CAPITOLO 2 LO SPETTRO E GLI SCHEMI

versione del (7-5-2002)

Lo spettro primo

Vi è una costruzione molto generale di spettro, lo spettro degli ideali primi.

Per un anello commutativo A qualunque l'insieme degli ideali primi

$$Spec(A) := \{P \subset A| \quad P \quad \text{ideale primo in} \quad A\},$$

è detto *spettro di A.*

Anche su $Spec(A)$ possiamo definire la topologia di Zariski.

Dato $S \subset A$ poniamo

$$V(S) := \{P \in Spec(A)|\ S \subset P\}.$$

È facile verificare, come nel caso delle varietà, che gli insiemi $V(S)$ formano i chiusi di una topologia, la *topologia di Zariski.* Si ha

$$1)\ V(0) = Spec(A),\ 2)\ V(A) = \emptyset,\ 3)\ V(\cup_i S_i) = \cap_i V(S_i),\ 4)\ V(S) \cap V(T) = V(ST).$$

Verifichiamo 4). Per definizione $ST := \{st|s \in S,\ t \in T\}$, verifichiamo che, un ideale primo P contiene gli elementi ST se e solo se contiene tutti gli S o tutti i T.

Se $ST \subset P$ e $t \in T,\ t \notin P$ si ha $st \in P, \forall s \in S$ quindi essendo P primo $S \subset P$.

Se $f : A \to B$ è un omomorfismo di anelli e P è un ideale primo si ha che $A/f^{-1}P \subset B/P$ e quindi $f^{-1}(P)$ è un ideale primo di A. L'applicazione indotta $f^* : Spec(B) \to Spec(A),\ f^*(P) := f^{-1}(P)$ è continua per le rispettive topologie di Zariski in quanto $(f^*)^{-1}(V(S)) = V(f(S))$.

In effetti la teoria ha bisogno di essere inquadrata in modo più completo definendo il *fascio* di anelli sullo spettro.

1 Prefasci e fasci

Dato uno spazio topologico X consideriamo l'insieme $\mathcal{T}$, parzialmente ordinato per inclusione, dei suoi aperti.

Un insieme parzialmente ordinato si può pensare come una categoria, quindi consideriamo proprio $\mathcal{T}$ come categoria e definiamo

1.1 Definizione. *Un prefascio su X a valori in una categoria $\mathcal{A}$ è un funtore controvariante $P : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$.*

La categoria dei prefasci è la categoria di tali funtori dove, come morfismi si prendono le trasformazioni naturali.

Nel linguaggio dei prefasci l'oggetto (insieme, gruppo, anello ecc.) $P(U)$ si chiama: *sezioni del prefascio P sull'aperto U.* Spesso si scrive anche

$$P(U) := \Gamma(U, P).$$

Dati due aperti $V \subset U$ il morfismo indotto $i_V^U : P(U) \to P(V)$ (dato dall'assioma di funtore) si chiama: *morfismo di restrizione delle sezioni, da U a V.*

Spesso indicheremo la restrizione con la seguente notazione:

$$i_V^U(s) := s|_V$$

La ragione di questo linguaggio sarà chiara dagli esempi.

I fasci su X si definiscono come particolari prefasci, l'idea fondamentale è che, in un fascio, le sezioni su un aperto U sono determinate *localmente.* In termini espliciti un prefascio P si dice un fascio se e solo se soddisfa i seguenti due assiomi.

F1 Dato comunque un ricoprimento aperto $U = \cup_i U_i$ e due sezioni $s, t \in P(U)$ se:

$$s|_{U_i} = t|_{U_i}, \ \forall i \quad \text{si ha} \quad s = t.$$

F2 Dato un ricoprimento aperto $U = \cup_i U_i$ e sezioni $s_i \in P(_i)$, $\forall i$ se si ha che:

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}, \ \forall i, j$$

allora esiste una sezione $s \in P(U)$ con $s|_{U_i} = s_i$, $\forall i$.

Si noti che, dall'assioma F1, la sezione richiesta da F2 è anche unica.

Nel caso di fasci di gruppi abeliani (o moduli o anelli) la F1 si usa riscrivere come

F1' Dato comunque un ricoprimento aperto $U = \cup_i U_i$ e una sezione $s \in P(U)$ se $s|_{U_i} = 0$, $\forall i$ si ha $s = 0$.

È anche conveniente riformulare i precedenti assiomi in una forma piú adatta all'approccio categorico.

Formuliamola ad esmpio per fasci di insiemi o di gruppi. Dato un ricoprimento $U = \cup_i U_i$ considerimo i due prodotti $\prod_{i\in I} P(U_i), \ \prod_{i,j\in I} P(U_i \cap U_j)$.

Abbiamo morfismi:

(1.2)
$$P(U) \xrightarrow{j} \prod_{i\in I} P(U_i) \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} P(U_i \cap U_j)$$

Dove $j : P(U) \to \prod_{i\in I} P(U_i)$ ha coordinate $s \to i^U_{U_i} s = s|_{U_i}$, i_1, i_2 hanno coordinata in $P(U_i \cap U_j$ le mappe

$$i_1 : (s_k)_{k\in I} \to i^{U_i}_{U_i\cap U_j} s_i = s_i|_{U_i\cap U_j}, \quad i_2 : (s_k)_{k\in I} \to i^{U_j}_{U_i\cap U_j} s_j = s_j|_{U_i\cap U_j}$$

Gli assiomi F1,F2 si riformulano dicendo che la successione 1.2 è una *successione esatta di insiemi* ovvero tramite j l'insieme $P(U)$ si identifica al sottoinsieme di $\prod_{i\in I} P(U_i)$ in cuio le due appe i_1, i_2 coincidono.

Si osservi che, nel caso il prefascio sia a valori gruppi abeliani (o in una categoria abeliana) la 1.2 si riformula come successione esatta di gruppi abeliani:

(1.3)
$$0 \longrightarrow P(U) \xrightarrow{j} \prod_{i\in I} P(U_i) \xrightarrow{i_1 - i_2} \prod_{i,j\in I} P(U_i \cap U_j)$$

2 Un esempio fondamentale.

OSSERVAZIONE Dato un insieme $S \subset A$ sia $I_S := \{\sum a_i s_i | a_i \in A, \ s_i \in S\}$ l'ideale da esso generato e $\sqrt{I_S} := \{a \in A | \exists \ k, \ a^k \in I_S\}$ il suo radicale, allora:

$$V(S) = V(I_S) = V(\sqrt{I_S}).$$

Da 4.10 vale il viceversa $\qquad \sqrt{I_S} = \cap_{P\in V(S)} P.$

Poniamo $U_S := Spec(A) - V(S)$ l'aperto corrispondente. In particolare se $f \in A$ abbiamo l'aperto $U_f := \{P | f \notin P\}$.

Definiamo inoltre l'anello $A[1/f]$, in cui f viene invertito come:

$$A[1/f] := A[x]/(xf - 1).$$

2.1 LEMMA.

(1) *Gli aperti* U_f *sono una base della topologia di Zariski, detti aperti affini basici,* $U_f \cap U_g = U_{fg}$.

(2) U_f *è omeomorfo a* $Spec(A[1/f])$.

(3) *Si ha* $\cup_i U_{f_i} = Spec(A)$ *è un ricoprimento, se e solo se gli elementi* f_i *generano* A *come ideale, in questo caso si può scrivere (riordinando gli indici)* $1 = \sum_{i=1}^k a_i f_i$ *e quindi* $\cup_{i=1}^k U_{f_i} = Spec(A)$ *(compattezza).*

(4) $U_f \subset U_g$ *se e solo se la immagine* $\overline{g}$ *di* g *è invertibile in* $A[1/f]$.

(5) *Per ogni* f, h *si ha* $U_f \supset U_{fh}$. *Se* $U_f \subset U_g$ *allora* $U_f = U_{fg}$*, in particolare* $U_f = U_{f^k}$, $\forall k > 0$.

DIM. 1) $U_S = \cup_{s\in S} U_s$, $U_s \cap U_t = U_{st}$.

2) L'applicazione $i : A \to A[1/f]$ induce una applicazione continua:

$$i^* : Spec(A[1/f]) \to Spec(A), \qquad i^*(P) := i^{-1}(P).$$

Per costruzione $A/i^*(P) \subset A[1/f]/P$, poiché f è invertibile in $A[1/f]/P$ deve essere $f \neq 0$ in $A/i^*(P)$ e quindi i^* ha immagine in U_f. D'altra parte, se P è un ideale primo di A e $f \notin P$ allora A/P è un dominio, la classe $\overline{f} \in A/P$ è non nulla e quindi A/P si immerge in $A/P[1/f]$. Segue facilmente che il nucleo del morfismo $A[1/f] \to A/P[1/\overline{f}]$ è l'ideale $PA[1/f]$ e che $PA[1/f] \cap A = P$. Si verifica facilmente ora che $P \to PA[1/f]$ stabilisce una applicazione continua $U_f \to Spec(A[1/f])$ inversa a i^* e quindi la seconda parte del Lemma.

3) Dalle osservazioni precedenti $\cap_i V_{f_i} = V(I)$ dove I è l'ideale generato dagli elementi f_i. Se I è un ideale proprio per il Lemma di Zorn è contenuto in un ideale massimale M e quindi $M \in \cap_i V_{f_i} \neq \emptyset$ il viceversa è anche chiaro.

4) Se $\overline{g}$ è invertibile in $A[1/f]$ abbiamo dalla proprietà universale una fattorizzazione: $A \to A[1/g] \to A[1/f]$ e quindi l'inclusione $Spec(A[1/f]) \to Spec(A)$ si fattorizza tramite $Spec(A[1/g])$.

Viceversa se $U_f \subset U_g$ dato comunque un ideale primo P di U_f si ha che P proviene da unideale primo Q di A in U_g ovvero $g \notin Q$. Poiché $A/Q \subset A[1/f]/P$ si ha che $\overline{g} \notin P$. Un elemento s di un anello A è invertibile se e solo se non è contenuto in nessun ideale massimale, quindi $\overline{g}$ è invertibile.

5) Segue da 1). □

Vogliamo ora definire un fascio di $\mathcal{A}$ anelli su $Spec(A)$, dalle osservazioni fatte basta definirlo sugli aperti basici, poniamo dunque:

$$\mathcal{A}(U_f) = \Gamma(U_f, \mathcal{A}) := A[1/f].$$

Dobbiamo provare che la definizione è ben posta, ossia $U_f = U_g$ implica $A[1/f] = A[1/g]$.

Definire se $U_f \subset U_g$ il morfismo di restrizione $A[1/g] \to A[1/f]$.

Verificare che soddisfano gli assiomi F1, F2.

Abbiamo visto che se $U_f \subset U_g$ allora g è invertibile in $A[1/f]$ da cui il morfismo $A[1/g] \to A[1/f]$ che è la restrizione richiesta.

Questo prova anche che $U_f = U_g$ implica $A[1/f] = A[1/g]$.

Dobbiamo verificare gli assiomi, dato che $U_f = Spec(A[1/f])$ basta verificarli per un ricoprimento di $Spec(A)$, che possiamo supporre finito $\cup_{i=1}^k U_{f_i} = Spec(A)$.

Bisogna provare che:
F1') Dato un elemento $a \in A$, se $a = 0 \in A[1/f_i]$ per ogni i allora $a = 0$.

La condizione data vuol dire che, per ogni i esiste una potenza k (che possiamo prendere uguale per tutti) per cui $f_i^k a = 0$.

Per ipotesi gli elementi f_i generano A come ideale e quindi anche le potenze f_i^k generano A come ideale quindi esistono elementi c_i con $1 = \sum c_i f_i^k$ da cui $a = \sum c_i f_i^k a = 0$.

F2) dati elementi $a_i/f_i^k \in A[1/f_i]$ tali che, per ogni i, j si ha $a_i/f_i^k = a_j/f_j^k \in A[1/f_i f_j]$ dobbiamo provare che esiste un $a \in A$ con $a = a_i/f_i^k \in A[1/f_i]$, $\forall i$.

Ora $a_i/f_i^k = a_j/f_j^k \in A[1/f_i f_j]$ se e solo se $a_i f_j^k = a_j f_i^k \in A[1/f_i f_j]$ se e solo se esiste un intero s per cui

$$(f_i f_j)^s a_i f_j^k = (f_i f_j)^s a_j f_i^k \in A, \ \forall i, j, \quad \text{ovvero} \quad f_j^{s+k}(f_i^s a_i) = f_i^{s+k}(f_j^s a_j).$$

Sia ora $1 = \sum_j c_j f_j^{s+k}$, $\quad a := \sum_j c_j f_j^s a_j$ affermo che a gode della proprietà richiesta $a = a_i/f_i^k \in A[1/f_i]$, $\forall i$.

Ora $f_i^{s+k} a = \sum_j f_i^{s+k} c_j f_j^s a_j = \sum_j c_j f_j^{s+k} f_i^s a_i = f_i^s a_i$. In $A[1/f_i]$ possiamo dividere per f_i^{s+k} ottenendo il risultato.

2.2 Definizione. *La coppia $Spec(A), \mathcal{A}$ viene detta uno* **schema affine**.

Il fascio $\mathcal{A}$ viene detto *fascio strutturale* dello schema affine.

Evidentemente poi la teoria si sviluppa introducendo schemi più generali di quelli affini.

Si fanno due passi. Prima si definisce **preschema** una coppia $(X, \mathcal{A})$ dove X è uno spazio topologico e A è un fascio di anelli su X con la condizione che localmente tale coppia è uno schema affine.

Questa definizione è ancora troppo generale e bisogna imporre in un certo senso un *assioma di separazione*, questo sembra un po curioso visto che uno schema affine non è separato ma ha un significato geometrico semplice.

La Teoria svolta si estende immediatamente ai moduli, dato un modulo M su A si verifica (nella stessa maniera) che i moduli $M_P f_i := M \otimes_A A[1/f_i]$ formano un fascio di moduli $\mathcal{M}$ sul fascio di anelli $\mathcal{A}$, un tale fascio è detto *quasi coerente*.

Si vede facilmente che un morfismo $f : M \to N$ fra moduli si *localizza* ad un morfismo di fasci di A moduli.

3 Localizzazione

Il metodo della localizzazione è legato a quello della teoria precedente.

Sia A un anello commutativo ed $S \subset A$ un insieme moltiplicativo, localizzare A ad S vuol dire trovare un anello B ed un morfismo $i : A \to B$ in modo tale che gli elementi di S diventano invertibili in B, inoltre si vuol fare questa operazione in modo ottimale ovvero *universale*.[1] Questo è un linguaggio estremamente comodo in Algebra e vale la pena capirlo.

3.1 Definizione. *Dato un anello A ed un sistema moltiplicativo S, un morfismo di anelli $i : A \to B$ si chiama localizzazione di A ad S, e B viene denotato con A_S se:*
1) Gli elementi $i(s),\ s \in S$ sono invertibili in B.
2) Dato comunque un morfismo $j : A \to C$ per cui gli elementi $i(s),\ s \in S$ sono invertibili in C, esiste un unico morfismo $\overline{j} : B \to C$ con $j = \overline{j} \circ i$.

Si può fare una simile discussione per i moduli, dato un modulo M cerchiamo un nuovo modulo su cui gli elementi di S sono invertibili.

3.2 Definizione. *Dato un anello A, un sistema moltiplicativo Sed un A modulo M un morfismo moduli $i : M \to N$ si chiama localizzazione di M ad S, e N viene denotato con $N[S^{-1}]$ se:*
1) Gli operatori di N in N, $n \to sn,\ s \in S$ sono invertibili.
2) Dato comunque un morfismo $j : M \to P$ per cui gli operatori $s,\ s \in S$ sono invertibili in P, esiste un unico morfismo $\overline{j} : N \to P$ con $j = \overline{j} \circ i$.

Ogni volta che si pone il problema di fare una costruzione caratterizzata da una proprietà universale, abbiamo un semplice teorema di unicità e spesso, con il metodo della costruzione per generatori e relazioni anche un semplice teorema di esistenza. Più difficile è di dare una descrizione più o meno *concreta* degli oggetti costruiti.

Svolgiamo l'esempio precedente, ma l'argomento è del tutto generale.

Supponiamo che $i_1 : M \to N_1,\ i_2 : M \to N_2$ siano due localizzazioni ad un insieme moltiplicativo S. Per la proprietà universale di i_1 esiste (un unico) $j_1 : N_1 \to N_2$ con $i_2 = j_1 \circ i_1$, analogamente per la proprietà universale di i_2 esiste (un unico) $j_2 : N_2 \to N_1$ con $i_1 = j_2 \circ i_2$. Deduciamo $i_1 = j_2 \circ j_1 \circ i_1,\ i_2 = j_1 \circ j_2 \circ i_2$.

$$1_{N_1} \circ i_1 = (j_2 \circ j_1) \circ i_1,\ 1_{N_2} \circ i_2 = (j_1 \circ j_2) \circ i_2.$$

Per la unicità richiesta nella definizione universale si ha $1_{N_1} = j_2 \circ j_1,\ 1_{N_2} = j_1 \circ j_2$, ovvero j_1, j_2 sono isomorfismi (univocamente determinati) uno inverso dell'altro.

Il caso trattato dell'anello $A[1/f]$, in cui f viene invertito come $A[1/f] := A[x]/(xf-1)$ rientra nel processo di localizzazione. Qui il sistema moltiplicativo è $S := \{1, f, f^2, \dots, f^k, \dots\}$ delle potenze di f.

[1] per evitare di rendere la localizzazione l'anello 0, si assume sempre che $0 \notin S$.

Se $A \xrightarrow{p} B$ è un morfismo e $p(f)$ è invertibile in B possiamo definire:

$$q : A[x] \to B,\ q(a) = p(a),\ a \in A,\ q(x) := p(f)^{-1}.$$

Si ha $q(xf - 1) = 0$ quindi q si fattorizza tramite $A[1/f] = A[x]/(xf - 1)$ che pertanto soddisfa la proprietà universale.

Per la costruzione di $A[S^{-1}],\ M[S^{-1}]$ in generale, conviene operare come nel caso usuale della costruzione del campo delle frazioni di un dominio.

Osserviamo che, se $m \in M,\ s \in S$ con $sm = 0$ deve essere necessariamente $i(m) = 0$ se $i : M \to N$ è un morfismo per cui gli elementi di S sono invertibili su N.

Pertanto per prima cosa consideriamo $P := \{m \in M \mid \exists s \in S,\ sm = 0\}$. P è un sottomodulo, infatti se $sm = 0,\ a \in A,\ s(am) = 0$ mentre se $sm = 0,\ tn = 0,\ s, t \in S$ si ha $(st)(m + n) = 0,\ st \in S$. Passando modulo P ci si riduce al caso $P = 0$, infatti se $m \in M$ è tale che $sm \in P$ si ha $(ts)m = t(sm) = 0$ e quindi $m \in P$.

Assumiamo dunque che $P = 0$ consideriamo in $S \times M$ la relazione $(s, m) \equiv (t, n) \iff sn = tm$, (stiamo ovviamente pensando alla coppia (s, m) come alla *frazione* $\frac{m}{s}$ e la equivalenza è la usuale equivalenza delle frazioni).

1) La relazione data è una equivalenza, infatti da $(s, m) \equiv (t, n),\ (t, n) \equiv (u, p)$ deduciamo

$$sn = tm, tp = un \implies stp = tum \implies t(sp - um) = 0 \implies sp = um \implies (s, m) \equiv (u, p)$$

2) Dati $(s, m) \equiv (t, n)$ ed un'altra coppia (u, p) si ha $(su, um + sp) \equiv (tu, un + tp)$ in quanto $su(un + tp) = u^2 sn + sutp = u^2 tm + tusp = (tu)(um + sp)$. Pertanto la somma di frazioni è ben definita.

3) la struttura di $A-$modulo è ben definita da $a(s, m) := (s, am)$.

4) Si ha $(t, n) \equiv (st, sn)$ pertanto la applicazione $(t, n) \to (st, n)$ è inversa della moltiplicazione per s.

5) Posto $M[S^{-1}]$ il modulo di frazioni così costruito la mappa $i : M \to M[S^{-1}]$ è data da $i(m) := (1, m)$. Gode della proprietà universale ponendo se $j : M \to N$ è dato $\bar{i}(s, m) := s^{-1} j(m)$.

6) Se applichiamo la costruzione all'anello A stesso possiamo dotare $A[S^{-1}]$ di una struttura di anello ponendo $(s, a).(t, b) := (st, ab)$.

7) Finalmente $M[S^{-1}]$ è in modo naturale un $A[S^{-1}]$ modulo ponendo:

$$(s, a).(t, m) := (st, am).$$

A questo punto conviene semplificare le notazioni, anche se è impreciso, poiché $i : M \to M[S^{-1}]$ non è in generale iniettivo, in genere scriveremo $\frac{m}{s} = s^{-1}m$ invece della classe di (s, m).

Data la proprietà universale si ha che la costruzione $M \xrightarrow{i_M} M[S^{-1}]$ è funtoriale, infatti dato un morfismo $f : M \to N$ la composizione $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{i_N} N[S^{-1}]$ si fattorizza tramite $M \xrightarrow{i_M} M[S^{-1}]$. Per il morfismo indotto $M[S^{-1}] \xrightarrow{{}_S f} N[S^{-1}]$ si ha ${}_S f(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$.

È finalmente utile capire che si ha una altra descrizione di $M[S^{-1}]$ infatti:

$$M[S^{-1}] = A[S^{-1}] \otimes_A M. \tag{3.3}$$

Dim. Usiamo le due proprietà universali, poiché gli elementi di S sono invertibili in $A[S^{-1}]$ si ha un morfismo, dalla proprietà universale di $M[S^{-1}]$ si ha un morfismo $i : M[S^{-1}] \to A[S^{-1}] \otimes_A M,\ s^{-1}m \to s^{-1} \otimes m$. Viceversa la applicazione $A[S^{-1}] \times M \to M[S^{-1}]$, $(\frac{a}{s}, m) \to s^{-1}(am)$ è bilineare ed induce una applicazione $j : A[S^{-1}] \otimes_A M \to M[S^{-1}]$ che chiaramente inverte i. □

4 Qualche proprietà della costruzione

Prima di passare allo spettro vogliamo mettere in evidenza una delle principali proprietà della costruzione $M[S^{-1}]$ ovvero quello che in generale (cf.§6) si chiama *piattezza*.

4.1 Teorema. *Data una successione esatta* $0 \to N \xrightarrow{i} M \to P \to 0$ *di* $A-$*moduli si ha che la successione* $0 \to N[S^{-1}] \xrightarrow{i} M[S^{-1}] \to P[S^{-1}] \to 0$ *di* $A-$*moduli è esatta.*

Dim. Mostriamo l'iniettività di $N[S^{-1}] \xrightarrow{{}_S i} M[S^{-1}]$, il resto è simile e comunque segue da 3.3 e l'esattezza a destra del prodotto tensoriale.

Se ${}_S i(\frac{n}{s}) = \frac{i(n)}{s} = 0$ si deve avere ${}_S i(n) = 0$ in $M[S^{-1}]$ ossia esiste un $t \in S$ per cui $i(tn) = ti(n) = 0$ in M. Ma essendo i iniettivo questo implica $tn = 0$ in N e quindi $n = 0$ in $N[S^{-1}]$. □

In altre parole se $N \subset M$ è un sottomodulo si ha, come $A[S^{-1}]$ moduli, che:

$$N[S^{-1}] \subset M[S^{-1}], \qquad M/N[S^{-1}] = M[S^{-1}]/N[S^{-1}].$$

In particolare se I è un ideale di A si ha che $I[S^{-1}]$ è un ideale di $A[S^{-1}]$ inoltre come anelli $A/I[S^{-1}] = A[S^{-1}]/I[S^{-1}]$.

Prendiamo un $A[S^{-1}]$ sottomodulo $L \subset M[S^{-1}]$ e poniamo $N := \{m \in M \mid i(m) \in L\}$. Dato $\frac{m}{s} \in L$ si ha $i(m) \in L$ e quindi $L = N[S^{-1}]$.

Pertanto la applicazione $N \to N[S^{-1}]$ fra $A-$sottomoduli di M ed $A[S^{-1}]-$sottomoduli di $M[S^{-1}]$ è suriettiva, inoltre si verifica facilmente che:

$$N_1[S^{-1}] + N_2[S^{-1}] = (N_1 + N_2)[S^{-1}], \quad N_1[S^{-1}] \cap N_2[S^{-1}] = (N_1 \cap N_2)[S^{-1}]$$

$$i^{-1}(N[S^{-1}]) = \{m \in M \mid \exists s \in S,\ sm \in N\}.$$

In particolare ritroviamo il fatto che $i : M \to M[S^{-1}]$ è iniettiva se e solo se nessun elemento $s \in S$ è divisore di 0 in M.

Un modo diverso di enunciare la precednte proposizione sta nel dire che *la localizzazione commuta con il passaggio al quoziente* ovvero se M è un $A-$modulo $N \subset M$ un sottomodulo S un sistema moltiplicativo:

$$(M/N)[S^{-1}] = M[S^{-1}]/N[S^{-1}]$$

In particolare se I è un ideale e $\overline{S}$ è l'immagine di S in A/I si ha l'eguaglianza di anelli:

$$(A/I)[\overline{S}^{-1}] = A[S^{-1}]/I[S^{-1}] \tag{4.2}$$

Una seconda proprietà che si verifica immediatamente a partire dalla proprietà universale è la seguente, siano S, T sue insiemi moltiplicativi, per abuso di notazione indichiamo sempre con T la sua immagine in $A[S^{-1}]$ abbiamo:

$$(A[S^{-1}])[T^{-1}] = A[(ST)^{-1}]$$

5 Lo spettro di $A[S^{-1}]$.

Vogliamo ora studiare lo spettro di $A[S^{-1}]$ ed in particolare l'applicazione

$$i : A[S^{-1}] \to A, \quad i^* : Spec(A[S^{-1}]) \to Spec(A).$$

Sia $P \in Spec(A[S^{-1}]),\ Q = i^*(P) \in Spec(A)$ e si consideri la inclusione $A[S^{-1}]/P \supset A/Q$, poichè gli elementi di S sono invertibili in $A[S^{-1}]/P$ si deve avere $S \cap Q = \emptyset$. Viceversa se $S \cap Q = \emptyset$ gli elementi di S sono invertibili nel campo delle frazioni K di A/Q e quindi abbiamo una applicazione $A[S^{-1}] \to K$ il cui nucleo è un ideale primo P con $i^*(P) = Q$.

In $A[S^{-1}] \to K$ l'ideale primo P con $i^*(P) = Q$ è formato dalle frazioni $\frac{q}{s},\ q \in Q,\ s \in S$ ed è denotato con $Q[S^{-1}]$. Abbiamo in definitiva inclusioni canoniche

$$A/Q \subset A[S^{-1}]/P = A[S^{-1}]/Q[S^{-1}] \subset K$$

e dunque una applicazione biunivoca da $Spec(A[S^{-1}])$ all'insieme

$$Spec(A)_S := \{P \in Spec(A) \,|\, P \cap S = \emptyset.\}$$

Un caso particolare si ha quando $S = A - Q$ con Q un ideale primo, in tal caso $Spec(A)_S := \{P \in Spec(A) \,|\, P \subset Q\}$.

In questo caso l'anello $A[S^{-1}]$ è denotato con A_Q e gli ideali $P[S^{-1}]$ sono denotati P_Q.

Pertanto l'anelllo A_Q ha un unico ideale massimale Q_Q, inoltre modulo Q gli elementi di $A - Q$ sono tutti gli elementi non 0, si ha dunque $A_Q/Q_Q = K$ con K il campo delle frazioni di A/Q.

Il significato geometrico di questa costruzione è il seguente. Gli aperti U_f, $f \notin P$ sono una base di intorni di P, dalla proprietà universale abbiamo una famiglia di morfismi $A[1/f] \to A_P$, $\forall f \notin P$ per cui per passaggio al limite $\lim_{f \in A-P} A[1/f] \to A_P$. Viceversa per costruzione in $\lim_{f \in A-P} A[1/f]$ sono invertibili tutti gli elementi di $A - P$ e quindi ancora per la proprietà universale un morfismo $A_P \to \lim_{f \in A-P} A[1/f]$. Si deduce che $A_P = \lim_{f \in A-P} A[1/f]$ è la *spiga* del fascio strutturale di $Spec(A)$ nel punto P.

5.1 Definizione. *Un anello A con un unico ideale massimale M viene detto* **anello locale**, *il campo A/M è detto* **campo residuo** *dell'anello locale.*

Si provi per esercizio:

5.2 Proposizione. *Dato un anello A ed un ideale M si ha che A è locale con unico massimale M se e solo se $A - M$ è l'insieme degli elementi invertibili di A.*

Uno dei primi principi della localizzazione è il seguente:

5.3 Teorema. *1) Dato un anello A ed un modulo M si ha che $M = 0$ se e solo se $M_{\underline{m}} = 0$ per ogni ideale massimale.*

2) Dato un anello A ed un morfismo $M \xrightarrow{f} N$ di moduli si ha che f è iniettivo, suriettivo o biunivoco se e solo se per ogni ideale massimale $\underline{m}$ il morfismo di moduli su anelli locali $M_{\underline{m}} \xrightarrow{f} N_{\underline{m}}$ è iniettivo, suriettivo o biunivoco.

Dim. Supponiamo che $M_{\underline{m}} = 0$ per ogni ideale massimale. Se per assurdo esiste $m \neq 0$ $m \in M$ sia $I := Ann(m)$ e $I \neq A$. Esiste un ideale massimale $\underline{m}$ con $I \subset \underline{m}$. Poiché $M_{\underline{m}} = 0$ deve esistere un $t \notin \underline{m}$ con $tm = 0$, questo è assurdo poiché $t \in I \subset \underline{m}$.

Detti $K := Ker(f)$, $C := Coker(f)$ abbiamo la successione esatta:

$$0 \to Ker(f) \to M \xrightarrow{f} N \to Coker(f) \to 0,$$

e per piattezza, per ogni ideale massimale $\underline{m}$

$$0 \to Ker(f)_{\underline{m}} \to M_{\underline{m}} \xrightarrow{f} N_{\underline{m}} \to Coker(f)_{\underline{m}} \to 0$$

f è iniettiva se e solo se $Ker(f) = 0$ se e solo se $Ker(f)_{\underline{m}} = 0$ per ogni ideale massimale $\underline{m}$ (da 1)). Similmente per le altre proprietà. $\square$

Se M è un modulo su un anello A ed $\underline{m}$ è un suo ideale massimale, si ha che $M/\underline{m}M$ è uno spazio vettoriale sul campo $A/\underline{m}$. Lo pensiamo come alla *valutazione* di M nel punto $\underline{m}$. Se pensiamo alla proiezione $A \to A/\underline{m}$ come valutazione in un punto p scriveremo $M/\underline{m}M := M(p)$.

Un criterio fondamentale della localizzazione è il:

5.4 Lemma. *(di Nakayama) Se M è un modulo finitamente generato su un anello locale A di ideale massimale $\underline{m}$ si ha che $M = 0$ se e solo se $M/\underline{m}M = 0$ ovvero $M = \underline{m}M$.*

Lo stesso enunciato vale per A qualunque e $M = IM$ con $I \subset J(A)$ contenuto nel radicale di Jacobson.

Dim. L'unica cosa non banale da dimostrare è che, se $M = \underline{m}M$ (risp. $M = IM$)allora $M = 0$. Applichiamo il Teorema di Cayley-Hamilton (2.3).

Siano $u_1, \dots, u_k$ generatori di M e sia $u_i = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}u_j$, $m_{ij} \in \underline{m}$, risp. $\in I$.

Il polinomio caratteristico della identità che otteniamo ha la forma $d = 1+m_1+m_2+\cdots+m_k$ e $dM = 0$. Per ogni i, m_i è un polinomio di grado i negli elementi m_{ij}. In particolare $m_1+m_2+\cdots+m_k \in \underline{m}$, risp. $m_1+m_2+\cdots+m_k \in I$ quindi $d = 1+m_1+m_2+\cdots+m_k \notin \underline{m}$ è invertibile, poiché A è locale, (o per la definizone di radicale di Jacobson) da cui $M = 0$. $\square$

Il lemma di Nakayama fornisce la seguente conseguenza.

5.5 Proposizione. *Se M è un modulo finitamente generato su un anello locale A di ideale massimale $\underline{m}$ si ha che k elementi $m_1, \dots, m_k$ generano M come $A-$modulo, se e solo se le loro classi modulo $\underline{m}$ generano $M/\underline{m}M$ come spazio vettoriale su $A/\underline{m}$.*

Dim. Se N è il sottomodulo generato da $m_1, \dots, m_k$ la condizione $N = M$ equivale a $M/N = 0$ e quindi dal Lemma di Nakayama a $(M/N)/\underline{m}(M/N) = 0$ ovvero $M/(\underline{m}+N) = 0$ che equivale all'enunciato. $\square$

Per passare dal locale al globale facciamo prima di tutto una semplice osservazione. Sia A un anello, M un modulo, P un ideale primo e $k(P)$ il campo delle frazioni di A/P (se P è massimale $k(P) = A/P$) sia A_P il corrispondente anello locale e $\underline{p}$ il suo ideale massimale, si ha $k(P) = A_P/\underline{p}$. Si ha anche $M \otimes_A k(P) = M_P/\underline{p}M_P$ infatti la successione esatta $0 \to \underline{p} \to A_P \to A_P/\underline{p} \to 0$ induce la successione esatta

$$M \otimes_A \underline{p} \to M \otimes_A A_P = M_P \to M \otimes_A A_P/\underline{p} = M \otimes_A k(P) \to 0.$$

In particolare per un ideale massimale $\underline{m}$ abbiamo che $M/\underline{m}M = M_{\underline{m}}/\underline{m}_{\underline{m}}M_{\underline{m}}$.

Intuitivamente $M \otimes_A k(P)$ è la *valutazione* del modulo M nel punto P, e la potremmo denotare con

$$M \otimes_A k(P) := M(P) \tag{5.6}$$

e quindi l'enunciato precedente significa che, localizzare M in P e poi valutarlo in P è equivalente a valutarlo direttamente in P.

Quando si lavora in modo locale è utile sapere se una condizione è aperta, ovvero se vale in un punto vale anche in un intorno. Ad esempio:

5.7 Proposizione. *i) Se M è un modulo finitamente generato su un anello A e P è un ideale primo con $M(P) = 0$ esiste $f \notin P$ tale che $M[1/f] = 0$, (ovvero $M = 0$ nell'aperto U_f).*

ii) Se $p : M \to N$ è un morfismo di moduli, N è finitamente generato e P è un ideale primo con $p : M(P) \to N(P)$ suriettivo, esiste $f \notin P$ tale che $p : M[1/f] \to N[1/f]$ è suriettivo, (ovvero p è suriettivo nell'aperto U_f).

Dim. i) Siano $u_1, \ldots, u_k$ generatori di M. Dal Lemma di Nakayama $M_P = 0$, quindi, per ogni $i = 1, \ldots, k$ esiste $s_i \notin P$ con $s_i u_i = 0$. Posto $f := \prod_{i=1}^k s_i$ abbiamo $fM = 0$ e quindi $M[1/f] = 0$.

ii) Sia C il conucleo di p dalla successione esatta $M \xrightarrow{p} N \to C \to 0$ otteniamo nel punto P la successione esatta $M(P) \xrightarrow{p} N(P) \to C(P) \to 0$ e quindi per ipotesi $C(P) = 0$. Poiché C è finitamente generato esiste $f \notin P$ tale che $C[1/f] = 0$ e la successione esatta $M[1/f] \xrightarrow{p} N[1/f] \to C[1/f] \to 0$ si riduce alla suriettività di $M[1/f] \xrightarrow{p} N[1/f]$. □

Dato un modulo M su un anello A ed un ideale massimale $\underline{m}$ di A la dimensione $\dim_{A/\underline{m}} M/\underline{m}M = M \otimes_A A/\underline{m}$ si dice *rango* di M nel punto $\underline{m}$. Analogamente si può fare sull'intero spettro primo. Se $P \in SpecA$ è un ideale primo sia $k(P)$ il campo delle frazioni del dominio A/P, $\dim_{k(P)} M(P)$ si dice *rango* di M nel punto P.

Se $M = A^r$ è un modulo libero di rango r si ha $M \otimes_A k(P) = k(P)^r$ è uno spazio vettoriale di rango r per ogni P, vogliamo vedere un parziale inverso di questo fatto.

5.8 Proposizione. *Sia A un dominio, K il suo campo delle frazioni, M un $A-$modulo finitamente generato e sia $\dim_K M \otimes_A K = r$ allora esiste $f \neq 0$ tale che $M[1/f]$ è un $A[1/f]$ modulo libero di rango r.*

Se inoltre P è un ideale primo e anche $\dim_K M \otimes_A K(P) = r$ esiste $f \notin P$ tale che $M[1/f]$ è un $A[1/f]$ modulo libero di rango r.

Dim. Sia $u_1, \ldots, u_r \in M \otimes_A K$ una base su K moltiplicando per un denominatore possiamo supporre che tali elementi provengano da M e per abuso useremo la stessa notazione. L'applicazione $A^r \to M$ data da $(a_1, \ldots, a_r) \to \sum_{i=1}^r a_i u_i$ è suriettiva nel punto $\{0\}$ per ipotesi e dunque esiste un $f \neq 0$ per cui $A^r[1/f] \to M[1/f]$ è suriettiva. Questa è anche iniettiva in quanto abbiamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A^r[1/f] & \longrightarrow & M[1/f] \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ K^r & \xrightarrow{j} & M \otimes_A K \end{array}$$

e i, j sono iniettive. Dalla 5.7 esiste $f \notin P$ ed un morfismo suriettivo $A^r[1/f] \to M[1/f]$ se un elemento $v \in A^r[1/f]$ è nel nucleo allora come nella dimostrazione precedente $v = 0$. □

Nel caso in cui $A = k[a_1, \ldots, a_n] = k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_t)$ è l'anello delle coordinate di una varietà V ed M un $A-$modulo finitamente generato, vogliamo fornirne una interpretazione geometrica. Siano $u_1, \ldots, u_m$ generatori di M che pensiamo immagini della base standard e_i di A^m in un morfismo suriettivo $\pi : A^m \to M,\ \pi(e_i) = u_i$. Il nucleo di π è a sua volta finitamente generato ed abbiamo quindi una presentazione (esatta):

$$A^r \xrightarrow{j} A^m \xrightarrow{\pi} 0$$

Con $j = (j_{u,v}),\ u = 1, \ldots, m;\ v = 1, \ldots r$. Per ogni punto $P : A \to k$ possiamo valutare la successione esatta ed ottenere una presentazione $k^r \xrightarrow{j(P)} k^m \xrightarrow{\pi(P)} M(P) \to 0$. In $k^{n+m} = k^n \times k^m$ consideriamo l'insieme W della coppie (P, v) dove $P \in V$ e $v \in k^m$ è nell'immagine di $\pi(P)^t : M(P)^* \to k^n$. Osserviamo prima di tutto che W è una sottovarietà definita dalle equazioni $f_i(x) = 0,\ \sum_{u=1}^m j_{u,v}(x) y_u = 0,\ i = 1, \ldots, t,\ v = 1, \ldots r$. La varietà W si proietta su V e le fibre sono gli spazi vettoriali $M(P)^*$. Questa è quasi la definizione di fibrato vettoriale, manca per essere in tale situazione la restrizione che la dimensione delle fibre sia localmente costante. Si osservi la semicontinuità della dimensione:

ESERCIZIO Se $m_1, \ldots, m_s$ sono linearmente indipendenti in un punto P lo sono anche in un intorno di P.

6 Punti geometrici

È spesso utile, per poter utilizzare le tecniche sviluppate per le varietà introdurre una noziione più geometrica di punto.

6.1 Definizione. *Un punto geometrico di una R algebra A è un omomorfismo $\phi : A \to K$ in una $r-$algebra K che sia anche un campo algebricamente chiuso.*

Se ϕ è un tale punto $P := \ker \phi$ è un ideale primo e si dice che il punto geometrico giace sopra P. Viceversa se $P \in SpecA$ sia F il campo delle frazioni di A/P per ottenere un punto geometrico che giace sopra P basta immergere F in un campo algebricamente chiuso K e considerare $A \to A/P \to F \to K$.

Con i punti geometrici possiamo utilizzare un linguaggio geometrico anche per i morfismi. Sia $A \to B$ un morfismo di algebre che pensiamo come un morfismo di schemi affini $Spec(B) \to Spec(A)$. Se $\phi : A \to K$ è un punto geometrico si ha l'algebra $B \otimes_A K$ il cui spettro si chiama *fibra geometrica* del morfismo sul punto ϕ. Se B è una $A-$algebra finitamente generata allora $B \otimes_A K$ è una $K-$algebra finitamente generata a cui è quindi associata una varietà affine (su K).

7 Piattezza

Ricordiamo le proprietà di esattezza dei prodotti tensoriali.

7.1 Teorema. *Se $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ è una successione esatta di R moduli destri e N è un $R-$modulo sinistro si ha che $A \otimes_R N \xrightarrow{i} B \otimes_R N \xrightarrow{p} C \otimes_R N \to 0$ è una successione esatta.*

Similmente per moduli sinistri.

ATTENZIONE Non è vero che il prodotto tensoriale è esatto a sinistra (farsi un esempio).

7.2 DEFINIZIONE. *Se N è un $R-$modulo sinistro che gode della proprietà che, data $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ una successione esatta di R moduli destri e N si ha $0 \to A \otimes_R N \xrightarrow{i} B \otimes_R N \xrightarrow{p} C \otimes_R N \to 0$ è esatta si dice che N è un modulo* **piatto**.

Il Teorema 4.1 afferma pertanto che $A[S^{-1}]$ è un $A-$modulo piatto.

Una nozione importante viene dalla seguente:

7.3 PROPOSIZIONE. *Se N è un $R-$modulo sinistro le due proprietà sono equivalenti:*
1) Un complesso di R moduli destri $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ è esatto se e solo se $A \otimes_R N \xrightarrow{i} B \otimes_R N \xrightarrow{p} C \otimes_R N$ è esatta.
2) N è piatto e, dato un $R-$modulo destro M, se $M \otimes_R N = 0$ allora $M = 0$.
Un modulo che soddisfa le due condizioni precedenti è detto **fedelmente piatto**.

DIM. 1) $\implies$ 2) infatti assumiamo 1), iterando la costruzione anche una successione esatta lunga si trasforma in successione esatta e N è piatto. Se supponiamo $M \otimes_R N = 0$, la successione $0 \to M \to 0$ diventa esatta tensorizzando con N quindi è esatta e $M = 0$.

2) $\implies$ 1) infatti in un verso è la piattezza. Supponiamo che $A \otimes_R N \xrightarrow{i} B \otimes_R N \xrightarrow{p} C \otimes_R N$ è esatta, sia $D = ker(p)$, abbiamo una fattorizzazione $A \xrightarrow{q} D \xrightarrow{j} B \xrightarrow{p} C$ e due successioni esatte $A \xrightarrow{q} D \xrightarrow{u} D/q(A) \to 0,\ 0 \to D \xrightarrow{j} B \xrightarrow{p} C$. Per ipotesi $D \otimes N$ è l'immagine di $A \otimes_R N$ segue $D/q(A) \otimes_R N = 0$ e quindi $D/q(A) = 0$ che è l'esattezza richiesta. □

Se prendiamo un morfismo di algebre $A \to B$ la condizione di piattezza di B su A ha unsignificato geometrico che è necessario esplorare. Se A, B sono anelli di coordinate di due varieà W, V abbiamo quindi un morfismo $f : V \to W$ e la condizione di piattezza è una condizione di continuità per il variare delle fibre.

7.4 LEMMA. *Sa A una $R-$algebra I, J due ideali di A supponiamo che:*
i) $A/I, A/J$ sono piatti su R.
ii) Esiste un non divisore di 0, $f \in R$ tale che $I[1/f] = J[1/f]$ allora $I = J$.

DIM. Per ipotesi la successione $0 \to R \xrightarrow{f} R$ è esatta e per piattezza, si ha che sono esatte:

$$0 \to A/I \xrightarrow{f} A/I, \quad 0 \to A/J \xrightarrow{f} A/J$$

questo implica che $A/I \subset A/I[f^{-1}],\ A/J \subset A/J[f^{-1}]$. Poiché $A/I[f^{-1}] = A/J[f^{-1}]$ si ha $A/I = A/J$. □

Intuitivamente questo vuol dire che, in un morfismo $f : V \to W$ di varietà, sotto le ipotesi di piattezza di una restrizione di f ad una sottovarietà (o meglio sottoschema)

$Z \subset V$, il sottoschema Z è univocamente determinato dalla restrizione alla controimmagine di un aperto denso di W.

8 Localizzazione dei primi associati e della decomposizione primaria

Sia A un anello S un sistema moltiplicativo e P un ideale primo.

8.1 LEMMA. *Se $P[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$ allora $P[S^{-1}]$ è un ideale primo di $A[S^{-1}]$.*

DIM. Dalla formula 4.2 segue che $A[S^{-1}]/P[S^{-1}]$ è un dominio. □

Sia ora Q un ideale primario con radicale P.

8.2 PROPOSIZIONE. *$P[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$ se e solo se $Q[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$. In questo caso $Q[S^{-1}]$ è un ideale primario di $A[S^{-1}]$ di radicale $P[S^{-1}]$.*

DIM. Se $a = ps^{-1} \in P[S^{-1}]$ si ha $p^k \in Q$ e quindi $a^k \in Q[S^{-1}]$ se viceversa $(us^{-1})^k = qr^{-1} \in Q[S^{-1}]$, $q \in Q, r \in S$ esiste un $t \in S$ tale che $(u^k r - qs^k)t = 0$,, da cui $u^k rt \in Q$, se $rt \in P$ si ha $P[S^{-1}] = A[S^{-1}]$ altrimenti $u^k \in Q$, $u \in P$.

Resta solo da provare che se $P[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$ si ha che $Q[S^{-1}]$ è un ideale primario. Sia dunque $(as^{-1})(bt^{-1}) \in Q[S^{-1}]$ e $bt^{-1} \notin P[S^{-1}]$, pertanto si ha per qualche $r, v \in S$, $q \in Q$ che $(abr - qst)v = 0$. Poichè $P[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$ si ha $rv \notin P$ da cui $ab \in Q$, poichè $b \notin P$ si ha $a \in Q$. □

Prendiamo ora una decomposizione primaria di un ideale I di un anello A ovvero $I = \cap_{i=1}^k Q_i$, in altre parole abbiamo una successione esatta:

$$0 \to I \to A \to \oplus_{i=1}^k A/Q_i.$$

Preso un insieme moltiplicativo S abbiamo dunque la successione esatta:

$$0 \to I[S^{-1}] \to A[S^{-1}] \to \oplus_{i=1}^k (A/Q_i)[S^{-1}] = \oplus_{i=1}^k A[S^{-1}]/Q_i[S^{-1}].$$

Deduciamo:

8.3 PROPOSIZIONE. *$P[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$ se e solo se $Q[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$. In questo caso $Q[S^{-1}]$ è un ideale primario di $A[S^{-1}]$ di radicale $P[S^{-1}]$.*

DIM. Da una decomposizione primaria di un ideale $I = \cap_{i=1}^k Q_i$ si ottiene una decomposizione primaria dell ideale $I[S^{-1}] = \cap_{i=1}^k Q_i[S^{-1}]$ dove ci si può restringere a quei $Q_i[S^{-1}] \neq A[S^{-1}]$

□

Un enunciato simile vale per un modulo. In particolare possiamo dire che se identifichiamo $Spec(A[S^{-1}])$ con un aperto di $Spec(A)$ abbiamo per un modulo M di tipo finito che:

8.4 Proposizione. *I primi associati a* $M[S^{-1}]$ *sono i primi associati ad* M *e contenuti in* $Spec(A[S^{-1}])$.