b) \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ in } (a,b), \tag{2}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante assegnata e $u_0 \in L^2(a,b)$ è un dato iniziale a supporto compatto in (a,b) (per es. un tratto di sinusoide o un'onda quadra).

Una function fornirà il dato iniziale u_0 (o meglio diverse scelte preinserite); il programma principale dovrà richiedere in input la costante c, gli estremi a, b, T (da scegliere in modo che la soluzione esatta $u(x,t) = u_0(x - ct)$ non esca dal dominio), e i passi di discretizzazione in spazio e tempo, Δx e Δt, calcolare la condizione CFL, e permettere la scelta di un metodo alle differenze finite tra (almeno) i seguenti:
1) Upwind
2) Lax-Friedrichs
3) Lax-Wendroff

L'output sarà dato dalla matrice dei valori $U(x_i, t_n)$ nei nodi della griglia, graficabile come superficie in $\mathbb{R}^3$ o come animazione in $\mathbb{R}^2$ a confronto con la soluzione esatta (può bastare il confronto al solo tempo finale).

Utilizzare poi il programma base per affrontare i seguenti problemi:

1) (*simulazione*) confronto della soluzione fornita dai differenti metodi per diversi valori della CFL e diverse scelte del dato iniziale (derivabile, continuo o discontinuo). Osservare i fenomeni di instabilità, dissipazione e dispersione analizzati a lezione; a CFL fissata verificare la convergenza dei metodi per Δx che tende a zero.

2) (*studio dell'errore*) concentrandosi su esempi particolari, al variare della CFL, studiare numericamente l'andamento dell'errore di discretizzazione dei diversi metodi in funzione di Δx nelle norme L^2 e L^∞, e confrontarlo con le stime a priori previste dalla teoria. Riportare i risultati in una tabella e/o in un grafico (con in ascissa il passo o il numero dei nodi ed in ordinata l'errore, meglio se in scala logaritmica). Osservare come cambia l'ordine dei metodi in funzione della regolarità del dato iniziale.

3) (*problema al contorno*) modificare il programma in modo che possa trattare la presenza di condizioni al bordo $u(a,t) = g_1(t)$ o $u(b,t) = g_2(t)$ sulla frontiera di *inflow*. Applicare il programma allo studio del problema di Riemann (dove $u_0(x) = 1$ per $a \leq x \leq a + \delta$ ed è nulla altrove, mentre $c > 0$).

4) (*schemi di Eulero impliciti*) aggiungere al programma iniziale uno schema implicito di Eulero (centrato o no), che richiede ad ogni passo temporale la risoluzione di un sistema lineare per una matrice tridiagonale; confrontarne gli effetti dissipativi rispetto al corrispondente problema esplicito; pensare ad un'implementazione "economica" e confrontare costi e benefici rispetto agli altri metodi.

5) (*equazione delle onde*) scrivere un programma per la risoluzione numerica dell'equazione della corda vibrante fissata agli estremi:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{in } (a,b) \times (0,T) \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\ ,\ u_t(x,0) = v_0(x) \quad \text{in } (a,b) \tag{4}$$

$$u(a,t) = u(b,t) = 0 \quad \text{in } (0,T) \tag{5}$$

mediante almeno uno dei tre approcci discussi a lezione:
i) schema esplicito a due passi;
ii) trasformazione del problema in un sistema di due equazioni lineari del trasporto risolto poi con uno schema esplicito vettoriale;
iii) come ii) ma risolvendo separatamente i due problemi scalari disaccoppiati ottenuti per diagonalizzazione del sistema e ricostruendo poi la soluzione.

Per i test si può considerare l'esempio: $(a,b) = (0,1)$, $c = 1$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$, $v_0(x) = 0$, che ha soluzione esatta $u(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(\pi(x-t)) + \sin(\pi(x+t))$.