# CAPITOLO 7 DUALITÀ

## 1 Varietà e pseudovarietà

NOTA La dualità è uno degli strumenti più potenti nello studio della geometria delle varietà e la studieremo in vari livelli di generalità, in questa prima sezione definiamo i concetti di Varietà (PL ed omologiche) e pseudovarietà ed iniziamo a discutere geometricamente i link trasversi ed il complesso duale o trasverso.

OMOLOGIA LOCALE Iniziamo la discussione della dualità con il punto di vista classico e combinatorio dei complessi simpliciali.

Simplesso indicherà l'insieme dei vertici come oggetto combinatorio, simplesso aperto o chiuso il corrispondente sottoinsieme, localmente chiuso o chiuso nella realizzazione geometrica.

Per i concetti di *Stella* e di *Link* rimandiamo al capitolo precedente.

Iniziamo interpretando alcune proprietà del link, in omologia. Per un vertice $x$ di un complesso simpliciale $X$ abbiamo

1.1 TEOREMA.
$$H_*(X, X - x) = H_*^{\#}(L(x, X)).$$

DIM. Per escissione $H_*(X, X - x) = H_*(St(x, X), St(x, X) - x))$ ma poiché $St(x, X)$ è un cono, $H_*(St(x, X), St(x, X) - x)) = H_*^{\#}(St(x, X) - x)) = H_*^{\#}(L(x, X))$, in quanto $St(x, X) - x$ è omeomorfo a $L(x, X) \times (0, 1)$.

PSEUDOVARIETÀ E VARIETÀ PL

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la nozione di sfera PL, si tratta di un poliedro PL isomorfo al bordo di una qualunque cella.

Da questa nozione ne deduciamo quella di *varietà PL.*

Conviene lavorare direttamente nel caso relativo. Sia $X$ un complesso simpliciale di dimensione $n$ e $L \subset X$ un sottocomplesso. In questo caso abbiamo un'altra nozione importante. Denotiamo con $X - L$ l'insieme di tutti i simplessi di $X$ non in $L$.

Lo spazio $|X| - |L| := |X - L|$ è unione di tutti i simplessi aperti di $X - L$.

1.2 Definizione. *Diremo che $X - L$ è una varietà PL senza bordo, di dimensione $n$ se il Link di ogni suo punto è una sfera PL di dimensione $n - 1$.*

*Diremo che $X - L$ è una varietà PL con bordo, di dimensione $n$ se il Link di ogni suo punto è una sfera PL di dimensione $n - 1$ oppure una cella di dimensione $n - 1$ questi ultimi punti sono per definizione il bordo di $X - L$.*

Si osservi che una varietà PL è in particolare una varietà topologica avendo ogni punto un intorno omeomorfo ad una cella.

Per i calcoli che dovremo fare è opportuno introdurre una nozione più generale la:

1.3 Definizione. *1) Uno spazio $X$ di dimensione $n$, si dice una sfera omologica di dimensione $n$ se:*

$$H_i^{\#}(X) = 0, \forall i \neq n, \ H_n^{\#}(X) = \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

*(risp. una sfera omologica di dimensione $n$ a coefficienti in un anello $R$ se)*

$$H_i^{\#}(X; R) = 0, \forall i \neq n, \ H_n^{\#}(X; R) = R. \tag{1.5}$$

*Inoltre si assume che $\pi_1(X) = H_1(X, \mathbb{Z})$.*

*2) Una coppia $X, Y$ di spazi ($Y \subset X$) si dice una varietà omologica relativa di dimensione $n$ se, per ogni punto $x \in X - Y$ per i gruppi di omologia locale si ha*

$$H_i(X, X - x) = 0, \forall i \neq n, \ H_n(X, X - x) = \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

*Più in generale se introduciamo un anello di coefficienti $R$ parleremo di $R-$varietà omologica relativa di dimensione $n$ se $H_i(X, X - x; R) = 0, \forall i \neq n, \ H_n(X, X - x; R) = R$.*

1.7 Definizione. *Diremo che $X - L$ è un* **ciclo** *o anche una pseudovarietà senza bordo, di dimensione $n$ se l'insieme dei suoi simplessi verifica le due condizioni.*

*a) Ogni simplesso è contenuto in un simplesso di dimensione $n$.*

*b) Ogni simplesso $n - 1$ dimensionale è faccia di esattamente due simplessi.*

Il Teorema precedente implica che per una varietà PL di dimensione $n$ si ha $H_i^{\#}(X, X - p) = 0, \ i \neq n$, per ogni punto $p$ e $H_n^{\#}(X, X - p) = \mathbb{Z}$ per ogni $p$ che non sia nel bordo $\partial X$, $H_n^{\#}(X, X - p) = 0$ per ogni $p$ nel bordo, ovvero che la coppia $X, \partial X$ è una varietà omologica, peraltro esistono varietà omologiche che non sono PL varietà.

Un complesso simpliciale che soddisfi solo la condizione a) si dirà *puro* di dimensione $n$.

Si osservi che, il link di un punto interno ad un simplesso $n$ dimensionale nel simplesso stesso è una sfera $n - 1$ dimensionale pertanto in un complesso simpliciale $X$ puro di dimensione $n$ l'insieme

$$X_0 := \{p \in X | Lk(p, X) = S^{n-1}\}$$

è un aperto denso che per definizione può essere pensato come l'insieme dei punti *non singolari* di $X$ il suo complementare è la *singolarità*, usualmente riprendendo la terminologia della geometria algebrica si dice che $X$ è *normale* se è non singolare in codimensione 2.

Possiamo anche definire la nozione di pseudovarietà con bordo se rimpiazziamo l'ipotesi b) con quella più debole

b') Ogni simplesso $n-1$ dimensionale è faccia di al più due simplessi.

Il bordo è generato dai simplessi $n-1$ dimensionali faccia di esattamente un solo $n-$simplesso.

Ad esempio se prendiamo il bordo $\dot{\Delta}_n$ di un simpesso abbiamo una pseudovarietà (in effetti una varietà).

Se uniamo due pseudovarietà di dimensione $n \geq 2$ in un vertice otteniamo una pseudovarietà.

**1.8 Esercizio** Provare che la nozione di pseudovarietà è una nozione PL e non dipende dalla triangolazione scelta.

*sugg* Si consideri il sottoinsieme di $X$ formato da quei punti il cui link non è una sfera PL.

**Osservazione** La nozione di pseudovarietà ha una motivazione precisa, dalla geometria algebrica.

Vale infatti un Teorema generale di triangolabilità per le varietà algebriche che implica in particolare che, data una varietà algebrica compatta $X$, definita sui complessi, essa si può triangolare in modo tale che sia una pseudovarietà, inoltre la nozione di punto non singolare dal punto di vista della geometria algebrica è più forte di quella poliedrale e quindi l'aperto dei punti non singolari di $X$, come varietà algebrica, è contenuto nell'aperto $X_0$ definito dalla topologia PL.

La condizione di varietà complessa è quella che assicura la non singolarità in codimensione 1 (reale), in quanto per le varietà complesse abbiamo la nozione di dimensione complessa. La dimensione reale è il doppio di quella complessa. L'insieme dei punti singolari come varietà algebrica sono una sottovarietà propria di dimensione complessa inferiore.

Per le varietà algebriche reali vale anche un teorema di triangolabilità ma le singolarità possono essere in codimensione 1.

ORIENTAZIONE Prendiamo $X, L$ un ciclo di dimensione $n$, vogliamo studiare $H_n(X, L)$. Dalle proprietà dimensionali dei complessi questa omologia non cambia se aggiungiamo ad $L$ tutti i simplessi di dimensione $< n-1$ di $X$ ed assumiamo che $X - L$ consista solo di simplessi di dimensione $n, n-1$.

Per realizzare combinatoriamente le relazioni di incidenza fra questi simplessi di dimensione $n$, $n-1$ diciamo *adiacenti* due simplessi di dimensione $n$ che hanno una faccia in comune.

Possiamo visualizzare la adiacenza con un grafo $\Gamma$ i cui vertici siano in corrispondenza con i simplessi $n-$dimensionali ed i lati in corrispondenza con i simplessi $n-1-$dimensionali.

Gli estremi di un lato sono i due simplessi $n-$dimensionali che esistono per ipotesi. Pertanto due vertici sono adiacenti se sono connessi da un lato.

Deduciamo una relazione di equivalenza dalla adiacenza considerando equivalenti due simplessi massimali $T, S$ se esiste una successione di simplessi massimali $T = T_0, T_1, \ldots, T_{k-1}, T_k = S$ con $T_i, T_{i+1}$ adiacenti per ogni $i$.

Per definizione le classi di equivalenza nel grafo $\Gamma$ indotte dalla relazione di adiacenza sono le componenti connesse del grafo; esse corrispondono biunivocamente con le componenti connesse di $|X - L|$.

Vogliamo ora calcolare $H_n(X)$ che, per le ipotesi fatte coincide con $H_n(X, L)$ ed inoltre anche con lo spazio dei cicli simpliciali $n-$dimensionali di $X, L$.

Studiamo dunque tale spazio di cicli. Siano $s_1, \ldots, s_N$ i simplessi $n$ dimensionali, ciascuno orientato in modo fissato (ma arbitrario). Sia $c := \sum_i^N h_i s_i$una catena di $X, L$, $\delta c = \sum_i^N h_i \delta s_i$.

In $\delta c$ il coefficiente di un simplesso $n-1$ dimensionale orientato $u$ si calcola considerando i due simplessi di cui è faccia $s_i, s_j$. Per ciascuno il numero di incidenza è $\pm 1$ ed il coefficiente risultante è $\pm h_i \pm h_j$.

Se $\sum_i^N h_i s_i$ è un ciclo di $X, L$, $\sum_i^N h_i \delta s_i = 0$ e quindi tutti i coefficienti $\pm h_i \pm h_j$ sono nulli.

Segue che i numeri $h_i$, a meno del segno, sono costanti su ciascuna componente connessa ed il ciclo $c$ è somma di cicli $c_i$, uno per ciascuna componente connessa.

Fissiamo dunque una componente connessa in cui il ciclo corrispondente sia non nullo. Sempre dalla analisi precedente esso è multiplo di un ciclo somma di tutti i simplessi $s_i$ della componente data con coefficienti $\pm 1$.

Se $c'$ è un differente ciclo relativo alla medesima componente connessa vi è almeno un simplesso $s_i$ in cui $c, c'$ hanno segni opposti e quindi $c + c'$ ha coefficiente 0 in $s_i$. Dalla discussione precedente segue che $c + c' = 0$.

Quindi un ciclo somma di tutti i simplessi $s_i$ della componente data con coefficienti $\pm 1$ se esiste è unico a meno del segno.

Se un tale $c$ esiste possiamo cambiare l'orientazione dei simplessi che vi appaiono con coefficiente $-1$ e scriverlo come somma di tutti i simplessi $n-$dimensionali orientati nel modo scelto di $X - L$.

1.9 Definizione. *Una componente connessa $Y$ di $X - L$ per cui un tale ciclo esiste si dice orientabile, la scelta di $c$ una orientazione di $Y$ e $c$ un ciclo di orientazione per tale componente.*

Abbiamo provato che, se $Y$ è orientabile e connessa essa ammette esattamente 2 orientazioni.

Se prendiamo i coefficienti in $\mathbb{Z}/(2)$ la medesima analisi appena fatta ci mostra che ogni componente connessa è orientabile modulo 2 in modo unico, in $Y$ esiste un unico $n-$ciclo non nullo somma di tutti i simplessi $n-$dimensionali di $Y$. Ne segue

1.10 TEOREMA. *Il gruppo degli $n-$cicli di $X, L$ a coefficienti interi è libero e generato da cicli di orientazione di ciascuna componente connessa orientabile.*

*Il gruppo degli $n-$cicli di $X, L$ a coefficienti $\mathbb{Z}/(2)$ è libero e generato da cicli di orientazione di ciascuna componente connessa.*

In particolare la nozione di orientabilità non dipende dalla triangolazione e $H_n(X, L)$ è un gruppo libero di rango il numero di componenti connesse orientabili. $H_n(X, L; \mathbb{Z}/(2))$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/(2)$ di dimensione il numero delle componenti connesse.

Se procediamo in omologia singolare dobbiamo ordinare i vertici e corrispondentemente ogni simplesso massimale $\sigma$ risulta ordinato. Il coefficiente con cui $\sigma$ appare nella classe di orientazione dipende dall'ordinamento e dalla scelta della orientazione, se supponiamo di avere fatto queste scelte denoteremo $\epsilon(\sigma)$ il segno con cui compare e scriveremo

$$\omega = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\sigma$$

dove $\sigma$ varia sui simplessi singolari associati ai simplessi massimali ordinati, $\omega$ è un ciclo che nel caso connesso genera la omologia di dimensione $n$, e si dirà ciclo di orientazione singolare.

Se $X$ è semplicemente puro di dimensione $n$, se esistono segni $\epsilon(\sigma) = \pm 1$, al variare di $\sigma$ sui simplessi singolari associati ai simplessi massimali ordinati, per cui:

$$\omega = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\sigma$$

è un ciclo, diremo ancora che $\omega$ è ciclo di orientazione singolare. In questo caso però anche se $X$ è connessa in codimensione 1 non sarà necessariamente vero che esistono solo due cicli di orientazione.

COMPLESSO TRASVERSO E VARIETÀ OMOLOGICHE    Prendiamo un complesso simpliciale $\mathcal{C}$ e decomponiamo i suoi vertici in due parti $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$. Prendiamo i sottocomplessi $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ formati da tutti i simplessi in $\mathcal{C}$ con vertici in $\mathcal{V}_1$ (risp. $\mathcal{V}_2$).

1.11 LEMMA. *$|\mathcal{C}_1|$ è retratto di deformazione di $|\mathcal{C}| - |\mathcal{C}_2|$ (similmente per $|\mathcal{C}_2|$).*

DIM. Un punto $P$ di $|\mathcal{C}| - |\mathcal{C}_2|$ si scrive come $tA + (1-t)B$, $A \in |\mathcal{C}_1|$, $B \in |\mathcal{C}_2|$ e $t \neq 0$. Il punto $A$ è ben definito mentre $B$ non è definito per $t = 1$.

La deformazione è

$$F_s(P) := sA + (1-s)P.$$

Vorremmo applicare il lemma precedente ad un qualsiasi complesso simpliciale $X$ ed un suo sottocomplesso $Y$. Per farlo però è necessario che $Y$ sia *pieno* ossia, detto $\mathcal{V}_1$ l'insieme dei vertici di $Y$ richiediamo che $Y$ che coincida con il sottocomplesso $\mathcal{C}_1$ formato da tutti i simplessi in $X$ con vertici in $\mathcal{V}_1$.

Dato un sottocomplesso pieno $Y$ di $X$ anche il sottocomplesso formato da tutti i simplessi con i vertici non in $Y$ è pieno e viene detto *ortogonale* ad $Y$ ed indicato con $Y^\perp$.

È evidente, con esempi semplicissimi, che non tutti i sottocomplessi $Y$ di $X$ sono pieni ma questa in realtà non è una vera difficoltà perché si vede immediatamente che la suddivisione baricentrica $\mathrm{Sd}(Y)$ è pieno nella suddivisione $\mathrm{Sd}(X)$ pertanto segue immediatamente dal Lemma precedente:

1.12 Definizione -Proposizione. *Nella suddivisione baricentrica* $\mathrm{Sd}(X)$ *i vertici non in* $\mathrm{Sd}(Y)$ *generano un complesso simpliciale* $\mathrm{Sd}(Y)^\perp$*, per abuso di notazione indicheremo il suo sostegno con* $Y^\perp$*. Si ha che* $Y^\perp$ *è retratto di deformazione di* $X - Y$*.*

Dim. Per definizione i due sottocomplessi $Sd(Y)$, $Y^\perp$ sono i sottocomplesi pieni associati alla decomposizione dei vertici della decomposizione baricentrica di $X$ nei due insiemi complementari:
$\mathcal{V}_1$ *baricentri dei simplessi in* $Y$*.*
$\mathcal{V}_2$ *baricentri dei simplessi non in* $Y$*.*

□

Vogliamo ora arrivare alla nozione di varietà omologica, premettiamo una

1.13 Definizione. *La codimensione di un simplesso* $A$ *di dimensione* $k$*, in un complesso* $\mathcal{C}$ *è* $m-k$ *dove* $m$ *è la massima dimensione dei simplessi di* $\mathcal{C}$ *contenenti* $A$*.*

Sia $\mathcal{C} := (\mathcal{V}, \mathcal{S})$ un complesso simpliciale, $\mathrm{Sd}(\mathcal{C})$ la sua suddivisione baricentrica. Per definizione i vertici di $\mathrm{Sd}(\mathcal{C})$ sono in corrispondenza biunivoca con i simplessi $A \in \mathcal{S}$ ed indicheremo con $b_A$ un tale vertice.

In una realizzazione geometrica $b_A$ può essere preso come il baricentro del corrispondente simplesso aperto o chiuso o anche un qualunque punto interno ad $A$.

I simplessi di $\mathrm{Sd}(\mathcal{C})$ sono in corrispondenza biunivoca con le successioni strettamente crescenti $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ di simplessi in $\mathcal{S}$, ovvero $\mathrm{Sd}(\mathcal{C})$ è il nervo del poset formato dai simplessi.

Vogliamo analizzare prima di tutto il Link del vertice $b_A$ nel complesso $\mathrm{Sd}(\mathcal{C})$.

Un simplesso di vertici $b_{A_i}$, della suddivisione baricentrica è in $Lk(b_A, \mathrm{Sd}(\mathcal{C}))$ se e solo se i simplessi $A_i$ si possono riordinare in modo tale che, per qualche $k$, $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \ldots A_k \subsetneq A \subsetneq A_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq A_m$.

Chiaramente un tale simplesso è il join di due simplessi $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ che è un simplesso della suddivisione baricentrica del bordo $\dot{A}$ e del simplesso $A_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq A_m$ generato dai baricentri di simplessi $A_j$ contenenti strettamente $A$.

1.14 Definizione. *L'insieme dei simplessi $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ per cui $A \subset A_1$ è il nervo del poset dei simplessi contenenti $A$ ed è detto stella trasversa ad $A$, indicata con $ST(A)$.*

*L'insieme dei simplessi $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_k$ per cui $A \subsetneq A_1$ è il nervo del poset dei simplessi contenenti $A$ propriamente ed è detto Link trasverso ad $A$, indicato con $LT(A)$ (o anche $LT(A, \mathcal{C})$ se si vuole mettere in evidenza il complesso ambiente).*

Esempio di Link trasverso:

Figura 1

1.15 Proposizione. *Se $LT(A)$ è il link di $b_A$ in $ST(A)$ e si ha $ST(A) = b_A * LT(A)$.*

*Abbiamo la formula di decomposizione per il Link:*

$$Lk(b_A, \mathrm{Sd}(\mathcal{C})) = \mathrm{Sd}(\dot{A}) * LT(A) \tag{1.16}$$

*Se $\mathcal{C}$ è puro di dimensione $n$ e $A$ è un simplesso di codimensione $k$ allora $ST(A)$, $LT(A)$ sono puri di dimensione $k, k-1$ rispettivamente.*

Esempio di decomposizione per il Link:

Figura 2

Corollario. *1) Per $b_A$ nella suddivisione di $\mathcal{C}$ vi è un (PL-)omemomorfismo fra $A \times \overline{\mathcal{C}_A}$ e la stella chiusa $\overline{St(b_A)}$.*

*2) Se $A$ è un simplesso $k$ dimensionale, di una PL-varietà $X$ di dimensione $n$, il suo link trasverso $LT(A)$ è una $n-k-1$ sfera PL se $A$ è interno ed una $n-k-1$ cella PL se $A$ è nel bordo.*

*3) Se $A$ è un simplesso $k$ dimensionale di una varietà omologica, $X$ di dimensione $n$ il suo link trasverso $LT(A)$ è una $n-k-1$ sfera omologica se $A$ è interno ed aciclico se $A$ è nel bordo.*

dim. 1) Questa parte segue dalla formula precedente 1.14 e dalla 7.12 del Cap. 6.

2) Partiamo dalla formula per il link $Lk(p,X) = \dot{A}) * LT(A) = S^{k-1} * LT(A)$, dal corollario della 7.21 del cap. 6 segue che, se $X$ è una PL varietà di dimensione $n$ si ha $Lk(p,X) = S^{n-1}$ e quindi $LT(A) = S^{n-k-1}$ se $p$ è un punto interno e $Lk(p,X) = D^{n-1}$ e quindi $LT(A) = D^{n-k-1}$ se $p$ è nel bordo.

Nelle ipotesi di varietà omologica

$$\begin{aligned} H_i(X, X-x) &= H_i^{\#}(Lk(p,X)) = H_i^{\#}(\dot{A} * LT(A)) \\ &= H_i^{\#}(S^{k-1} * LT(A)) = H_i^{\#}(S^0 * S^{k-2} * LT(A)) \end{aligned}$$

per concludere basta usare ripetutamente l 'isomorfismo di sospensione $H_i^{\#}(S^0 * Z) = H_{i-1}^{\#} Z$. □

I vertici della suddivisione baricentrica sono in corrispondenza con i simplessi di $\mathcal{S}$ e pertanto possiamo considerarli come un insieme parzialmente ordinato (dall'inclusione dei simplessi), un sottoinsieme di vertici $b_{A_i}$ che formi un simplesso è necessariamente totalmente ordinato e pertanto ha un minimo ed un massimo. In particolare dato comunque un punto $p \in |\mathcal{C}| = |\operatorname{Sd}(\mathcal{C})|$ possiamo associare ad esso il minimo $m(p)$ ed il massimo $M(p)$ dei vertici del suo simplesso supporto, abbiamo pertanto due possibili decomposizioni dello spazio $|\mathcal{C}| = |\operatorname{Sd}(\mathcal{C})|$ associate alle due funzioni $m(p),\ M(p)$.

1.17 Proposizione. *Indichiamo con $X = |\mathcal{C}| = |\operatorname{Sd}(\mathcal{C})|$.*

*i)* $|LT(A)| := \{p \in X | b_A < m(p)\}$,
*ii)* $|ST(A)| = |b_A * LT(A)| = \{p \in X | b_A \le m(p)\}$.
*iii)* $|\operatorname{Sd}(\dot{A})| := \{p \in X | M(p) < b_A$,
*iv)* $|A| = \{p \in X | M(p) \le b_A\}$.

In particolare ne segue che *l'interno* $\overset{\circ}{ST}(A) := |b_A * LT(A)| - |LT(A)|$ della stella trasversa ad $A$ è l'insieme dei punti

$$\overset{\circ}{ST}(A) = \{p \in |\mathcal{C}| \, | m(p) = b_A\}.$$

Gli insiemi $\overset{\circ}{ST}(A)$, al variare dei simplessi $A \in \mathcal{S}$ decompongono lo spazio dato.

Inoltre si vede immediatamente che il Link trasverso ad $A$ è l'unione delle stelle trasverse ad i simplessi $B$ tali che $A \subsetneq B$, in simboli

$$LT(A) = \cup_{A \subsetneq B} ST(B).$$

Per semplificare le notazioni indichiamo semplicemente $\mathcal{C}_A := \overset{\circ}{ST}(A)$

Abbiamo provato il

1.18 Teorema. *Lo spazio $|\mathcal{C}|$ si decompone negli insiemi disgiunti $\mathcal{C}_A$ al variare di $A$ nei suoi simplessi. $\mathcal{C}_A$ è un complesso simpliciale aperto di dimensione uguale alla codimensione di $A$.*

*La chiusura $\overline{C}_A$ di $\mathcal{C}_A$ è*

$$\overline{\mathcal{C}}_A := \cup_{A \subset B} \mathcal{C}_B$$

*$\overline{C}_A$ è il cono sul Link trasverso $\cup_{A \subsetneq B} \mathcal{C}_B$ di $b_A$.*

In definitiva tornando ai complessi ortogonali $Y^\perp$ vediamo che tale poliedro è unione dei coni $ST(B)$ per tutti i simplessi $B$ non in $Y$. Formalmente i poliedri $Y^\perp$ sono costruiti con i *blocchi* $ST(B)$ di *bordo* $LT(B)$ nel medesimo modo in cui un complesso simpliciale è costruito tramite i simplessi. Ad esempio se $Y_1 \subset Y_2$ sono due sottocomplessi ed $Y_2$ si ottiene da $Y_1$ aggiungendo un unico simplesso $B$ (e quindi $Y_1 \cap B = \dot{B}$) si ha che per gli ortogonali

$$Y_2^\perp \subset Y_1^\perp,\ Y_1^\perp = Y_2^\perp \cup ST(B),\ Y_2^\perp \cap ST(B) = LT(B)$$

ovvero $Y_1^\perp$ si ottiene da $Y_2^\perp$ attaccando il blocco $ST(B)$ lungo il suo bordo $LT(B)$.

In generale però la struttura dei blocchi $ST(B)$ può essere molto complicata, a seconda delle singolarità di $X$. I casi in cui potremo utilizzare questi blocchi per calcolare l'omologia sono:

Se $X - Y$ è una varietà PL si ha che i poliedri $ST(A)$ sono PL celle

Complesso duale In definitiva se $X$ è una varietà simpliciale omologica, da 19.3 segue che, ponendo $X_k := Y \cup \cup_{codim(A) \leq k,\ A \notin Y} C_A$, lo spazio $X_k$ si ottiene da $X_{k-1}$ attaccando tante celle omologiche $k-$dimensionali quanti sono i simplessi di codimensione $k$.

Pertanto il complesso cellulare $C_k^*(X, Y)$ asociato a questa cellularizzazione ha una stretta connessione con il complesso simpliciale di partenza.

Sia dunque $X$ una pseudovarietà di dimensione $n$ possibilmente con bordo $\delta X$.

Preso un $k-$simplesso $A$ un simplesso massimale del Link trasverso è di dimensione $n - k + 1$, della forma $\sigma := b_{k+1}, \ldots, b_n$ con $b_i$ il baricentro di un $i-$simplesso $A_i$ e

$A \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \cdots \subsetneq A_{n-1} \subsetneq A_n$. Un $n-1$ simplesso di $LT(A,X)$ è invece ottenuto eliminando uno dei $b_i$ da $\sigma$ ottenendo $\sigma_i := b_{k+1}, \ldots, \check{b}_i, \ldots, b_n$ . Ora se si elimina $b_i$ con $i < n$ si ha che $A_i = A_{i-1}a_i, A_{i+1} = A_{i-1}a_ia_{i+1}$ e quindi vi sono solo due simplessi massimali contenenti $\sigma_i$ il simplesso $\sigma$ e quello con al posto di $b_i$ il baricentro di $A_{i-1}a_ia_{i+1}$. Per $i = n$ abbiamo due simplessi massimali se $A_{n-1}$ non è nel bordo uno solo se $A_{n-1}$ è nel bordo. Ne deduciamo che

1.19 Proposizione. *Per ogni $k-$simplesso $A$, il poliedro $LT(A,X)$ è una pseudovarietà di dimensione $n-k-1$. Se $A$ non è nel bordo di $X$, $LT(A)$ è privo di bordo altrimenti $\delta LT(A,X) = LT(A,\delta X)$.*

# 2 Dualità di Poincaré

Nota In questa sezione applichiamo le analisi geometriche fatte nella sezione precedente per definire il complesso trasverso come complesso di catene singolari nel caso di una pseudovarietà orientata e finalmente provare la dualità di Poicaré nel caso di una varietà omologica orientata.

Il complesso trasverso singolare

Dato un poliedro $X$ con una triangolazione $K$ consideriamo la suddivisione baricentrica di $K$. Vogliamo discutere alcuni aspetti del suo complesso singolare ordinato relativamente a due speciali ordinamenti dei vertici.

Possiamo fissare un ordinamento dei vertici di $K$ e scegliere di ordinare i vertici dei simplessi della decomposizione, cioè i baricentri $b_A$ dei simplessi di $K$ in modo che:

1) Sui vertici di $K$ mantengano l'ordimento dato.

2) Sui baricentri l'ordinamento sia decrescente (risp. crescente). Ovvero tale che $b_A < b_B$ se $B$ è una faccia di $A$ (risp. se $A$ è una faccia di $B$).[1]

Un simplesso singolare ordinato, della decomposizione baricentrica, è della forma $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ dove $b_i$ è il baricentro di un simplesso $A_i$.

Nel primo caso $A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_k$ nel secondo invece $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_k$ .

Denotiamo con $\mathcal{S}_k$ i $k$ simplessi singolari ordinati di $K$ e $\mathcal{S}_k^-, \mathcal{S}_k^+$ i $k$ simplessi singolari ordinati della decomposizione nei due ordinamenti dati.

[1]Questo è manifestamente possibile. Infatti, dato un insieme finito $P$ parzialmente ordinato basta prendere un elemento minimale $x$ di $P$ e sceglierlo come primo elemento e poi continuare su $P - \{x\}$ per induzione.

Siano $C_*(K)$, $C_*^{\pm}(\mathrm{Sd}(K))$ i relativi complessi singolari ordinati. Definiremo l'operatore di suddivisione, nei due casi in oggetto, in modo tale che sia un morfismo di complessi:

$$\mathrm{Sd}^- : C_*(K) \to C_*^-(\mathrm{Sd}(K)),\ \mathrm{Sd}^-(A) := b_A * \mathrm{Sd}^-(\delta(A)),$$
$$\mathrm{Sd}^+ : C_*(K) \to C_*^+(\mathrm{Sd}(K)),\ \mathrm{Sd}^+(A) := (-1)^k \mathrm{Sd}^+(\delta(A)) * b_A,\ A \in \mathcal{S}_k$$

Ometteremo i simbolo $\pm$ quando non vi è ambiguità.

Una osservazione banale ma importante è che, se $X = |K|$ è un complesso di dimensione pura $n$ allora un simplesso massimale della sua decomposizione baricentrica ordinato in modo decrescente (risp. crescente), è necessariamente della forma $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ dove $b_i$ è il baricentro di un simplesso di dimensione $n - i$ (risp. $i$).

Si noti che la trasformazione naturale $\theta(\sigma) = \epsilon(k)\sigma_*(e_k, \ldots, e_0)$ induce un isomorfismo fra $C_*^+(\mathrm{Sd}(K))$ e $C_*^-(\mathrm{Sd}(K))$.

Sia $X$ una pseudovarietà $n-$dimensionale, orientabile con bordo $\delta(X)$, presa una sua triangolazione $K$ ed un ordinamento dei vertici, usando i simplessi singolari ordinati possiamo costruire una catena di orientazione $\omega_X = \sum \epsilon(\sigma)\sigma$, combinazione lineare con coefficienti $\pm 1$ di tutti i simplessi singolari ordinati massimali.

il cui bordo $\delta\omega_X := \omega_{\delta(X)}$ fornisce un ciclo di orientazione per il bordo. In particolare questo è importante quando $X$ è una varietà con bordo.

Applichiamo la definizione precedente alla suddivisione baricentrica ordinata in modo crescente (risp. decrescente).

Questa catena è pertanto somma, con segni, di simplessi singolari $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ dove $b_i$ è il baricentro di un simplesso $A_i$ di $K$ di dimensione $i$ con $A_0 \subset A_1 \cdots \subset A_n$.

Fissiamo ora un numero $k \leq n$ ed un $k-$simplesso $A$ di $K$ e raccogliamo tutti i termini della catena per cui $b_k$ è proprio il baricentro di $A$. Per ciascuno di tali termini $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ si ha che $(b_0, \ldots, b_k)$ è un simplesso massimale della decomposizione baricentrica di $A$ mentre $(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ è un simplesso massimale del link trasverso.

Inoltre insieme a tale simplesso devono apparire, nella catena $\omega_X$, anche tutti i simplessi del tipo $(c_0, \ldots, c_{k-1}, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ dove $(b_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)$ varia su tutti i simplessi (singolari ordinati) della suddivisione baricentrica di $A$. I segni con cui appaiono devono cancellarsi nel bordo e quindi questa somma si riscrive, usando la nozione di join e la catena $\mathrm{Sd}(A)$, che da una suddivivisione baricentrica del simplesso $A$, come $\pm\,\mathrm{Sd}(A) * (b_{k+1}, \ldots, b_n) = \pm\,\mathrm{Sd}(\delta A) * b_k * (b_{k+1}, \ldots, b_n)$.

Ora facciamo variare $(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ fra i simplessi massimali del Link trasverso ad $A$ raccogliendo un termine del tipo $\mathrm{Sd}(A) * \omega(A, X)$ dove $\omega(A, X)$ è una catena formata come somma, con coefficienti $\pm 1$, di tutti i simplessi massimali del Link trasverso. In definitiva abbiamo la formula fondamentale (per ogni $k$ scelto):

$$\omega_X = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}(A) * \omega(A, X)$$

dove la somma è su tutti i simplessi $k$ dimensionali della triangolazione di partenza, i simplessi sono singolari ordinati dall'ordinamento scelto.

Utilizzando i simboli $\pm$ per i due possibili ordinamenti, crescente e decrescente si ha:

(2.1)
$$\omega_X^- := \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \omega^-(A,X) * \mathrm{Sd}^-(A) = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \omega^-(A,X) * b_A * \mathrm{Sd}^-(\delta A) = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} c^-(A,X) * \mathrm{Sd}^-(\delta A).$$

(2.2)
$$\omega_X^+ := \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}^+(A) * \omega^+(A,X) = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}^+(\delta A) * b_A * \omega^+(A,X) = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}^+(\delta A) * c^+(A,X).$$

La catena $\omega^+(A,X)$, definita tramite la formula precedente, è somma con coefficienti $\pm 1$ di tutti i simplessi massimali (di dimensione $n-k-1$) del Link trasverso ad $A$.

La catena $c^+(A,X) := b_A * \omega^+(A,X)$ invece è somma con coefficienti $\pm 1$ di tutti i simplessi massimali (di dimensione $n-k$) della stella trasversa ad $A$. Simile analisi per il caso decrescente.

Calcoliamo

$$\omega_{\delta(X)}^- = \delta\omega_X^- := \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \delta(\omega^-(A,X)) * \mathrm{Sd}^-(A) + (-1)^{n-k} \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \omega^-(A,X) * \delta\mathrm{Sd}^-(A)$$

$$\omega_{\delta(X)}^+ = \delta\omega_X^+ := \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \delta\mathrm{Sd}^+(A) * \omega^+(A,X) + (-1)^{k+1} \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}^+(A) * \delta(\omega^+(A,X))$$

**N.B.** Ci restrigiamo di ora in poi al caso crescente ed omettiamo tutti i $+$ nei simboli.

Applicando le medesime definizioni alla catena di orientazione del bordo $\omega_{\delta(X)} = \delta\omega_X$ definiamo le catene $\omega(A,\delta(X))$ in modo tale che

$$\delta\omega_X := \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}(A) * \omega(A,\delta(X))$$

Preso un simplesso $A$ con baricentro $b_A$ analizziamo i contributi, nei due lati della xxx, dei simplessi in cui $b_A$ appare al posto $k$. Per il termine a destra questo contributo è $(-1)^{k+1}\,\mathrm{Sd}(A) * \delta(\omega(A,X))$.

Per il termine a sinistra abbiamo due casi a seconda che $A$ non sia oppure sia contenuto in $\delta(X)$.

Nel primo caso il contributo è 0, nel secondo usando le stesse convenzioni per la catena di orientazione del bordo abbiamo $\mathrm{Sd}(A) * \omega(A,\delta(X))$. Abbiamo provato:

2.3 Lemma.

$$\delta(\omega(A,X)) = \begin{cases} 0, & se \quad A \not\subseteq \delta(X) \\ (-1)^{k+1}\omega(A,\delta(X)), & se \quad A \subseteq \delta(X) \end{cases}$$

Ora poniamo per un $k-$simplesso:

$$c(A,X) := (-1)^k b_A * \omega(A,X)$$

Troviamo le formule:

$$\omega_X = \sum_{A\in\mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}(A) * \omega(A,X) = \sum_{B\in\mathcal{S}_{k+1}} \mathrm{Sd}(B) * \omega(B,X)$$

$$\sum_{B\in\mathcal{S}_{k+1}} (-1)^k \,\mathrm{Sd}(\delta B) * b_B * \omega(B,X)$$

$$= \sum_{B\in\mathcal{S}_{k+1}} (\sum_{A\in\mathcal{S}_k,\ A\subset B} n(B,A)\,\mathrm{Sd}(A)) * c(B,X)$$

$$= \sum_{A\in\mathcal{S}_k} \mathrm{Sd}(A) * [\sum_{B\in\mathcal{S}_{k+1},\ A\subset B} n(B,A)c(B,X)]$$

e quindi

$$\omega(A,X) = \sum_{\substack{A\subset B\subset \delta X,\\ \dim B=\dim A+1}} n(B,A)c(B,X)$$

similmente

$$\omega(A,\delta X) = \sum_{\substack{A\subset B\subset \delta X,\\ \dim B=\dim A+1}} n(B,A)c(B,\delta X)$$

Per le classi $c(A,X) := (-1)^k b_A * \omega(A,X)$ deduciamo:

$$\delta(c(A,X)) = \begin{cases} (-1)^k\omega(A,X), & \text{se} \quad A \not\subseteq \delta(X) \\ (-1)^k\omega(A,X) + b_A * \omega(A,\delta(X)), & \text{se} \quad A \subseteq \delta(X) \end{cases}$$

Pertanto (ponendo $c(A,\delta(X)) = 0$ se $A \not\subseteq \delta(X)$:

$$\delta(c(A,X)) = (-1)^k \sum_{\substack{A\subset B\subset \delta X,\\ \dim B=\dim A+1}} n(B,A)c(B,\delta X) + c(A,\delta(X))$$

Indichiamo con $C_*(X),\ SC_*(K),\ SC_*(\delta(X))$ i complessi simpliciali ordinati di $K$ e della suddivisione baricentrica di $X, \delta(X)$ ordinata in modo d crescente. L'operatore $\mathrm{Sd} = \mathrm{Sd}^+$ immerge $C_*(X)$ in $SC_*(K)$ ovvero $\mathrm{Sd}\, C_*(X) \subset SC_*(K)$.

Se ne deduce che

2.4 Teorema. *Sia $X$ una pseudovarietà orientabile di dimensione $n$:*

(1) *Le catene $c(B,X), c(B,\delta X)$ sono base di un sottocomplesso, che chiameremo complesso singolare trasverso, e indicheremo con $C_*^{tr}(X)$ del complesso $SC_*(X)$.*
*Per i numeri di incidenza di ha*

$$n(c_A, c_B) = (-1)^k n(B,A).$$

*Dove gli $n(B,A) = \pm 1$ sono i numeri della matrice di incidenza dei corrispondenti simplessi singolari ordinati.*

(2) *Le catene $c(B,\delta X)$ sono base di un sottocomplesso $C_*^{tr}(\delta(X))$ di $SC_*(\delta(X))$.*

(3) *Le classi $c(B,X)$ sono base per il complesso relativo $C_*^{tr}(X)/C_*^{tr}(\delta(X))$ sottocomplesso di $SC_*(X)/SC_*(\delta(X))$ (complesso della coppia $X, \delta X$).*

(4) *$\omega(A,X)$ è una catena di orientazione del Link trasverso di $A$ in $X$, se $A \nsubseteq \delta X$ tale catena è un ciclo .*

(5) *Se $A \subseteq \delta X$ allora $\omega(A,\delta X)$ è un ciclo di orientazione del Link trasverso di $A$ in $\delta X$.*

(6) *$c(A,X)$ è una catena di orientazione della stella trasversa di $A$ in $X$.*

(7) *Se $A \subseteq \delta X$ allora $c(A,\delta X)$ è una catena di orientazione della stella trasversa di $A$ in $\delta X$.*

$$\delta(c(A,X)) = (-1)^k \sum_{A \subset B \subset X,\ \dim B = \dim A + 1} n(B,A) c(B,X) + c(A,\delta(X))$$

$$\delta(c(A,\delta X)) = (-1)^k \sum_{A \subset B \subset \delta X,\ \dim B = \dim A + 1} n(B,A) c(B,\delta X)$$

(8) *Da un punto di vista formale algebrico il gruppo delle catene trasverse di dimensione $k$ si identifica con:*
 *i ) Nel caso di una pseudovarietà chiusa con il gruppo delle catene simpliciali orientate $C_{n-k}(\mathcal{C})$ di dimensione $n-k$.*
 *Il differenziale $C_k^*(X) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}^*(X)$ si identifica con $(-1)^k \delta_{n-k+1}^t$ dove $\delta_{n-k+1}^t$ è la matrice trasposta del differenziale $C_{n-k+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_{n-k+1}} C_{n-k}(\mathcal{C})$.*
 *i i) Nel caso di una varietà con bordo con il mapping cono dell'inclusione del complesso simpliciale di $\delta X$ in quello di $X$ ed il differenziale è sempre il trasposto del differenziale del mapping cono.*

(9) *Se $X$ è una varietà omologica (senza bordo) l'inclusione $C_*^{tr}(X) \to S_*(X)$ induce un isomorfismo in omologia.*

Dim. Tutto segue dalle formule trovate tranne l'isomorfismo in omologia nel caso in cui $X$ è una varietà. Per questo applichiamo il Lemma 12.2 alla stratificazione associata agli strati $C_A$ ed utilizziamo l'ipotesi fatta che le coppie $ST(A), LT(A)$ sono omologicamente come un disco ed il suo bordo, quindi la catena $c(A,X)$ genera l'omologia relativa della coppia $ST(A), LT(A)$, e ne è un ciclo di orientazione. $\square$

In effetti rivedendo la dimostrazione del Lemma 12.2 vediamo che abbiamo in realtà provato qualcosa di più preciso.

Preso un sottocomplesso $Y$ di $X$ sia $\mathcal{T}$ l'insieme dei simplessi di $X$ non in $Y$, nelle ipotesi che i link trasversi $LT(A),\ A \in \mathcal{T}$ siano sfere omologiche il complesso di catene singolari con base le catene $c(A, X),\ A \in \mathcal{T}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 12.1 e quindi la sua omologia coincide con la omologia di $Y^{\perp}$.

A questo punto si comincia ad intravedere una certa simmetria algebrica. La trasposizione deve ricordare la dualità degli spazi vettoriali, infatti a questo punto ci convinciamo che il modo intrinseco di enunciare il teorema provato è di identificare il complesso trasverso con il complesso che in grado $k$ ha lo spazio duale $C^*_{n-k}(\mathcal{C})$ e come bordo $C^*_{n-k+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{(-1)^k\delta^*_{n-k+1}} C^*_{n-k}(\mathcal{C})$, l'applicazione duale corretta con un opportuno segno.

In effetti è chiaro che nel caso precedente il complesso che ha come base le catene $c(A, X),\ A \in \mathcal{T}$, con $\mathcal{T}$ l'insieme dei simplessi di $X$ non in $Y$ si identifica al duale del complesso simpliciale $C_*(X - Y) = C_*(X)/C_*(Y)$. Abbiamo pertanto provato:

2.5 Proposizione. *Se $X = |\mathcal{C}|$ è una varietà simpliciale omologica connessa orientata e $\mathcal{Y}$ è un sottocomplesso la omologia di $X - |\mathcal{Y}|$ è calcolata dal complesso duale al complesso simpliciale $C_*(X - Y) = C_*(X)/C_*(Y)$.*

In effetti basta che $X - Y$ sia una varietà simpliciale omologica connessa orientata.

Ora dobbiamo dedurne delle conseguenze sull'omologia, la più semplice è:

2.6 Teorema Dualità di Poincaré. *Se $\mathcal{C}$ è una varietà simpliciale omologica connessa orientata di dimensone $n$ si ha per ogni $k$ l'eguaglianza fra numeri di Betti.*

$$b_k = b_{n-k} \tag{2.7}$$

*e l'uguaglianza fra i coefficienti di torsione nelle dimensioni $i$ e $n - 1 - i$ per ogni $i$.*

Dim. Mettendo le matrici dei differenziali in forma canonica si ha nel complesso duale le stesse matrici canoniche a meno del segno. Per i numeri di Betti la formula segue dal calcolo del rango mentre i coefficienti di torsione in dimensione $i$ sono i divisori elementari del differenziale $\delta_{i+1} = \pm\delta^t_{n-i}$. □

Se la varietà non è orientabile lo è comunque modulo 2 e la medesima analisi si svolge a coefficienti $\mathbb{Z}/(2)$ in questo caso abbiamo la simmetria $b_k(2) = b_{n-k}(2)$ fra i ranghi dei gruppi di omologia modulo 2.

Più in generale possiamo considerare il caso in cui si sia fatta una scelta di coefficienti $A$ e le coppie $\overline{C}_A, Lk_A$ siano celle omologiche nella omologia a coefficienti in $A$ per ottenere una dualità.

Questo è l'esempio degli *orbifold* che hanno localmente la struttura del quoziente di una cella per un gruppo finito di automorfismi simpliciali che preservano l'orientazione e che si vede sono una varietà omologica su $\mathbb{Q}$ pur avendo singolarità geometriche e possibile torsione. Gli enunciati trovati non sono ancora del tutto geometrici, per completarne l'aspetto geometrico conviene studiare sistematicamente i complessi duali introducendo la *coomologia* questo è il compito della prossima sezione.

## 3 Coomologia

NOTA Le costruzioni del paragrafo precedente aprono la via ad una nuova idea, quella di dualizzare un complesso di catene. Questa semplice osservazione algebrica in effetti porta molto lontano. Come vedremo l'introduzione di queste nuove idee, che portano alla idea di coomologia, hanno una forte valenza analitica e si legano, nella teoria delle varietà differenziabili, con il calcolo integro-differenziale delle forme.

COCATENE Consideriamo un complesso $\mathcal{C}$ i cui addendi $C_k$ siano gruppi liberi.

Dato un anello commutativo di coefficienti $R$ sia

$$C^k(R) := \underset{\mathbb{Z}}{\mathrm{HOM}}(C_k, R) \tag{3.1}$$

l'$R-$modulo di tutte le funzioni lineari da $C_k$ ad $R$.

Il bordo $\delta : C_k \to C_{k-1}$ induce per dualità un differenziale $d_k := \delta_k^* : C^{k-1}(R) \to C^k(R)$ detto **cobordo** ed abbiamo un **complesso di cocatene** in cui i differenziali aumentano il grado di 1. Questo complesso è detto **duale** di $\mathcal{C}$.

Formalmente l'accoppiamento di dualità $\mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}(C_k, R) \times C_k \to R$ verrà indicato con il simbolo $(f, a) \to \langle f|a\rangle,\ a \in C_k,\ f \in \mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}(C_k, R)$. Per il differenziale si ha la formula di aggiunzione

$$\langle f|\delta a\rangle = \langle df|a\rangle.$$

È chiaro che per i complessi di cocatene $\mathcal{C} := \{C^i, d\}$ valgono i medesimi teoremi che valgono per i complessi di catene opportunamente riformulati, basta cambiare formalmente gli indici da $n \to -n$ per passare da un concetto all'altro.

Si possono definire dunque:
i **cocicli** $Z^i := \{a \in C^i | da = 0\}$,
i **cobordi** $B^i := \{da \in C^i | a \in C^{i-1}\}$
e la **coomologia** $H^i(\mathcal{C}) := Z^i/B^i$.

Ritornando al complesso duale $\mathcal{C}^*$ di un complesso dato si osservi che, dalla formula di aggiunzione i bordi sono ortogonali ai cocicli ed i cicli ai cobordi e si ottiene un accoppiamento:

$$H^k(\mathrm{HOM}(\mathcal{C}, R)) \times H_k(\mathcal{C}) \to R.$$

Come usuale si può reinterpretare questo accoppiamento come un morfismo

$$i_X : H^k(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, R)) \to \mathrm{Hom}(H_k(\mathcal{C}), R),\ i_X(f)(a) := \langle f|a\rangle.$$

Osserviamo che:

I cocicli $Z_k$ sono quelle funzioni lineari su $C_k$ che si annullano su $B_k$ si identificano dunque a $\mathrm{Hom}(C_k/B_k, R)$. D'altra parte $\mathrm{Hom}(H_k(\mathcal{C}), R)$ si identifica allo spazio delle funzioni lineari su $Z_k$ che svaniscono su $B_k$.

Se $C_k$ è un gruppo libero abbiamo $C_k = Z_k \oplus C'_k$ e quindi una qualunque funzione lineare su $Z_k$ si estende ad una su $C_k$ e $Z^k \to \mathrm{Hom}(H_k(\mathcal{C}), R)$ è suriettivo. Il suo nucleo sono quelle funzioni su $C_k$ che si annullano su $Z_k$ ovvero $\mathrm{Hom}(C_k/Z_k, R)$. Pertanto:

3.2 PROPOSIZIONE. *Il morfismo* $i_X : H^k(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, R)) \to \mathrm{Hom}(H_k(\mathcal{C}), R)$ *è suriettivo con nucleo* $\mathrm{Hom}(C_k/Z_k, R)/\delta^* \mathrm{Hom}(C_{k-1}, R)$.

Nel capitolo sui coefficienti universali studieremo la natura di questo nucleo, proponiamo al lettore di studiarlo nel caso $R = \mathbb{Z}$ direttamente.

Per uno spazio $X$ definiamo dunque il complesso delle cocatene singolari $S^*(X, R)$ come il duale del complesso delle catene singolari $\mathrm{Hom}(S_*(X), R)$. Pertanto una cocatena di dimensione $k$ è una arbitraria funzione a valori in $R$ sull'insieme dei simplessi singolari.

Similmente si possono trattare le cocatene simpliciali.

Geometricamente penseremo ad una cocatena come una specie di integrazione formale di una qualche non meglio definita *forma*.

Dato un sottospazio $A$ di $X$ definiamo anche $S^*(X, A; R) := \mathrm{Hom}(S_k(X, A), R)$ si consideri il gruppo $\tilde{S}_k(X, A)$ dei $k-$simplessi singolari a valori in $X$ ma non in $A$. $S_k(A) \oplus \tilde{S}_k(X, A) = S_k(X)$. Pertanto per i moduli duali si ha una identificazione

$$\mathrm{Hom}(S_k(A), R) \oplus \mathrm{Hom}(\tilde{S}_k(X, A), R) = \mathrm{Hom}(S_k(X), R).$$

Ne segue che la successione esatta di complessi

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{\ i\ } S_*(X) \xrightarrow{\ p\ } S_*(X, A) \longrightarrow 0$$

si dualizza ad una successione esatta

$$0 \longrightarrow S^*(X, A; R) \xrightarrow{\ p^*\ } S_*(X) \xrightarrow{\ i^*\ } S_*(A) \longrightarrow 0$$

i gruppi di coomologia singolari si definiscono a partire da questi complessi.

In modo simile si dualizza anche il complesso aumentato e si può dunque definire anche la *coomologia ridotta*.

Dalle definizioni date e dalla teoria dei complessi si deduce una successione esatta lunga di coomologia

$$\ldots \longrightarrow H^i(X, A; R) \longrightarrow H^i(X; R) \longrightarrow H^i(A; R) \longrightarrow H^{i+1}(X, A; R) \longrightarrow \ldots$$

Dato un morfismo $f : X \to Y$ questo induce un morfismo di complessi

$$f^* : S^*(Y; R) \to S^*(X; R)$$

dato per dualità da $\langle f^*(\phi)|\sigma\rangle := \langle \phi|f_*(\sigma)\rangle = \langle \phi|f \circ \sigma\rangle$.

Pertanto vengono indotti morfismi in coomologia

$$f^k : H^k(Y; R) \to H^k(X; R)$$

I gruppi di coomologia sono dunque *funtori controvarianti.* Stessi risultati valgono per le coppie.

La omotopia anche induce omotopia di complessi di cocatene. Ora però la mappa $s_k : S_k(X) \to S_{k+1}(Y)$ induce per dualità $s_k^* : S^{k+1}(Y; R) \to S^k(X; R)$ la proprietà $d_{k+1}s_k + s_{k-1}d_k = f_k - g_k$ si dualizza in $s_k^* d_{k+1}^* + d_k^* s_{k-1}^* = f_k^* - g_k^*$.

Si ha quindi di nuovo che applicazioni omotope inducono la medesima applicazione in coomologia.

Per l'escissione dobbiamo fare una piccola osservazione.

3.3 Lemma. *Sia dato un complesso di catene $\mathcal{C} := C_i$ i cui termini sono gruppi liberi ed aciclico, allora $\mathcal{C}$ ha una omotopia contraente ed il complesso duale $C^i :=$ Hom$(C_i, R)$ è anche aciclico.*

Dim. Sfruttiamo il fatto che un sottogrupppo di un gruppo libero è libero.

Pertanto, presa una base di $B_{i-1}$, possiamo sollevarla ad una base di un complementare $U_i$ di $Z_i$ in $C_i$.

Quindi, $C_i = Z_i \oplus U_i$, $\delta_i$ ristretta a $U_i$ è un isomorfismo con $B_{i-1} = Z_{i-1}$. Definiamo $s : C_i = Z_i \oplus U_i \to Z_{i+1} \oplus U_{i+1} = C_{i+1},\ s(a, b) = (0, c),\ \delta(c) = a$ è immediato verificare che $s\delta + \delta s = 1$ ossia $s$ è una omotopia contraente. Questa identità passa ai duali e prova che anche il duale è contraibile. $\square$

Per l'escissione si ricordi che l'inclusione di complessi (cf. 9.1) $S_*(X - U, A - U) \to S_*(X, A)$ induce un isomorfismo in omologia, costruendo il complesso quoziente si ha una successione esatta di complessi di gruppi liberi

$$0 \to S_*(X - U, A - U) \to S_*(X, A) \to S_*(X - U, A - U)/S_*(X, A) \to 0$$

dalla successione esatta lunga segue che il complesso $S_*(X - U, A - U)/S_*(X, A)$ è contraibile.

Dualizzando si ha una successione esatta

$$0 \to HOM(S_*(X - U, A - U)/S_*(X, A), \mathbb{Z}) \to S^*(X, A) \to S^*(X - U, A - U) \to 0$$

in cui il primo complesso è aciclico dal Lemma precedente e quindi l'applicazione $S^*(X, A) \to S^*(X - U, A - U)$ induce un isomorfismo in coomologia.

Per un punto si verifica immediatamente, ispezionando il complesso duale che $H^i(P) = 0, \forall i > 0,\ H^0(P) = R$.

Abbiamo quindi le proprietà formali duali di quelle date per l'omologia. Tutti i ragionamenti fatti per l'omologia si ripetono pari pari ed otteniamo il calcolo della coomologia per le sfere le copie $\Delta_n, \dot{\Delta}_n$ ed infine il calcolo della coomologia di un $CW$ complesso dualizzando il suo complesso cellulare.

Algebre differenziali Tutto questo al momento sembra piuttosto formale e nulla di nuovo. Le cose interessanti cominciano con la scoperta che la coomologia ha una struttura naturale di algebra graduata commutativa (in senso graduato).

3.4 Definizione. *Un algebra differenziale graduata è un algebra associativa graduata*[2]
$A := \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ *con un operatore* $d : A \to A$ *detto* **differenziale** *per cui*

$$d^2 = 0,\ d(A_i) \subset A_{i+1}, \quad e\ \forall a \in A_i,\ \forall b \in A_j,\ d(ab) = d(a)b + (-1)^i a d(b) \tag{3.5}$$

*Un algebra differenziale graduata si dice commutativa (in senso graduato) se*

$$\forall a \in A_i,\ \forall b \in A_j,\ ab = (-1)^{ij} ba$$

Il lettore deve imparare la seguente regola d'oro del calcolo graduato, i segni appaiono in questo modo, gli elementi hanno gradi ma anche i morfismi hanno gradi, se $f : A_i \to A_{i+k}$ si dice che $f$ ha grado $k$ (che può ancheessere negativo). Ogni volta che si scambiano due simboli $ab$ in $ba$ se $a$ ha grado $i$ e $b$ ha grado $j$ si pensa come se $a$ fosse una stringa di $i$ elementi e $b$ una di $j$ (di grado 1), per passare $a$ a destra di $b$ gli $i$ elementi di $a$ devono passare ciascuno oltre i $j$ elementi di $b$ ed ogni scambio di elementi di grado 1 deve comportare un cambiamento di segno!

La regola $d(ab) = d(a)b + (-1)^i a d(b)$ è come la regola di Leibnitz della derivata e si esprime dicendo che $d$ è una **derivazione** (graduata).

Un algebra graduata $A$ è anche un complesso di cocatene, ignorando la moltiplicazione, ma ora si ha

3.6 Teorema. *I cocicli* $Z := \oplus_i Z_i$ *di* $A$ *sono un sottoanello. I cobordi* $B := \oplus_i B_i$ *sono un ideale in* $Z$ *quindi la coomologia* $H^*(A) := Z/B$ *è un'algebra graduata.*

Dim. Si calcola su elementi omogenei. Se $d(a) = d(b) = 0, d(ab) = d(a)b \pm ad(b) = 0$. Se $da = 0, b = dc$ allora $ab = \pm d(ab),\ ba = \pm d(ba)$. □

Le algebra graduate formano evidentemente una categoria, dove i morfismi sono gli omomorfismi di algebre, che preservano il grado e commutano con il differenzile (ossia

[2]vuol dire che $A_i A_j \subset A_{i+j}$

sono omomorfismi di complessi). È chiaro dalle formule che un tale omomorfismo induce un omomorfismo fra le algebre di coomologia.

Intermezzo funtoriale Riprendiamo i meccanismi delle trasformazioni naturali fra i funtori $S_m(X)$ discusse in 8.2.

Sia $\theta_X : S_n(X) \to S_m(X)$ una trasformazione naturale dei due funtori e

$$c_m \in S_m(\Delta_n) := \theta_{\Delta_n}(\Delta_n).$$

Per un simplesso $\sigma : \Delta_n \to X$ dalla naturalità di $\theta$ abbiamo:

$$\theta_X(\sigma) = \theta_X(\sigma_*(\Delta_n)) = \sigma_*(\theta_{\Delta_n}(\Delta_n)) = \sigma_*(c_m). \tag{3.7}$$

e $\theta$ è univocamente determinata dalla catena $c_m$, viceversa una qualunque ccatena $c_m$ determina una tale trasformazione naturale. Una sequenza di catene $c_n \in S_n(\Delta_n)$ determina una trasformazione naturale fra i **complessi** $S_*(X)$ se e solo se $\delta c_n = c_{n-1}, \forall n$.

Con queste idee arriviamo ad un

3.8 Lemma. *Se $\theta_i : S_i(X) \to S_i(X)$ è una trasformazione naturale compatibile con la struttura di complesso e $\theta_0 : S_0(\Delta_0) \to S_0(\Delta_0)$ è l'identità allora $\theta$ è naturalmente omotopa all'identità ed induce quindi l'identità in omologia per ogni $X$.*

Dim. Definiamo $\phi : \theta - 1$, questa è una trasformazione naturale compatibile con la struttura di complesso e per costruzione $0 = \phi_0 : S_0(\Delta_0) \to S_0(\Delta_0)$.

Basta provare dunque che $\phi$ è naturalmente omotopa a 0.

Per ogni $n$ sia $c_n := \phi_n \Delta_n,\ c_0 = 0$ vogliamo costruire (ricorsivamente) una opportuna successione di catene $t_n \in S_{n+1}(\Delta_n)$ che definiscano la omotopia richiesta.

Detta $\tau_n : S_n(X) \to S_{n+1}(X)$ la trasformazione naturale definita da

$$\tau_n(\sigma) := \sigma_*(t_n)$$

vogliamo che sia $\delta\tau_n + \tau_{n-1}\delta = \phi_n$ e quindi, sfruttando il fatto che le trasformazioni naturali sono determinate dalle catene che le definiscono vogliamo scegliere $t_n$ in modo tale che

$$\delta t_n + \tau_{n-1}\delta\Delta_n = c_n$$

Per poterlo fare al passo $n$, poiché $\Delta_n$ è aciclico basta provare $\delta(\tau_{n-1}\delta\Delta_n - c_n) = 0$, questo implica l'esistenza di $t_n$.

Per provare $\delta(\tau_{n-1}\delta\Delta_n - c_n) = 0$ utilizziamo l'induzione $\delta\tau_{n-1} + \tau_{n-2}\delta = \phi_{n-1}$. Calcoliamo su $\delta\Delta_n$ questa identità di trasformazioni naturali. Si ottiene

$$(\delta\tau_{n-1} + \tau_{n-2}\delta)\delta\Delta_n = \phi_{n-1}\delta\Delta_n, \quad \delta\tau_{n-1}\delta\Delta_n = \delta\phi_n\Delta_n = \delta c_n$$

ovvero l'identità richiesta che implica l'esistenza di una omotopia contraente naturale fra $\phi$ e 0 (la base dell'induzione è $c_0 = 0$). $\square$

Corollario. *Sia $\theta : S_*(X) \to S_*(X)$ una trasformazione naturale di complessi allora esiste un $m \in \mathbb{Z}$ per cui in omologia $\theta_*$ è la moltiplicazione per $m$.*

Dim. Per $\Delta_0$ si deve avere $\theta(e_0) = me_0$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$. Allora $\theta - m$ è una trasformazione naturale che soddisfa le ipotesi precedenti e quindi induce 0 in omologia.

Il prodotto cup Ora mostreremo che $S^*(X; R)$ ha una naturale struttura di algebra differenziale graduata.

Per questo, dato il simplesso standard $\Delta_n$ ed un numero $i \leq n$ consideriamo i due $i-$simplessi singolari in $\Delta_n$:

$$ {}_i\Delta_n := (e_0, \dots, e_i), (\Delta_n)_i := (e_{n-i}, \dots, e_n) $$

formati dai primi, risp. ultimi vertici ordinati di $\Delta_n$. Per un qualunque $n-$simplesso singolare $\sigma$ poniamo ${}_i\sigma := \sigma_*({}_i\Delta_n)$, $\sigma_i := \sigma_*((\Delta_n)_i)$.

Ora possiamo definire il prodotto di due cocatene.

3.9 Definizione. *Date due cocatene $f \in S^i(X; R)$, $g \in S^j(X; R)$ il loro* **prodotto cup**, *indicato con $f \cup g$, è la cocatena di dimensione $i + j$ che, su un simplesso $\sigma$ di dimensione $i + j$ vale:*

$$ \langle f \cup g|\sigma\rangle := \langle f|{}_i\sigma\rangle\langle g|\sigma_j\rangle = \langle f|\sigma_*(e_0, \dots, e_i)\rangle\langle g|\sigma_*(e_{i+1}, \dots, e_n)\rangle \tag{3.10} $$

Le prime proprietà di questo prodotto sono contenute nel:

3.11 Teorema.

1. *Un morfismo $f : X \to Y$ induce un omomorfismo $f^* : S^*(Y; R) \to S^*(X; R)$ di algebre differenziale graduate ed un omomorfismo $f^* : H^*(Y; R) \to H^*(X; R)$ di algebre graduate.*
2. *Il prodotto cup rende $S^*(X; R)$ un algebra differenziale graduata con unità.*
3. *L'algebra di coomologia $H^*(X; R)$ indotta è commutativa in senso graduato.*
4. *Per una coppia $X, Y$ si ha che $H^*(X, Y; R)$ è un $H^*(X; R)$ modulo.*

Dim. 1) La proprietà di omomorfismo è immediata dalla definizione.

2a) Per l'associatività basta osservare che, dato un $i + j + k$ simplesso $\sigma$ e tre classi di coomologia $a, b, c$ di gradi $i, j, k$ rispettivamente, si ha

$$ \begin{aligned} (a \cup b) \cup c(\sigma) := \langle a \cup b|\sigma_*(e_0, \dots, e_i, \dots, e_{i+j})\rangle\langle c|\sigma_*(e_j, \dots, e_{i+j+k})\rangle = \\ \langle a|\sigma_*(e_0, \dots, e_i)\rangle\langle b|\sigma_*(e_i, \dots, e_{i+j})\rangle\langle c|\sigma_*(e_j, \dots, e_{i+j+k})\rangle = \\ \langle a|\sigma_*(e_0, \dots, e_i)\rangle\langle b|\sigma_*(e_i, \dots, e_{i+j})\rangle\langle c|\sigma_*(e_j, \dots, e_{i+j+k})\rangle = \\ \langle a|\sigma_*(e_0, \dots, e_i)\rangle\langle b \cup c|\sigma_*(e_i, \dots, e_{i+j}, \dots, e_{i+j+k})\rangle = \langle a \cup (b \cup c)|\sigma\rangle \end{aligned} $$

L'unità è chiaramente la cocatena $1 \in S^0(X;R)$ definita da $\langle 1|p\rangle := 1$ per ogni simplesso ridotto ad un punto $p$.

2b) Per la derivazione basta vedere come si compongono le facce $F_i$ con gli operatori ${}_i\sigma, \sigma_j$, siano $f, g$ cocatene di gradi $i, j$ con $n = i+j$ il calcolo è diretto, calcoliamo $\langle d(f \cup g)|\sigma\rangle$ e $\langle df \cup g + (-1)^i f \cup dg|\sigma\rangle$ per un simplesso $\sigma : \Delta_{i+j} \to X$.

Scriviamo $\Delta_{i+j} = \Delta_i * \Delta_j$ come join e per semplicità indichiamo i due insiemi di vertici di $\Delta_i * \Delta_j$ come $(e_0, e_1, \ldots, e_i, f_0, f_1, \ldots, f_j)$.

$$\begin{aligned} \langle d(f \cup g)|\sigma\rangle = \langle d(f \cup g)|\sigma_*(\Delta_{i+j}\rangle = \langle f \cup g|\sigma_*(\delta(\Delta_i * \Delta_j))\rangle = \\ \langle f \cup g|\sigma_*(\delta(\Delta_i) * \Delta_j + (-1)^{i+1}\Delta_i * \delta(\Delta_j))\rangle = \\ \langle f|\sigma_*(\delta(\Delta_i) * f_0)\rangle\langle g|\sigma_*(\Delta_j)\rangle + (-1)^{i+1}\langle f|\sigma_*(\Delta_i)\rangle\langle g|\sigma_*(e_i * \delta(\Delta_j))\rangle \end{aligned}$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} \langle df \cup g + (-1)^i f \cup dg|\sigma_*(\Delta_i * \Delta_j)\rangle = \\ \langle df|\sigma_*(\Delta_i * f_0\rangle\langle g|\sigma_*(\Delta_j)\rangle + (-1)^i\langle f|\sigma_*(\Delta_i\rangle\langle dg|\sigma_*(e_i * \Delta_j)\rangle = \\ \langle f|\sigma_*(\delta(\Delta_i * f_0)\rangle\langle g|\sigma_*(\Delta_j)\rangle + (-1)^i\langle f|\sigma_*(\Delta_i\rangle\langle g|\sigma_*(\delta(e_i * \Delta_j))\rangle = \\ \langle f|\sigma_*(\delta(\Delta_i) * f_0)\rangle\langle g|\sigma_*(\Delta_j)\rangle + (-1)^{i+1}\langle f|\sigma_*(\Delta_i)\rangle\langle g|\sigma_*(\Delta_j)\rangle + \\ +(-1)^i\langle f|\sigma_*(\Delta_i\rangle\langle g|\sigma_*(\Delta_j)\rangle - (-1)^i\langle f|\sigma_*(\Delta_i\rangle\langle g|\sigma_*(e_i * \delta(\Delta_j))\rangle = \\ \langle f|\sigma_*(\delta(\Delta_i) * f_0)\rangle\langle g|\sigma_*(\Delta_j)\rangle - (-1)^i\langle f|\sigma_*(\Delta_i\rangle\langle g|\sigma_*(e_i * \delta(\Delta_j))\rangle \end{aligned}$$

l'eguaglianza è provata.

3) La commutatività è più difficile, perché non vale a livello di cocatene ma solo in coomologia.

L'idea è semplice, si tratta di cambiare ogni simplesso singolare in uno omologo ottenuto a meno del segno ordinando in verso opposto i vertici.

Per fare questo in modo naturale bisogna introdurre un segno e costruire una successione di trasformazioni naturali $\theta_n : S_n(X) \to S_n(X)$, per un $n-$ simplesso:

$$\theta_n\sigma = \epsilon(n)\sigma_*(e_n, \ldots, e_0) \tag{3.12}$$

Per la compatibilità con il bordo di queste trasformazioni naturali calcoliamo:

$$\begin{aligned} &\delta(\theta\sigma) = \epsilon(n)\sigma_*(\delta(e_n, \ldots, e_0)) = \epsilon(n)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_*((e_n, \ldots, \check{e}_{n-i}, \ldots, e_0)) \\ &= \epsilon(n)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\epsilon(n-1)\theta\sigma_*((e_0, \ldots, \check{e}_{n-i}, \ldots, e_n)) = \\ &\epsilon(n)\epsilon(n-1)(-1)^n\theta(\delta\sigma) \end{aligned}$$

La condizione $\delta(\theta\sigma) = \theta(\delta\sigma)$ è quindi che sia $\epsilon(n)\epsilon(n-1) = (-1)^n,\ \epsilon(0) = 1$.

Si vede immediatamente che

$$\epsilon(n) := (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Si noti che questa trasfromazione naturale di complessi è data dalla successione di catene $c_n := (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(e_n, \dots, e_0)$.

Per dualità $\theta$ induce una trasformazione naturale sulle cocatene $\langle \theta^*(f)|\sigma\rangle := \langle f|\theta(\sigma)\rangle$.

I risultati della sezione precedente implicano che $\theta$ (e sempre per dualità $\theta^*$), è naturalmente omotopa all'identità.

Vogliamo ora vedere come si comporta $\theta^*$ rispetto al prodotto $\cup$.

Prendiamo $n = i + j$ e $f, g$ due cocatene di grado $i, j$.

$$\langle \theta^*(f \cup g)|\sigma\rangle := \langle f \cup g|\epsilon(n)\sigma_*((e_n, \dots, \dots, \dots, e_0)\rangle =$$
$$\epsilon(n)f(e_n, \dots, \dots, e_{n-i})g(e_{n-i}, \dots, \dots, e_0) = \epsilon(i+j)\epsilon(i)\epsilon(j)\langle \theta^*(g) \cup \theta^*(f)|\sigma\rangle$$

da cui

$$\theta^*(f \cup g) = \epsilon(i+j)\epsilon(i)\epsilon(j)\theta^*(g) \cup \theta^*(f) = (-1)^{ij}\theta^*(g) \cup \theta^*(f). \tag{3.13}$$

Si osservi che, essendo $n = i + j$ si ha $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)+j(j+1)}{2} \cong ij \bmod 2$.

In coomologia questa identità induce la legge commutativa richiesta.

4 ) La verifica per la coppia la lasciamo al lettore. □

Coomologia simpliciale Vogliamo discutere ora la coomologia dal punto di vista simpliciale. Sia dunque dato un complesso simpliciale $\mathcal{C}$ e supponiamo di ordinarne i vertici.

In questo modo abbiamo visto (§12) che possiamo selezionare un sottocomplesso $C_*(X)$ del complesso singolare $S_*(X)$, che induce un isomorfismo in omologia e che ha come base i simplessi singolari associati ai simplessi di $\mathcal{C}$ ordinati secondo l'ordinamento dato.

Il complesso $S_*(X)/C_*(X)$ è un complesso di gruppi liberi con omologia nulla.

Consideriamo ora il complesso duale di tale complesso $C_*(X)$ che indichiamo con $C^*(X)$. La successione esatta corta $0 \to C_*(X) \to S_*(X) \to S_*(X)/C_*(X) \to 0$ ne induce una duale

$$0 \to (S(X)/C(X))^* \to S^*(X) \to C^*(X) \to 0$$

per il Lemma 3.3 si ha che $(S(X)/C(X))^*$ è aciclico e quindi che la proiezione $S^*(X) \to C^*(X)$ induce un isomorfismo in coomologia.

Ora osserviamo che il nucleo di questa proiezione è un ideale rispetto al $\cup-$prodotto. Infatti una cocatena è in $(S(X)/C(X))^*$ se e solo se si annulla su tutti i simplessi singolari ordinati di $C_*(X)$, ma la parte iniziale e quella finale di un simplesso ordinato in $C_*(X)$ è ancora in $C_*(X)$ e quindi la proprietà di ideale segue.

Se ne deduce che

3.14 Proposizione. *$C^*(X)$ è un'algebra differenziale graduata e la formula del prodotto $\cup$ per le cocatene di $C^*(X)$ coincide con la formula 3.10 ristretta ai simplessi ordinati.*

In particolare il prodotto in coomologia è computabile dalla struttura simpliciale.

In pratica la descrizione di $C^*(X)$ come algebra differenziale graduata è la seguente.

Per ogni simplesso ordinato $A := (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ indichiamo con $f^A$ l'elemento della base duale che vale 1 su questo simplesso e 0 altrimenti. Possiamo descrivere il cobordo e la moltiplicazione di queste cocatene elementari che sono una base di $C^*(X)$.

Per quanto riguarda il differenziale, poichè $\langle df^A|B\rangle = \langle f^A|\delta B\rangle$ la sua matrice nella base duale è semplicemete a matrice trasposta di $\delta$

Utilizziamo i numeri di incidenza, se $n(B,A)$, è il coefficiente di $A$ in $\delta B$, otteniamo

$$df^A = \sum_{B\supset A,\ |B|=|A|+1} n(B,A) f^B. \tag{3.15}$$

Calcoliamo ora il prodotto, dati $A = (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$, $B = (v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_h})$ si ha $f^A \cup f^B = 0$ a meno che $v_{i_k} = v_{j_0}$ e $C := (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_{j_1}, \dots, v_{j_h})$ non sia un simplesso nel qual caso $f^A \cup f^B = f^C$.

Una seconda proprietà importante consiste nell'osservare che valgono alcune proprietà generali di dualità che seguono come nella dimostrazione della dualità di Poincaré.

Dalla discussione di §2 abbiamo visto che esiste un omomorfismo indotto dall'accoppiamento di dualità $i_X : H^k(X;R) \to \mathrm{Hom}(H_k(X;R),R) = H_k(X;R)^*$

3.16 Teorema. *Se $X$ è un complesso simpliciale $R = \mathbb{Z}$ il nucleo di $i_X$ è il sottogruppo di torsione e $i_X$ è suriettivo.*

*Se $R$ è un campo $i_X$ è un isomorfismo.*

Dim. Mettiamo il complesso di catene simpliciali $C_k(X)$ in forma canonica con i differenziali diagonali.

Spezziamo allora $C_k(X) = Z_k(X) \oplus \overline{C}_k(X)$ ed inoltre $Z_k = U_k \oplus \overline{Z}_k$ in modo tale che $\delta_k$ induce un isomorfismo fra $\overline{C}_k(X)$ e $B_{k-1}$ ed inoltre $B_k \subset U_k$ e $U_k/B_k$ è la parte di torsione di $H_k(X) = U_k/B_k \oplus \overline{Z}_k$.

Quando dualizziamo abbiamo la decomposizione $C^k(X) = U_k(X)^* \oplus \overline{Z}_k(X)^* \oplus \overline{C}_k(X)^*$ e ora $\overline{Z}_k(X)^* \oplus \overline{C}_k(X)^*$ si identifica allo spazio dei cocicli mentre esaminando la duale della applicazione $\delta : \overline{C}_k(X) \xrightarrow{\cong} B_{k-1} \subset Z_{k-1}$ vediamo che i cobordi $B^k$ in $C^k(X)$ sono contenuti in $\overline{C}_k(X)^*$ e la torsione della coomologia è $\overline{C}_k(X)^*/B^k$.

Le parti prive di torsione $\overline{Z}_k(X)$ e $\overline{Z}_k(X)^*$ della coomologia sono in dualità e poiché sono gruppi liberi di rango finito l'enunciato segue.

La seconda parte è simile solo che si semplifica in quanto si ha $B_k = U_k$ dalle proprietà degli spazi vettoriali. □

COCATENE ANTISIMMETRICHE E DEGENERI Abbiamo altre possibilità oltre a quella di prendere i simplessi ordinati. Possiamo lavorare con i simplessi orientati in questo caso una cocatena si può vedere come una funzione $f(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ dove gli $a_i$ variano sui vertici con la proprietà che $f(a_0, a_1, \ldots, a_k) = 0$ se $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ non formano un simplesso ed inoltre la *antisimmetria*:

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \epsilon_\sigma f(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)}), \quad \sigma \in S_{k+1}, \quad \epsilon_\sigma \quad \text{il segno della permutazione}$$

In particolare la cocatena si annulla se vi è una ripetizione fra i vertici $a_i$.

In questo caso abbiamo però la dfficoltà che la struttura prodotto di simplessi orientati non è definita intrinsecamente e quindi dobbiamo ritornare per il prodotto $\cup$ ai simplessi ordinati.

Oppure è conveniente invece prendere tutti i possibili simplessi (anche degeneri) $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ che si possono pensare come particolari simplessi singolari e si può provare che si ottiene sempre un complesso omotopo agli altri descritti e che quindi calcola sempre la coomologia del complesso simpliciale. In questo caso il prodotto $\cup$ è definito a livello di cocatene.

## 4 Prodotto $\cap$ e dualità

NOTA La coomologia permette di reinterpretare la dualità di Poincaré in modo più preciso che verrà utilizzato per fondare la teoria della intersezione sulle varietà.

IL PRODOTTO CAP ($\cap$) In questo paragrafo omologia e coomologia si uniscono per arrivare ad alcuni risultati geometrici legati alla dualità delle varietà.

Per convenzione indichiamo l'accoppiamento di dualità $S_n(X;A) \times S^n(X;A) \to A$ con a formula $(\sigma, f) \to \langle \sigma | f \rangle$.

Iniziamo con raffinare i legami fra omologia e coomologia con una definizione fondamentale (che estende tale accoppiamento):

4.1 DEFINIZIONE. *Introduciamo il prodotto* $\cap : S_m(X;A) \times S^n(X;A) \to S_{m-n}(X;A)$.

*Data una* $n-$*cocatena* $f$ *ed un* $m-$*simplesso* $\sigma$ *poniamo*

$$\sigma \cap f := \sigma_*(e_n, \dots, e_m)\langle \sigma_*(e_0, e_1, \dots, e_n) | f \rangle \text{ se } m \geq n, \ 0 \text{ altrimenti.} \tag{4.2}$$

Il prodotto così introdotto si estende per bilinearietà.[3]

È necessario sviluppare alcune proprietà formali di questo prodotto che va pensato come ad una parziale integrazione.

Il primo fatto importante è che questa operazione è una struttura di **modulo destro unitario** per $S_*(X;A)$ rispetto all'anello delle cocatene $S^*(X;A)$.

$$\sigma \cap (f \cup g) = (\sigma \cap f) \cap g, \ \sigma \cap 1 = \sigma. \tag{4.3}$$

Infatti la formula $\sigma \cap 1 = \sigma$ è immediata. Siano $\sigma, f, g$ in gradi $m$, $i$, $j$ rispettivamente.

$$\begin{aligned}
&\sigma \cap (f \cup g) = \sigma_*(e_{i+j}, \dots, e_m)\langle \sigma_*(e_0, e_1, \dots, e_{i+j}) | f \cup g \rangle = \\
&\sigma_*(e_{i+j}, \dots, e_m)\langle \sigma_*(e_0, e_1, \dots, e_i) | f \rangle \langle \sigma_*(e_i, e_1, \dots, e_{i+j}) | g \rangle = \\
&\sigma_*(e_{i+j}, \dots, e_m)\langle \langle f | \sigma_*(e_0, e_1, \dots, e_i) \rangle \sigma_*(e_i, e_1, \dots, e_{i+j}) | g \rangle = \\
&(\sigma \cap f) \cap g.
\end{aligned}$$

Abbiamo poi il legame con la dualità, sia $\epsilon : S_0(X;A) \to A$ l'aumentazione abbiamo per $(f, \sigma) \in S^n(X;A) \times S_n(X;A)$ dalla definizione:

$$\epsilon(\sigma \cap f) = \langle \sigma | f \rangle. \tag{4.4}$$

[3]Qui vi è una certa arbitrarietà nella letteratura nella scelta di un segno, questa scelta ha vantaggi e svantaggi come vedremo.

Le formule 4.3,4.4 si uniscono in una *formula di aggiunzione*:

$$\langle \sigma | f \cup g \rangle = \langle \sigma \cap f | g \rangle. \tag{4.5}$$

Data la non degeneratezza dell'accoppiamento di dualità la formula 4.5 caratterizza la catena $\sigma \cap f$.

Date $\sigma \in S_{p+q}(X; A)$, $f \in S^q(X; A)$, la compatibilità con il differenziale dei due complessi è espressa dalla formula:

$$\delta(\sigma \cap f) = (-1)^q [\delta(\sigma) \cap f - \sigma \cap df]. \tag{4.6}$$

Invece di provarlo direttamente possiamo dedurla da 4.5 e la non degeneratezza dell'accoppiamento di dualità.

Sia infatti $g \in S^{p-1}(X; A)$ una arbitraria cocatena e calcoliamo:

$$\langle \delta(\sigma \cap f) | g \rangle = \langle \sigma \cap f | dg \rangle = \langle \sigma | f \cup dg \rangle =$$
$$(-1)^q \langle \sigma | d(f \cup g) - df \cup g \rangle = (-1)^q [\langle \delta\sigma | f \cup g \rangle - \langle \sigma \cap df | g \rangle =$$
$$\langle (-1)^q [\delta(\sigma) \cap f - \sigma \cap df] | g \rangle .]$$

Esprimiamo la compatibilità 4.6 come una struttura di **modulo differenziale** su un'algebra differenziale.

La conseguenza principale di queste identità consiste nel fatto che

4.7 PROPOSIZIONE. *La struttura di modulo passa ad una struttura di modulo unitario della omologia sulla algebra di coomologia (graduata)*

$$\cap : H_{p+q}(X; A) \times H^q(X; A) \to H_p(X; A).$$

DIM. La 4.6 implica che, se $\sigma \in Z_{p+q}$ è un ciclo e $f \in Z^q$ un cociclo si ha che $\sigma \cap f$ è un ciclo e quindi abbiamo una applicazione bilineare $Z_{p+q} \times Z^q \to Z_p$.

Nella medesima identità se $\sigma$ è un ciclo si ha $\delta(\sigma \cap f) = -(-1)^q \sigma \cap df$ quindi il prodotto cap fra un ciclo ed un cobordo è un bordo, similmente se $f$ è un cociclo $\delta(\sigma \cap f) = (-1)^q \delta(\sigma) \cap f$ e quindi il prodotto di un bordo per un cociclo è un bordo. □

Per completare questi aspetti formali bisogna discutere la funtorialità.

Sia dunque $F : X \to Y$ una applicazione continua. Si noti che, essendo le catene e le cocatene rispettivamente covarianti e controvarianti la funtorialità va espressa nel modo corretto. Ci serviremo di 4.5, con le notazioni ovvie

$$\langle F_*(\sigma) \cap f | g \rangle = \langle F_*(\sigma) | f \cup g \rangle = \langle \sigma | F^*(f \cup g) \rangle =$$
$$\langle \sigma | F^*(f) \cup F^*(g) \rangle = \langle \sigma \cap F^*(f) | F^*(g) \rangle = \langle F_*(\sigma \cap F^*(f)) | g \rangle .$$

Da cui finalmente la formula

$$F_*(\sigma) \cap f = F_*(\sigma \cap F^*(f)). \tag{4.8}$$

Per omologia e coomologia l'applicazione $F : X \to Y$ induce un omomorfismo di algebre $F^* : H^*(Y; R) \to H^*(X; R)$ che quindi induce su $H_*(X; R)$, una struttura di modulo su $H^*(Y; R)$ tramite la formula $a \cap F^*(b)$. Con queste definizioni la funtorialità esprime il fatto che $F_* : H_*(X; R) \to H_*(Y; R)$ è un omomorfismo di $H^*(Y; R)$ moduli.

Infine dobbiamo discutere il prodotto cap relativo.

Se $A$ è un sottospazio di $X$ si vede immediatamente che abbiamo per il prodotto cap che $\sigma \cap f = 0$ se $\sigma \in S_*(A),\ f \in S^*(X, A)$ ne deduciamo un prodotto $S_*(X, A) \times S^*(X, A) \to S_*(X)$. Similmente un prodotto $S_*(X, A) \times S^*(X) \to S_*(X, A)$.

Più in generale sia dato $X$ uno spazio $A, B$ due sottospazi. Avremo un prodotto cap

$$H^p(X, A) \times H_{p+q}(X, A \cup B) \to H_q(X, B)$$

almeno sotto l'ipotesi che l'inclusione di coppie $(A, A \cap B) \subset (A \cup B, B)$ induce un isomorfismo in omologia.

SINOPSI DELLE FORMULE per il prodotto $\cap$.

### 4.9 Definizione

(4.10) $$\boxed{\sigma \cap f := \sigma_*(e_n, \ldots, e_m)\langle \sigma_*(e_0, e_1, \ldots, e_n)|f\rangle} \text{ se } m \geq n,\ 0 \text{ altrimenti.}$$

**struttura di modulo destro**

(4.11) $$\boxed{\sigma \cap (f \cup g) = (\sigma \cap f) \cap g}$$

**formula di aggiunzione**

(4.12) $$\boxed{\langle \sigma | f \cup g\rangle = \langle \sigma \cap f | g\rangle}$$

**funtorialità**

(4.13) $$\boxed{F_*(\sigma) \cap f = F_*(\sigma \cap F^*(f))}$$

**compatibilità con il differenziale**

(4.14) $$\boxed{\delta(\sigma \cap f) = (-1)^q[\delta(\sigma) \cap f - \sigma \cap df],\ f \in H^q(X)}$$

**Osservazione** Nella definizione di prodotto $\cap$ avremmo anche potuto operare a sinistra ponendo
$$f \cap \sigma := \sigma_*(e_0, \ldots, e_{n-q})\langle f | \sigma_*(e_{n-q}, \ldots, e_n)\rangle$$
Anche se questa definizione sulle catene e cocatene è diversa dalla precedente in realtà in omologia coincide con essa a meno di segni. Infatti ricordiamo la trasformazione naturale $\theta(\sigma) := \epsilon(n)\sigma_*(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_0)$ del §3.12

Usando questa trasformazione naturale vediamo che la classe di omologia di $\theta(\sigma) \cap \theta^*(f) = \pm\theta(f \cap \sigma)$, per un $q$ cociclo $f$ ed un ciclo $\sigma$, coincide a meno del segno con la classe di $f \cap \sigma$ appena definita.

# 5 Dualità di Lefschetz

NOTA Proviamo ora una vasta generalizzazione del teorema di dualità e ne discutiamo delle implicazioni geometriche.

PRODOTTO $\cap$ Ci mettiamo nelle ipotesi e notazioni del §1. Sia $X$ una pseudovarietà orientabile di dimensione $n$, triangolata con una triangolazione $K$, $\delta X$ il suo bordo.

Sia $S^*(X)$ il complesso delle cocatene singolari di $X$, $C_*(X) \xrightarrow{j} S_*(X)$, $C_*(X, \delta X) \xrightarrow{j} S_*(X, \delta X)$ l'inclusione del complesso delle catene simpliciali in quello delle catene singolari dato da un ordinamento dei vertici scelto (risp. quelli relativi).

Applichiamo il prodotto $\cap$ alle classi $\omega_X^{\pm}$ definite come nelle 2.1,2.2. Utilizziamo le formule del §2, si ha, per una $k$ cocatena $f$:

$$\omega_X^+ \cap f = \sum_{A \in \mathcal{S}_k(X)} c^+(A, X) \langle \mathrm{Sd}^+(A) | f \rangle$$

$$\omega_X^- \cap f = (-1)^k \sum_{A \in \mathcal{S}_k(X)} \langle c^-(A, X) | f \rangle \mathrm{Sd}^-(A).$$

Pertanto:

5.1 LEMMA. *$\omega_X^+ \cap S^*(X) \subset C_*^{tr}(X)$ mentre $\omega_X^- \cap S^*(X) \subset \mathrm{Sd}^- C_*(X)$.*

Ci mettiamo di nuovo nel caso crescente, omettiamo il $+$ per semplicità e calcoliamo bordo (cf. 4.6):

$$\delta(\omega_X \cap f) = (-1)^k [\omega_{\delta X} \cap f - \omega_X \cap df]$$

$$= (-1)^k [\sum_{A \in \mathcal{S}_k(X)} c(A, \delta X) < \mathrm{Sd}(A) | f > - \sum_{B \in \mathcal{S}_{k+1}(X)} c(A, X) < \mathrm{Sd}(B) | df >]$$

Pertanto se $f \in S^*(X, \delta X)$ è una cocatena che svanisce sul bordo si ha $\delta(\omega_X \cap f) = -(-1)^k \omega_X \cap df$ da cui:

5.2 PROPOSIZIONE. *Posto $\epsilon(k) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ si ha che $\pi : f \to \epsilon(k)\omega_X \cap f$, è un morfismo*

$$\pi : S^*(X, \delta X) \xrightarrow{\epsilon(k)\omega_X \cap} C_*^{tr}(X)$$

*dal complesso delle cocatene $S^*(X, \delta X)$ che svaniscono sul bordo nel complesso trasverso $C_*^{tr}(X)$ con base le catene $c^+(A, X)$.*

*Il nucleo di $\pi$ è formato dalle cocatene ortogonali alle catene $Sd \circ j(C_*(X))$.*

*L'immagine di $\pi$ è il complesso generato dalle catene $c(A, X)$ al variare di $A$ nei simplessi di $X$ non contenuti nel bordo $\delta X$, che indicheremo con $C_*^{tr}(\delta X^\perp)$.*

Le inclusioni $C_*(X, \delta X) \xrightarrow{j} S_*(X, \delta X) \xrightarrow{\mathrm{Sd}} S_*(X, \delta X)$ inducono isomorfismo in omologia ed inoltre si verifica facilmente che l'immagine di $C_*(X, \delta X)$ in $S_*(X, \delta X)$ tramite $Sd \circ j$è un addendo diretto. Dal Lemma 3.3 dualizzando otteniamo una successione di complessi di cocatene che induce isomorfismo in coomologia $S^*(X,\delta X) \xrightarrow{\mathrm{Sd}^*} S^*(X,\delta X) \xrightarrow{j^*} C^*(X,\delta X)$.

$C^*(X,\delta X)$ sono le cocatene simpliciali ordinate per la triangolazione $K$ di partenza e $j^* \circ \mathrm{Sd}^* : S^*(X,\delta X) \to C^*(X,\delta X)$ è il trasposto dell'operatore iniettivo $Sd \circ j$ ed è quindi suriettivo.

Il nucleo della proiezione $S^*(X) \xrightarrow{(Sd\circ j)^*} C^*(X)$ è l'ideale formato da tutte le cocatene ortogonali a $Sd \circ j(C_*(X))$ pertanto

Corollario. *L'applicazione $f \to \epsilon(k)\omega \cap f$, induce un isomorfismo di complessi*

$$C^*(X,\delta X) \to C_*^{tr}(\delta X^\perp).$$

*Ed un isomorfismo fra la coomologia $H^{n-i}(X,\delta X)$ e la omologia $i-$esima del complesso trasverso $C_*^{tr}(\delta X^\perp)$.*

Per ottenere dei risultati geometrici da questo corollario è necessario ricordare la interpretazione della omologia del complesso trasverso, e la geometria discussa nel §2.5,6,7.

Ci mettiamo nel caso un cui $X$ sia una pseudovarietà orientata ed $Y$ un sottocomplesso di $X$ contenente il bordo di $X$.

Riprendiamo l'isomorfismo di complessi $C^*(X) \to C_*^{tr}(X)$ dato dall'applicazione $f \to \epsilon(k)\delta(\omega \cap f)$ e dalle identificazioni fatte.

Il complesso $C^*(X)$ ha una base formata da cocatene elementari $f^B$ duali alle catene $B$ ovvero

$$\langle f^B | A\rangle = \delta_{A,B}.$$

Per costruzione l'immagine della $k-$cocatena $f^B$ è la catena trasversa $\epsilon(k)c(B,X)$. Infatti si ottiene prendendo una cocatena $\overline{f}^B$ per cui $Sd^*(\overline{f}^B) = f^B$ e quindi $\langle \overline{f}^B | Sd(A)\rangle = \langle Sd^*(\overline{f}^B)|A\rangle = \langle f^B|A\rangle = \delta_{A,B}$ e formando

$$\omega_X \cap \overline{f}^B = \epsilon(k)c(B,X).$$

Pertanto le cocatene che si annullano sui simplessi in $Y$ si trasformano nel complesso trasverso che appartiene ad $Y^\perp$ e che indicheremo con $C_*^{tr}(Y^\perp)$.

Abbiamo dunque un isomorfismo di complessi $C^*(X,Y) \to C_*^{tr}(Y^\perp)$ che induce un isomorfismo $H^k(X,Y) \to H_k C_*^{tr}(Y^\perp)$.

Possiamo finalmente reinterpretare la Proposizione 2.5.

5.3 Teorema Dualità di Lefschetz. *Supponiamo che $X-Y$ sia una varietà omologica orientabile. Abbiamo isomorfismi canonici indotti dalla orientazione di $X$ tramite il cap-prodotto e la dualità;*

$$H^k(X,Y) \to H_{n-k}(X-Y),\ H_k(X,Y) \to H^{n-k}(X-Y). \tag{5.4}$$

Dim. Il poliedro $Y^\perp$ si ottiene tramite i blocchi $ST(B)$ al variare di $B$ fra i simplessi non in $Y$. Per ipotesi la catena $c(B,X)$ è un generatore della omologia relativa della coppia $ST(B), LT(B)$. possiamo quindi applicare il Lemma 7.4 del Cap. 5 e dedurre che l'immersione del complesso $C_*^{tr}(Y^\perp)$ nel complesso singolare di $Y^\perp$ induce isomorfismo in omologia. Poiché $Y^\perp$ è retratto di deformazione di $X-Y$ la prima parte segue.

Per la seconda parte possiamo dualizzare l'isomorfismo ed ottenere un isomorfismo di complessi

$$\mathrm{Hom}(C_*^{tr}(Y^\perp),\mathbb{Z}) \to C_*(X,Y)$$

l'iclusione $C_*^{tr}(Y^\perp) \to S_*(X-Y)$ induce un isomorfismo in omologia e quindi la proiezione $S^*(X-Y) \to \mathrm{Hom}(C_*^{tr}(Y^\perp),\mathbb{Z})$ ne induce uno in coomologia.

Un caso speciale si ha quando $Y=\delta X$.

Ritroviamo ora la dualità di Poicaré in una forma intrinseca:

Corollario. *Se $X$ è una varietà omologica orientabile su un anello $R$, l'omologia $H_*(X;R)$ è un modulo libero di rango 1 generato dalla classe $\omega$ sull'algebra di coomologia (rispetto al prodotto $\cap$).*

Il caso con bordo Consideriamo una varietà PL con bordo $\delta X$ (un trattamento analogo si può fare in casi più generali come vedremo nella seconda parte di questo libro). Proveremo in II-1 che $\delta X$ è una varietà senza bordo ed inoltre vi è un *intorno tubolare* del bordo detto *collare* in topologia PL.

Ovvero proveremo in II-1, che il sottocomplesso $\delta X^\perp$ é omeomorfo ad $X$ e quindi ha un bordo omeomorfo a $\delta X$, ed $X$ si ottiene attaccando al sottocomplesso $\delta X^\perp$ un poliedro $\delta X \times [0,1]$ identificando la base $\delta X \times 1$ con il bordo di $\delta X^\perp$.

Da questi enunciati si ha evidentemente che l'inclusione $\delta X^\perp \subset X$ induce un isomorfismo in omologia e la Dualità di Lefschetz induce un isomorfismo fra $H_*(X) = H^*(X,\delta X)$, inoltre, se $\omega \in S_n(X,\delta X)$ è una classe di orientazione relativa, si ha che $\delta\omega \in S_{n-1}(\delta X)$ è una classe di orientazione per $\delta X$ ed abbiamo un diagramma commutativo Consideriamo una varietà PL con bordo $\delta X$ (un trattamento analogo si può fare in casi più generali come vedremo nella seconda parte di questo libro). Proveremo in II-1 che $\delta X$ è una varietà senza bordo ed inoltre viè un *intorno tubolare* del bordo detto *collare* in topologia PL.

Ovvero proveremo in II-1, che il sottocomplesso $\delta X^\perp$ é omeomorfo ad $X$ e quindi ha un bordo omeomorfo a $\delta X$, ed $X$ si ottiene attaccando al sottocomplesso $\delta X^\perp$ un poliedro $\delta X \times [0,1]$ identificando la base $\delta X \times 1$ con il bordo di $\delta X^\perp$.

Da questi enunciati si ha evidentemente che l'inclusione $\delta X^\perp \subset X$ induce un isomorfismo in omologia e la Dualità di Lefschetz induce un isomorfismo fra

$$H^*(X,\delta X) \xrightarrow{\omega_X \cap} H_*(X)$$

inoltre, se $\omega_X \in S_n(X,\delta X)$ è una classe di orientazione relativa, si ha che $\delta\omega_X \in S_{n-1}(\delta X)$ è una classe di orientazione per $\delta X$.

5.5 TEOREMA. *Il seguente diagramma è commutativo*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H^{i-1}(\delta X) & \longrightarrow & H^i(X,\delta X) & \longrightarrow & H^i(X) & \longrightarrow & H^i(\delta X) & \longrightarrow & H^{i+1}(X,\delta X) & \longrightarrow \\
\big\downarrow{\scriptstyle \epsilon(i-1)\delta\omega_X\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle \epsilon(i-1)\omega_X\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle \epsilon(i-1)\omega_X\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle \epsilon(i)\delta\omega_X\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle \epsilon(i)\omega_X\cap} & \\
H_{n-i}(\delta X) & \longrightarrow & H_{n-i}(X) & \longrightarrow & H_{n-i}(X,\delta X) & \longrightarrow & H_{n-i-1}(\delta X) & \longrightarrow & H_{n-i-1}(X) & \longrightarrow
\end{array}$$

DIM. Ci sono tre tipi di quadrati da analizzare.

(PRIMO QUADRATO)
$$\begin{array}{ccc}
H^{i-1}(\delta X) & \longrightarrow & H^i(X,\delta X) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \delta\omega_X\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle \omega_X\cap} \\
H_{n-i}(\delta X) & \longrightarrow & H_{n-i}(X)
\end{array},$$

Partiamo dalla mappa $H^{i-1}(\delta X) \to H^i(X,\delta X)$, che è definita nel modo seguente.

Si parte da una classe di coomologia $[f] \in H^{i-1}(\delta X)$ rappresentata da un cociclo $f$ su $\delta X$, si estende $f$ ad una cocatena su $X$ che denotiamo ancora con $f$ e si calcola $df$ che è un cociclo per la coppia $(X,\delta X)$, poi applichiamo la mappa verticale ottenendo $\omega_X \cap df$ la cui classe di coomologia è l'immagine di $[f]$.

Dall'altra parte per dualità abbiamo che $\delta(\omega_X) \cap f$ è un ciclo in $\delta X$ e quindi anche in $X$ che rappresenta l'immagine della classe $[f]$. La identità 3.5 implica che

$$\delta(\omega_X) \cap f - \omega_X \cap df = (-1)^{i-1}\delta(\omega_X \cap f)$$

quindi i cicli $\omega_X \cap df$, $\delta(\omega_X) \cap f$ sono omologhi concludendo la prima verifica.

(SECONDO QUADRATO)
$$\begin{array}{ccc}
H^i(X,\delta X) & \longrightarrow & H^i(X) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \omega_X\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle \omega_X\cap} \\
H_{n-i}(X) & \longrightarrow & H_{n-i}(X,\delta X)
\end{array},$$

Questo è banale perché si parte da un cociclo $f$ che svanisce su $\partial X$ e lo si considera come cociclo di $X$.

(TERZO QUADRATO)
$$\begin{array}{ccc}
H^i(X) & \longrightarrow & H^i(\delta X) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \omega_X\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle (-1)^i\delta\omega_X\cap} \\
H_{n-i}(X,\delta X) & \longrightarrow & H_{n-i-1}(\delta X)
\end{array}$$

Procedendo da destra a sinistra e poi in basso, si parte da un $i-$cociclo $f$ su $X$ lo si restringe a $\partial X$ e quindi si effettua l'intersezione $(-1)^i \delta\omega_X \cap f$, dall'altra parte invece si effettua prima $\omega_X \cap f$ pensato come ciclo relativo e quindi si deve passare da $H_{n-i}(X, \delta X) \longrightarrow H_{n-i-1}(\delta X)$ ovvero prendere la classe di omologia di $\delta(\omega_X \cap f)$. Applichiamo di nuovo la formula 3.5 ottenendo $\delta(\omega_X \cap f) = (-1)^i(\delta\omega_X \cap f - \omega_X \cap df) = (-1)^i \delta\omega_X \cap f$ perché $f$ è un cociclo. □

Dalla dualità di Lefschetz e dal Lemma dei cinque otteniamo che:

5.6 Teorema. *Se $X$ è una varietà con bordo tutti i morfismi verticali del precedente diagramma sono isomorfismi.*

Dualità di Alexander   Discutiamo ora la dualità di Alexander, è un teorema relativo alle sfere $S^n$ e va confrontato con i risultati provati nel Cap.5, §9. La differenza nelle due trattazioni sta nel fatto che qui consideriamo una immersione di un qualsiasi poliedro nella sfera, però per utilizzare le tecniche fino ad ora sviluppate assumiamo che la coppia sfera poliedro sia triangolabile, il che può non essere vero per immersioni *selvaggie.*

5.7 Teorema. *Sia $A \subset S^n$ tali che la coppia $S^n, A$ sia triangolabile si ha:*

$$\tilde{H}^k(A) \cong \tilde{H}_{n-k-1}(S^n - A).$$

Dim. Dalla dualità di Lefschetz $H_{n-k-1}(S^n - A) = H^{k+1}(S^n, A)$.

Se $k \neq n, n-1$ dalla successione esatta della coppia segue l'isomorfismo $H^{k+1}(S^n, A) = H^k(S^n, A)$, usando il fatto che $\tilde{H}^i(S^n) = 0,\ i \neq n$.

Per $k = n-1$ si ha

$$H^{n-1}(S^n) = 0 \longrightarrow H^{n-1}(A) \xrightarrow{i^*} H^n(S^n, A) \xrightarrow{j^*} H^n(S^n) = \mathbb{Z}.$$

Dunque $H^{n-1}(A) = \ker j^*$. Per dualità $H^n(S^n, A) = H_0(S^n - A)$ e si deve osservare che $j^*$ si identifica alla aumentazione.

Per $k = n$ si ha che, poiché $A$ è propriamente contenuto in $S^n$ è anche contenuto in $S^n - x$ per qualche punto $x$, da cui l'inclusione $j : A \to S^n$ in coomologia si fattorizza $H^n(S^n) \to H^n(S^n - x) = 0 \to H^n(A)$. Dalla successione esatta $H^n(S^n) \to H^n(A) \to H^{n+1}(X, A) = 0$ segue che $H^n(A) = 0$.

Vogliamo dedurre una interessante nozione geometrica da questa dualità, la facciamo in un caso speciale.

Cnsideriamo due sfere $S^h$, $S^k$ contenute omeomorficamente in $S^{h+k+1}$ e disgiunte.

La inclusione $i : S^k \to S^{h+k+1} - S^h$ induce un omomorfismo in omologia

$$i_k : \mathbb{Z} = H_k^{\#}(S^k) \to \mathbb{Z} = H_k^{\#}(S^{h+k+1} - S^h)$$

che pertanto individua un numero che indicheremo con $L(S^h, S^k)$ ed è detto il *numero di allacciamento* fra le due sfere.[4] Nel caso in cui le due immersioni non siano troppo selvaggie, per esempio se sono PL possiamo dare un'altra interpretazione di questo numero che ne mette in evidenza una proprietà di simmetria (a meno di un segno).

Anticipiamo alcuni fatti che proveremo in seguito in particolare il prodotto in omologia.

Per questo supponiamo $h, k > 0$ e discutiamo invece due immersioni $S^h,\ S^k \subset \mathbb{R}^{h+k+1}$. Definiamo la applicazione

$$g : S^h \times\ S^k \to S^{h+k},\ g(p,q) := \frac{p-q}{|p-q|}$$

dal prodotto delle due sfere alla sfera unitaria che associa ad una coppia di punti $p, q$ il versore unitario associato al vettore $p-q$.

Sfruttiamo il fatto che $S^h \times\ S^k$ è una varietà orientata di dimensione $h+k$ e quindi $H_{h+k}(S^h \times\ S^k) = \mathbb{Z}$ da cui abbiamo un morfismo

$$g_* : \mathbb{Z} = H_{h+k}(S^h \times\ S^k) \to H_{h+k}(S^{h+k}) = \mathbb{Z}$$

che è dato dalla moltiplicazione per un numero $m$ il suo grado.

5.8 Teorema. $m = L(S^h, S^k) = (-1)^{hk} L(S^k, S^h)$.

Prima di svolgerla in generale proponiamo al lettore di esplicitare questo esempio:
Prendiamo come prima $S^h$ la usuale sfera dei punti a distanza $r$ da un punto dato $p$ in un sottospazio lineare $A^{h+1}$ di dimensione $h+1$ di $\mathbb{R}^{h+k+1}$.

Prendiamo ora un punto $q \in S^h$ il suo spazio tangente $T_q(S^h)$ e l'ortogonale per $q$ a tale spazio tangente che è un sottospazio lineare $B^{k+1}$ di dimensione $k+1$. I due spazi $A^{h+1},\ B^{k+1}$ si intersecano in una retta $r$ che unisce $q$ con il suo punto antipodale in $S^h$.

Prendiamo ora la sfera $S^k$ di centro $q$ in $B^{k+1}$ e raggio $R < 2r$, si vede immediatamente che le due sfere costruite sono disgiunte. Il lettore ora illustri il teorema enunciato in questo caso esplicito.

Schizzo di dimostrazione in generale (spiegatami da Mac Pherson). Consideriamo $G : S^k \times \mathbb{R}^{h+k+1} - S^k \to S^{h+k}$ data sempre dalla formula $G(p,q) := \frac{p-q}{|p-q|}$. Dalle formule dei prodotti in omologia abbiamo che $H_{h+k}(S^k \times \mathbb{R}^{h+k+1}) = H_k(S^k) \otimes H_h(\mathbb{R}^{h+k+1} - S^k) = \mathbb{Z}$. Inoltre si vede facilmente (ad esempio dalla dimostrazione del calcolo della omologia) che un generatore di $H_h(\mathbb{R}^{h+k+1} - S^k)$ è dato dalla classe di orientazione del link trasverso $LT$ a $S^k$ in $\mathbb{R}^{h+k+1}$ (in un qualunque suo punto $p$) che è una sfera $S^h = LT$.

Basta quindi provare che la applicazione $G : S^k \times LT \to S^{k+h+1}$ ha grado 1.

Per questo con una isotopia si modifichi $S^k$ in modo da avere una lunga *protuberanza* ovvero un lungo cilindro con una calotta, in modo tale che il link trasverso al vertice di tale

[4] *linking number* in inglese

protuberanza (centro della calotta) veda la sfera $S^k$ privata della calotta sotto un piccolo angolo sferico. Ne segue che quasi tutti i versori corrispondenti alle direzioni fuori di tale angolo sferico si ottengoono dalla mappa $G$ da un solo punto nella calotta e quindi il grado è $\pm 1$, per il segno basta restringersi al prodotto fra $S^k$ e la calotta sferica e calcolarlo puntualmente usando il primo caso eslicito descritto come esempio.

Figura 3

# 6 Introduzione alla Teoria dell'intersezione

NOTA Calcoliamo il *push forward* della coomologia e la coomologia dello spazio proiettivo, iniziamo a discutere la teoria geometrica dell'intersezione.

UMKHERUNG

Sia $X$ è una varietà connessa di dimensione $n$, tramite l'isomorfismo $\omega \cap f$ si ha una identificazione di $H^n(X;R) = H_0(X;R) = R$.

6.1 DEFINIZIONE. *La classe* $[p_X]$ *per cui* $\omega \cap [p_X] = 1$ *si dice classe fondamentale di* $X$.

Siano $X$ una pseudovarietà orientata ed $Y$ una varietà orientata con cicli di orientazione $\omega_X$, $\omega_Y$ e sia $p : X \to Y$ una applicazione continua. Poniamo $\dim Y - \dim X = q$.

Oltre all'usuale morfismo $f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$ che preserva i gradi, abbiamo un morfismo

$$f_* : H^k(X) \to H^{k+q}(Y), \ \dim Y = \dim X + q$$

detto *push-forward* e definito dalla formula implicita

$$\omega_Y \cap f_*(a) := f_*(\omega_X \cap a)$$

si noti che nella formula $f_*(\omega_X \cap a)$ il simbolo $f_*$ è utilizzato per l'omologia, mentre $f_*(a)$ si applica alla coomologia!

Il fatto che questa sia una buona definizione dipende dal fatto che la omologia di $Y$ è un modulo libero di rango 1 sulla coomologia.

Dalle identità formali del prodotto $\cap$ seguono le proprietà ($Y, Z$ entrambe varietà):

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \qquad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

$$f_*(a \cup f^*(b)) = f_*(a) \cup b, \quad \forall b \in H^*(Y), \forall a \in H^*(X).$$

In particolare sia $X \subset Y$ una sottopseudovarietà orientabile di codimensione $k$ e $i$ l'inclusione. Sia $\omega_X$ una classe di orientazione per $X$, $i_*(\omega_X)$ descrive la classe di omologia di $X$ in $Y$. Si definisce la *classe duale* ad $X$ in $Y$ con le formule:

(6.2) $$[X] := i_*(1) \in H^k(Y), \quad \omega_Y \cap [X] = i_*(\omega_X).$$

Si osservi che, con queste notazioni, la classe fondamentale $[Y]$ della varietà ambiente è il push forward $i_*(p)$ della clase fondamentale di un punto $p \in Y$.

Un tipico esempio in cui si applica questa teoria è quando $Y$ è una varietà algebrica compatta e liscia (su $\mathbb{C}$) e $X$ è una sottovarietà irriducibile, possibilmente singolare. Illustreremo nel paragrafo successivo queste idee nel caso dello spazio proiettivo complesso.

Dualità

Vogliamo ora riformulare alcuni aspetti della dualità. Dalla proposizione 3.16 segue che la mappa di dualità $i_X : H^k(X) \to H_k(X)^*$ identifica isomorficamente la coomologia modulo la torsione con la duale della omologia.

Componiamo questo risultato con la dualità delle varietà orientate, usiamo il prodotto cap per identificare $H^k(X)$ con $H_{n-k}(X)$ da cui abbiamo un accoppiamento

(6.3) $$H_k(X) \times H_{n-k}(X) \to \mathbb{Z}, \text{ indicato } (a|b)$$

e caratterizzato da

$$(a|\omega \cap f) := \langle a|f \rangle$$

la discussione precedente ci mostra che questo accoppiamento induce una dualità perfetta fra i gruppi di omologia modulo la torsione. In altre parole, se $a_i$ è una base di $H_k(X)$ modulo la torsione e $b_j$ una base di $H_{n-k}(X)$ modulo la torsione si ha che la matrice di numeri interi $(a_i|b_j)$ ha determinante $\pm 1$.

Un risultato simile si ha per la dualità a coefficienti in un campo $F$ nel caso che $X$ sia una $F$ varietà omologica.

Vogliamo reinterpretare questo risultato in termini di prodotto cup. Dalla formula $\langle a|f \rangle := (a|\omega \cap f) = (\omega \cap g|\omega \cap f) = \langle \omega \cap g|f \rangle = \langle \omega|g \cup f \rangle$ segue che

6.4 Teorema. *Se $X$ è orientabile l'accoppiamento $H^{n-k}(X) \times H^k(X) \to \mathbb{Z}$ dato da $\langle \omega | g \cup f \rangle$ è un accoppiamento perfetto modulo la torsione.*

*Se $X$ è una $F$ varietà omologica orientabile su $F$, con $F$ un campo l'accoppiamento dato da*

$$H^{n-k}(X; F) \times H^k(X; F) \to F, \quad \langle \omega | g \cup f \rangle \tag{6.5}$$

*è un accoppiamento perfetto.*

Possiamo riprendere ora in modo più generale le idee relative al grado che abbiamo trattato nel Cap. 5, §10 nel caso delle sfere.

Siano dunque $X, Y$ due varietà omologiche della stessa dimensione $n$ su un anello $A$ che supponiamo orientate e connesse, con classi di orientazione $\omega_X$, $\omega_Y$ (usualmente $A$ sarà $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(2)$ o $\mathbb{Q}$).

Sia data una applicazione $F : X \to Y$ essa induce un'omomorfismo

$$A = H_n(X; A) \xrightarrow{F_n} H_n(Y; A) = A$$

che quindi è dato dalla moltiplicazione per un elemento $a \in A$ detto *grado* dell'applicazione.

Dalla discussione fatta si ha che $F_n(\omega_X) = a\omega_Y$ e che inoltre (4.8) $a\omega_Y \cap f = F_*(\omega_X \cap F^*(f))$.

Per una classe di coomologia di grado $n$ segue che

$$a\langle \omega_Y | f \rangle = \langle \omega_X | F^*(f) \rangle.$$

Supponiamo quindi per semplicità che $A$ è un campo. Ne segue una compatibilità con gli accoppiamenti $a\langle \omega_Y | f \cup g \rangle = \langle \omega_X | F^*(f) \cup F^*(g) \rangle$.

Se ne deduce che

Corollario. *Se il grado $a \neq 0$, $A$ un campo, l'omomorfismo $H^*(Y; A) \to H^*(X; A)$ è iniettivo.*

Dualizzando si ha in omologia (modulo la torsione) una applicazione iniettiva $H_*(X; A) \to H_*(Y; A)$.

## 7 Il punto di vista differenziabile

In questo paragrafo spieghiamo, senza dimostrazioni, la interpretazione della coomologia tramite la teoria di De Rham sulle varietà differenziabili. Per semplicità trattiamo il caso di varietà differenziabili $C^\infty$ compatte e senza bordo.

Sia dunque $M$ una tale varietà di dimensione $n$.

Per prima cosa definiamo i simplessi singolari $C^\infty$.

Consideriamo il simplesso standard $\Delta_k$ contenuto nello spazio affine $\mathbb{R}^k$.

Per definizione un simplesso $\sigma : \Delta_k \to M$ si dice $C^\infty$ se esiste un aperto $U \supset \Delta_k$ dello spazio affine $\mathbb{R}^k$ ed una funzione $C^\infty$, $f : U \to M$ che conicide con $\sigma$ su $\Delta_k$. Si verifica immediatamente che i simplessi $C^\infty$ sono base di un sottocomplesso $S_*^\infty(M, \mathbb{R})$ del complesso singolare a coefficienti reali.

Un primo Teorema importante consiste nel

7.1 Teorema. *L'inclusione del complesso singolare $C^\infty$ nel complesso singolare induce isomorfismo in omologia.*

Similmente si definisce il complesso $S^*_\infty(M)$ delle cocatene $C^\infty$ che calcola la coomologia reale di $M$.

In altri termini cicli e bordi in omologia possono essere rappresentati tramite simplessi $C^\infty$ similmente per cocicli e cobordi.

Ora consideriamo per ogni $k$ lo spazio $\mathcal{E}^k(M)$ delle forme differenziali $C^\infty$ su $M$ di grado $k$.

Tali forme sono equipaggiate di una struttura di algebra graduata,

$$\mathcal{E}^*(M) := \oplus_{k=0}^n \mathcal{E}^k(M)$$

tramite il prodotto esterno $\wedge$ che è inoltre un algebra differenziale tramite l'usuale differenziale delle forme esterne.

Inoltre se $F : M \to N$ è un morfismo $C^\infty$ fra due varietà differenziabili, è definita una mappa $F^* : \mathcal{E}^*(N) \to \mathcal{E}^*(M)$ che è un omomorfismo di algebre differenziali graduate.

$M \to \mathcal{E}^*(M)$ è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà differenziabili alla categoria delle algebre graduate.

La coomolologia di $\mathcal{E}^*(M)$ è pertanto una algebra graduata (commutativa in senso graduato) funtoriale sulle varietà differenziabili. Tale coomologia è detta **coomologia di De Rham**, indicheremo con $H^k_{DR}(M)$ il $k-$esimo spazio vettoriale di coomologia di De Rham.

Se $\psi \in \mathcal{E}^k(M)$ è una $k-$forma e $\sigma : \Delta_k \to M$ è un $k-$simplesso $C^\infty$ possiamo effettuare l'integrazione

$$\langle \psi | \sigma \rangle := \int_{\Delta_k} \sigma^*(\psi)$$

In questo modo $\psi$ determina una cocatena sui simplessi singolari $C^\infty$.

La applicazione da $\mathcal{E}^*(M) \to S^*_\infty(M)$ è un omomorfismo di complessi dal teorema di Stokes.

$$\langle d\psi|\sigma\rangle := \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\psi) = \int_{\Delta_k} d\sigma^*(\psi) = \int_{\partial\Delta_k} \sigma^*(\psi) = \langle\psi|\partial\sigma\rangle$$

Abbiamo pertanto un omomorfismo $H^k_{DR}(M) \to H^k(M, \mathbb{R})$ dalla coomologia di De Rham a quella singolare.

Il Teorema fondamentale è il

7.2 Teorema di De Rham. *Il morfismo $H^*_{DR}(M) \to H^*(M, \mathbb{R})$ è un isomorfismo di algebre graduate.*

Questo teorema ha due parti, uno l'isomorfismo lineare e secondo la compatibilità in coomologia fra prodotto $\wedge$ e prodotto $\cup$. Si noti che questa compatibilità non vale a livello di cocatene, ma solo in coomologia!

Se $M$ è una varietà orientabile si ha inoltre la dualità nelle forma seguente:
L'accoppiamoneto

$$\pi : H^k_{DR}(M) \times H^{n-k}_{DR}(M) \to \mathbb{R}, \qquad \pi(\phi, \psi) := \int_M \phi \wedge \psi$$

è una dualità perfetta.

Passando alle sottovarietà si hanno le seguenti proprietà:

Presa una sottovarietà orientata $N$ di $M$ di dimensione $k$ esiste una classe di coomologia *duale* rappresentata da una $(n-k)-$forma chiusa $\psi_N$ tale che, per ogni $k-$forma chiusa $\phi$ si abbia

$$\int_N \phi = \int_M \psi_N \wedge \phi.$$

In questo caso la interpretazione duale del prodotto è particolarmente semplice.

7.3 Definizione. *Due sottovarietà $N_1, N_2$ di $M$ si dicono* **trasversali** *in un punto $p \in N_1 \cap N_2$ se $T_p(M) = T_p(N_1) + T_p(N_2)$. Si dicono trasversali se sono trasversali in ogni punto.*

$T_p(N)$ indica lo spazio tangente di $p$ in $N$, la condizione di trasversalità in un punto implica facilmente che esistono coordinate locali intorno a tale punto per cui le due sottovarietà sono localmente definite dall'annullarsi di due insiemi disgiunti di coordinate. In particolare in tale intorno la intersezione è una varietà di codimensione la somma delle codimensioni delle due varietà. Si ha allora per le classi di coomologia duali:

$$\psi_{N_1 \cap N_2} = \psi_{N_1} \cup \psi_{N_2}.$$

Vale inoltre un *Lemma di trasversalità o moving Lemma* date due sottovarietà $N_1, N_2$ di $M$ si può costruire un campo vettoriale $X$ su $M$ tale che, preso il gruppo ad un parametro $\psi_t$ di diffeomorfismi che esso genera, esiste un $\epsilon > 0$ per cui per ogni $0 < t < \epsilon$ le due varietà $N_1,\ \psi_t(N_2)$ sono trasversali.

Anche il grado $d$ di un morfismo $f : M \to N$ fra varietà orientate della stessa dimensione $n$ ha una semplice interpretazione. Basta prendere una $n-$forma $\psi$ su $N$ per cui $\int_N \psi \neq 0$ si ha allora che

$$\int_M f^*\psi = d \int_N \psi.$$

Inoltre il grado si interpreta nel modo seguente. Un punto $p \in M$ si dice critico per $f$ se il differenziale $df : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ in $p$ non è invertibile.

Si prova (lemma di Sard) che l'immagine in $N$ dell'insieme dei punti critici è un insieme di misura nulla in $N$ pertanto se $q \in M$ non è valore critico la controimmagine $f^{-1}(q)$ è un insieme di punti regolari necessariamnete isolati e quindi, essendo $M$ ccompatta, un insieme finito.

Su ogni punto $a \in f^{-1}(q)$ il differenziale $df : T_a(M) \to T_q(N)$ essendo biunivoco ha determinante non nullo e dunque positivo o negativo (per le orientazioni scelte) tale numero $\pm 1$ è il grado locale di $f$ in $a$ ed il grado $d$ è la somma di tali gradi locali sull'insieme $f^{-1}(q)$.

La teoria si applica in particolare alle varietà complesse compatte e quindi alle varietà algebriche non singolari che sono naturalmente orientate dalla orientazione naturale dei numeri complessi.

Coomologia dello spazio proiettivo  Vogliamo dedurre da questi teoremi la struttura dell'algebra di coomologia degli spazi proiettivi. Faremo i nostri calcoli supponendo di sapere che tali spazi sono varietà simpliciali ed applicando la teoria svolta.

Iniziamo con lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n$ e la coomologia modulo 2. Dai teoremi provati segue che $H^i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/(2)) = \mathbb{Z}/(2)$ per ogni $i \leq n$ ed inoltre l'inclusione $\mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^n$ induce un'applicazione isomorfa in coomologia fino a grado $n-1$, sia dunque $x_i$ il generatore non nullo di $H^i(\mathbb{P}^n)$. Per semplicità poniamo $x := x_1$.

7.4 Teorema. *$x_i = x^i$ (potenza nel prodotto cup).*

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione su $n$, poichè la restrizione $H^*(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/(2)) \to H^*(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z}/(2))$ è un omomorfismo la ipotesi induttiva ci permette di dire che $x_i = x^i$ per ogni $i < n$. Ora sappiamo che l'accoppiamento $H^{n-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/(2)) \times H^1(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/(2)) \to \mathbb{Z}/(2)$ dato dal prodotto cup è non degenere e quindi $x_{n-1} \cup x \neq 0$ ovvero è eguale a $x_n$ da cui $x^n = (x^{n-1}) \cup x = x_n$. □

Pertanto come algebra graduata l'anello di coomologia di $P^n$ è l'anello $\mathbb{Z}/(2)[x]/(x^{n+1})$ con $x$ un generatore di grado 1.

Passiamo ora al caso proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ che è simile solo che ora $H^{2i}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z},\ i = 0, \dots, n;\ H^{2i+1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0,\ H^m(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = 0,\ \forall m > 2n$ (coefficienti interi).

Possiamo usare la teoria della dualità come spiegata nel paragrafo precedente, se $x$ è la classe duale alla sottovarietà $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ ( o a qualunque iperpiano) intersecando $k-$ iperpiani in posizione trasversale abbiamo che $x^k$ è duale ad un sottospazio lineare $\mathbb{P}^{n-k}(\mathbb{C})$. In particolare $x^n$ è la classe duale di un punto che è generatore di $H^{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$.

Abbiamo mostrato che come algebra graduata l'anello di coomologia di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è l'anello $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ con $x$ un generatore di grado 2.

Osservazione. Il gruppo proiettivo complesso indotto dall'azione del gruppo delle matrici complesse $GL(n+1, \mathbb{C})$ opera sullo spazio proiettivo ed è connesso, quindi opera banalmente in coomologia, se $g$ è una trasformazione proiettiva e $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ è il sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ prima descritto $g(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))$ è un altro sottospazio isomorfo a $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ e il diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{1} & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) & \xrightarrow{g^*} & g(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \end{array}$$

Il punto di vista della geometria algebrica In geometria algebrica si possono trattare anche casi singolari sfruttando il fatto che una varietà algebrica irriducibile e compatta si può considerare in modo naturale come una psedudovarietà orientata.

In questa caso però è conveniente sviluppare il calcolo a partire da proprietà più fini delle varietà algebriche si ottiene una teoria della intersezione in cui la coomologia è solo uno degli aspetti.

Si parte sempre da una varietà non singolare e compatta $M$ e si studia l'intersezione di sottovarietà $V_1, V_2$ ci si può ridurre al caso in cui le due sottovarietà siano irriducibili di codimensioni $h, k$.

È interessante capire due cose, primo non è necessario per fare i calcoli di intersezione in geometria algebrica di supporre che le due varietà che si intersecano siano in posizione trasversale ma basta che la intersezione sia *propria* ovvero che ogni componente irriducibile $Z_i$ di $V_1 \cap V_2 = \cup_{i=1}^s Z_i$ abbia codimensione esattamente $h + k$. In queste ipotesi si può assegnare ad ogni componente $Z_i$ della intersezione una *molteplicità* $m_i$ in modo tale che per le classi di coomologia associate valga l'identità:

$$[V_1] \cup [V_2] = \sum_i m_i [Z_i].$$

Una difficoltà che si incontra nella teoria consiste nel fatto che non vi è un semplice *moving lemma* vi sono sottovarietà che non possono essere mosse in nessun senso. Questa difficoltà si risolve provando che le sottovarietà che possono essere mosse sono sufficientemente numerose per permettere di generare (come cicli) tuttte le varietà.

### Il punto di vista combinatorio

Il nostro prossimo compito è quello di interpretare geometricamente, per una varietà PL, i numeri di intersezione $(a_i|b_j)$ nel caso che le classi di omologia siano rappresentate da cicli geometrici, questo ci permetterà anche di effettuare alcuni calcoli espliciti di anelli di coomologia.

Prima di tutto questa analisi possiamo farla combinatoriamente, supponiamo di dare due cicli rappresentati da elementi dei complessi $a := \sum_A n_A \operatorname{Sd}(A)$ e $b := \sum_B m_B c_B$ di dimensioni complementari $p, q,\ p+q = n$. Vogliamo calcolare $(a|b)$. Sappiamo che $b := \omega \cap \sum_B m_B f^B$ da cui

$$(a|b) = \sum_A n_A m_A$$

si noti che la costruzione è tale che i due cicli si intersecano solo al più nei baricentri $b_A$ dei simplessi $A$ e che, in ogni tale punto si ha un contributo $n_A m_A$ alla molteplicità di intersezione.

Si tratta di dare un fondamento generale a questa osservazione. Possiamo generalizzarla come segue, consideriamo due catene $a := \sum_A n_A \operatorname{Sd}(A)$ e $b := \sum_B m_B c_B$ in generale ed osserviamo che geometricamente l'intersezione di $A$ e di $\overline{C}_B$ è vuota se $B \not\subset A$ ed altrimenti è la cella $ST(B, A)$ ovvero la stella trasversa di $B$ in $A$, questo suggerisce la osservazione seguente.

Come nel caso generale, $A$ è una pseudovarietà e prendiamo come classe di orientazione $\omega_A := Sd(A)$, abbiamo dunque con le notazioni usuali una catena singolare $c(B, A)$ che è catena di orientazione della stella $ST(B, A)$. Poniamo una intersezione fra $\operatorname{Sd}(C_*(X)) \times (C_*^{tr}(X)) \to C_*(\operatorname{Sd}(X))$ data da

$$(\sum_A n_A \operatorname{Sd}(A) | \sum_B m_B c_B) = \sum_A n_A \operatorname{Sd}(A) \cap \sum_B m_B f^B$$

e proviamo che

$$(\sum_A n_A \operatorname{Sd}(A) | \sum_B m_B c_B) = \sum_{B \subset A} n_A m_B c(B, A).$$

Infatti $\operatorname{Sd}(A) \cap f^B$ è chiaramente la catena $c(B, A)$ o 0.

Questa è una interpretazione geometrica, in termine di catene, della intersezione omologica indotta dalla dualità.

Purtroppo questo approccio combinatorio ha dei limiti che appaiono nel fatto che due catene geometriche date possono non essere in modo evidente trasversali e quindi non è chiaro come calcolarne l'intersezione. In qualche caso semplice si può procedere direttamente in modo combinatorio. Per una trattazione soddisfacente rimandiamo al capitolo 10 sulla topologia PL in cui definiremo una nozione più geometrica di trasversalità.

Proponiamo al lettore di analizzare in dettaglio l'esempio di una superficie orientata di genere $g$ presentata come quoziente di un poligono con $4g$ lati.

In questo caso siano $x_i, y_i$ le classi di omologia associate ai lati del poligono orientati in verso antiorario, affermiamo che la matrice di intersezione (che è antisimmetrica dalle proprietà del prodotto $\cup$) è data da

$$(x_i|x_j) = (y_i|y_j) = 0, \; (x_i|y_j) = \delta_{ij}$$

Una dimostrazione combinatoria si ottiene come segue.

Si triangola il poligono (ad esempio con $12g$ triangoli con vertice il baricentro e dividendo ogni lato in 3) si vede poi che il ciclo $x_i$ si può a meno di omologia mettere nel complesso trasverso ed allora interseca solo $y_i$ con molteplicità 1 (dalle orientazioni scelte).

## 8 Intersezione di pseudovarietà

Elementi di Teoria PL Per comprendere i dettagli di questa sezione si rimanda ai Capitoli II-1,2 sulla topologia PL.

Le idee chiave che affronteremo in tale capitolo sono quelle di *trasversalità* fra pseudovarietà contenute in una PL varietà ed un *moving Lemma* che permette di mettere in posizione trasversale con una isotopia due pseudovarietà qualunque.

Le principali idee della trasversalità sono basata sulle nozioni di *collare* di un poliedro $Y$ in un poliedro $X$ e di *isotopia* di un poliedro.

Le definiamo rimandando al Cap. II.1 per i dettagli:

8.1 Definizione. *1) Un collare di $Y$ in $X$ è un PL omeomorfismo*

$$f : Y \times [0,1] \to Z$$

*in un sottopoliedro $Z$ di $X$, che viene identificato tramite $f$ ad $Y \times [01,]$ tale che:*

*$Y = Y \times 0$ e $Y \times [0,1)$ è aperto in $X$.*

*2) Una isotopia di un poliedro $X$ è una funzione PL, $F(x,t) : X \times [0,1] \to X$ tale che $F(x,0) = x, \; \forall x \in X$ mentre $\forall t \in [0,1], F_t(x) := F(x,t) : X \to X$ è un omeomorfismo.*

A partire da queste nozioni possiamo sviluppare la seguente discussione. Si prenda una varietà $M$ con bordo $\partial M$.

In $M$ si consideri una pseudovarietà $P$ con bordo $\partial P$,

8.2 Definizione. *Diremo che $P$ è trasversale a $\partial M$ se:*
*1) $P \cap \partial M = \partial P$*
*2) Le coppie $(M, \partial M)$, $(P, \partial P)$ sono collarizzate in modo compatibile.*

Se $X$ è una pseudovarietà di dimensione $n-$ triangolata con $K$ e $Y$, un sottocomplesso di dimensione pura $n$ evidentemente $Y$ è ancora una pseudovarietà (possibilmente con bordo anche se $X$ è chiusa).

Le idee di trasversalità che svilupperemo in II-1 partono dalle seguenti considerazioni.

Mettiamoci nelle ipotesi precedenti, $M$ una PL varietà e $X$ una pseudovarietà in $M$. Vogliamo analizzare $X$ in questo modo, triangoliamo $M$ e consideriamo le intersezioni $X_A := A \cap X$, $\partial X_A := \partial A \cap X$ al variare di $A$ nei simplessi della triangolazione data. Otteniamo cosıdei poliedri con la proprietà $X_A \supset \partial X_A = \cup_{B \subset \partial A} X_B$.

In generale nulla di più si può dire su tali poliedri. Se però supponiamo che per ogni $A$ le coppie $(A, \partial A), (X_A, \partial X_A)$ siano collarizzate in modo compatibile risulta la seguente importante conseguenza geometrica.

Ogni $X_A$ è una pseudovarietà con bordo $\partial X_A$ inoltre la codimensione di $X_A$ in $A$ coincide con la codimensione di $X$ in $M$. In questo caso diremo che:

$X$ è *trasversale* alla triangolazione data.

L'utilità di questa nozione è molteplice, in particolare in quanto vale il

8.3 Lemma di isotopia. *Pur di suddividere possiamo mettere, attraverso una isotopia, una pseudovarietà $X$ in posizione trasversale con una triangolazione data.*

Da questa nozione se ne può inoltre dedurre quella di trasversalità per due pseudovarietà $X, Y$ in $M$. Diremo che $X$ è trasversale ad $Y$ se si può trovare una triangolazione rispetto alla quale $X$ è trasversale e per cui $Y$ è il sostegno di un sottocomplesso.

Dal Lemma di trasversalità segue che, date comunque $X, Y$ esiste una isotopia che le mette in posizione trasversale.

## Blocchi ed orientazioni

Supponiamo che $X$ sia una pseudovarità orientabile di dimensione $n$ e sia $\omega_X := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma$ una sua catena di orientazione, sia $Y$ un sottocomplesso puro di dimensione $n$ (ovvero tutti i suoi simplessi massimali hanno dimensione $n$) allora

8.4 Lemma. *$Y$ è una pseudovarietà orientabile e $\omega_Y := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sigma \in Y} \epsilon(\sigma)\sigma$ è una catena di orientazione per $Y$.*

Dim. Il bordo di $\omega_X$ è 0 e quindi per un simplesso $\tau$ di dimensione $n-1$ che è faccia di due $n-$simplessi il coefficiente 0 è la somma dei contributi dei due simplessi di cui è faccia. Se $\tau$ non è nel bordo di $Y$ quei due simplessi sono anche in $Y$.

Una pseudovarietà, connessa sin codimensione 1, nel caso orientabile (su $\mathbb{Z}$), ammette esattamente 2 catene di orientazione (nel complesso simpliciale orientato), mentre su $\mathbb{Z}/2$ una sola catena di orientazione.

La seguente Proposizione è di verifica immediata:

8.5 PROPOSIZIONE. *Sia $X$ una pseudovarietà $n-$dimensionale, orientabile con bordo $\delta(X)$ una pseudovarietà.*

*Data una catena di orientazione $\omega_X = \sum \epsilon(\sigma)\sigma$, il bordo $\delta\omega_X := \omega_{\delta(X)}$ fornisce un ciclo di orientazione per il bordo che è una pseudovarietà senza bordo.*

Sia ora $\mathbb{L}$ la classe delle singolarità delle pseudovarietà normali (ovvero connesse in codimensione 2) e decomponiamo una pseudovarietà $X$ in un $\mathbb{L}$ complesso di blocchi $X_\alpha$ connessi.

Ogni $X_\alpha$ è pertanto una pseudovarietà normale con bordo $\delta(X_\alpha) := \cup_{\beta\in\delta(\alpha)} X_\beta$, dove $\delta(\alpha)$ rappresenta l'insieme degli indici massimali fra quelli minori di $\alpha$. $\delta(X_\alpha)$ è una pseudovarietà normale senxa bordo.

Prendiamo una triangolazione per cui tutti i bocchi siano sottocomplessi ordiniamone i vertici e prendiamo catene nel corrispondente complesso simpliciale ordinato, allora.

8.6 LEMMA. *Se $X$ è orientabile, tutti i blocchi $X_\alpha$ sono orientabili e detta $\omega_\alpha$ una catena di orientazione di $X_\alpha$ si ha*

$$\delta(\omega_\alpha) = \sum_{\beta\in\delta(\alpha)} n(\alpha,\beta)\omega_\beta$$

*dove $n(\alpha,\beta) = \pm 1$.*

*Presi i blocchi massimali $X_\gamma, \gamma \in \Gamma$ (di dimensione uguale alla dimensione di $X$), esistono segni $\epsilon(\gamma)$ con $\sum \epsilon(\gamma)\omega_\gamma = \omega_X$ catena di orientazione di $X$.*

*Viceversa siano date catene $\psi_\alpha$ di $X_\alpha$ per cui*

$$\delta(\psi_\alpha) = \sum_{\beta\in\delta(\alpha)} m(\alpha,\beta)\psi_\beta$$

*con $m(\alpha,\beta) = \pm 1$. Supponiamo inoltre che, per i blocchi massimali $X_\gamma, \gamma \in \Gamma$, esistano segni $\epsilon(\gamma)$ con $\sum \epsilon(\gamma)\psi_\gamma = \omega_X$ allora.*

*Per ogni $\alpha$, $\psi_\alpha = \pm\omega_\alpha$.*

DIM. Si prova per evidente induzione usando il fatto che in una pseudovarietà normale connessa vi sono al più due catene di orientazione (nel complesso singolare dato) di segno opposto e la Proposizione precedente.

Prendiamo ora una varietà $M$ ed in $M$ una varietà con bordo $M_1$ della medesima dimensione. Decomponiamo usando il complemetare $M = M_1 \cup M_2,\ N = M_1 \cap M_2 = \delta(M_1) = \delta(M_2)$.

Fissiamo una triangolazione $K$ per cui $M_1, M_2,\ N$ sono complessi.

Usiamo la suddivisione baricentrica ordinando i vertici secondo l'ordine decrescente dei simplessi.

Indichiamo con $\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_k^1, \mathcal{S}_k^2, \mathcal{S}_k'$ l'insieme dei simplessi di dimensione $k$ di $K$ e risp. in $M_1, M_2$.

Scegliamo una catena di orientazione $\omega_M$ per $M$. Le formule $\omega_M = \omega_{M_1} + \omega_{M_2}$, $\delta(\omega_{M_1}) = -\delta(\omega_{M_2}) = \omega_N$ determinano catene di orientazione in $M_1, M_2, N$, scriviamo:

$$\omega_M = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \omega(A, M) * \mathrm{Sd}(A) = \omega_{M_1} + \omega_{M_2},$$

$$\omega_{M_1} = \sum_{A \in \mathcal{S}_k^1} \omega(A, M_1) * \mathrm{Sd}(A),\ \omega_{M_2} = \sum_{A \in \mathcal{S}_k^2} \omega(A, M_2) * \mathrm{Sd}(A)$$

Sia $X$ una pseudovarietà orientabile di codimensione $k$ in $M$, supporto di un sottocomplesso di $K$ e trasversa ad $M_1,\ M_2$. Sia $X_1 = X \cap M_1,\ X_2 = X \cap M_2$, costruiamo una sua catena di orientazione $\omega_X = \sum \epsilon(A)\,\mathrm{Sd}(A)$, $A$ varia fra i simplessi $n-k-$dimensionali di $K$ contenuti in $X$.

Decomponendo la $\sum \epsilon(A)\,\mathrm{Sd}(A)$ nei simplessi in $M_1$ e quelli in $M_2$ abbiamo che $\omega_X = \omega_{X_1} + \omega_{X_2}$ con $\omega_{X_1}, \omega_{X_2}$ cicli di orientazione delle coppie $X_1, \delta X_1$ e $X_2, \delta X_2$.

Consideriamo $C_*(M)$ il complesso delle catene simpliciali ordinate $\mathrm{Sd}(C_*(M))$ è un sottocomplesso del complesso delle catene simpliciali ordinate per la suddivisione isomorfo a $C_*(M)$.

Ricordiamo la formula

$$\omega_M \cap f = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} \omega(A, M) * \mathrm{Sd}(A) \cap f = \sum_{A \in \mathcal{S}_k} < f | c(A, M) > \mathrm{Sd}(A).$$

Ottenendo il morfismo $\pi : f \to (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \omega_M \cap f$ dal complesso delle cocatene singolari a quello delle catene simpliciali ordinate.

Poiché le catene $c(A, M)$ sono linearmente indipendenti, questo morfismo è suriettivo con nucleo le cocatene ortogonali alle catene trasverse $c(A, M)$.

Poiché, per la dualtà di Poincaré, $\pi$ induce un isomorfismo in omologia ogni ciclo di $a \in \mathrm{Sd}(C_*(M))$ può essere rappresentato da un cociclo $f^a$ con $\omega_M \cap f^a = a$ (infatti, per l'isomorfismo in omologia, $a$ è omologo a $\pi(g)$ con $g$ un cociclo. Se $a + \delta b = \pi(g)$ poichè $\pi$ è suriettivo esiste un $h$ con $\pi(h) = b$ e $f - dh$ è il cociclo richiesto).

Applichiamo questo enunciato alla catena di orientazione $\omega_X = \sum_{A \in S_k(X)} \epsilon(A) Sd(A)$ di $X$ rivedendo i risultati del §6.

Otteniamo un $k-$cociclo $f^X$ che diremo *duale* alla pseudovarietà $X$ e la cui classe di coomologia abbiamo indicato con $[X]$ in 6.2.

Calcolato sulle cocatene trasverse ai simplessi di dimensione $n-k$, si ha che $\langle f^X | c_A \rangle = 0$, se $A$ non è un simplesso di $X$, $\langle f^X | c_A \rangle = \epsilon(A)$, se $A$ è un simplesso di $X$.

Se $X$ è un sottocomplesso pieno possiamo ugualmente restringerci alle cocatene che si annullano su $X^\perp$ ed ottenere che $f^X$ è un cociclo che si annulla su $X^\perp$.

Chiaramente si ha che

$$\omega_M \cap f^X = \omega_X, \ \omega_{M_i} \cap f^X = \omega_{X_i}, i = 1, 2$$

calcoliamo $\omega_N \cap f^X$ utilizzando le formule 21.

$$\delta(\omega_{X_1}) = \delta(\omega_{M_1} \cap f^X) = (-1)^k \omega_N \cap f^X$$

ne deduciamo che:

8.7 LEMMA. *$\omega_N \cap f^X$ è una catena di orientazione per la pseudovarietà $X \cap N$ e $f^X$ ristretta ad $N$ un suo cociclo duale.*

Supponiamo ora che $X$ sia trasversale ad una triangolazione $\mathcal{C}$ di $M$ di cui $K$ sia una suddivisione. I vertici di $\mathcal{C}$ possiamo supporli ordinati in modo compatibile a quelli di $K$.

Preso un simplesso $A$ di $\mathcal{C}$ con il simbolo $A$ denoteremo anche il simplesso singolare ordinato ad esso associato in $\mathcal{C}$. Inoltre nella triangolazione $K$, $A$ corrisponde ad una ben determinata catena singolare di orientazione che chiameremo $\omega_A$, omologa ad $A$. Poiché $f^X$ è un cociclo abbiamo $< f^X | A >=< f^X | \omega_A >$. Per costruzione della catena di orientazione se $\delta A = \sum n(A,B)B$ si ha anche: $\delta \omega_A = \sum n(A,B)\omega_B$.
Applicando per induzione la formula precedente ed il lemma 7.7 avremo che

8.8 PROPOSIZIONE. *Per ogni simplesso $A$ si ha che $\omega_A \cap f^X$ è una catena di orientazione di $A \cap X$.*

$$\delta(\omega_A \cap f^X) = (-1)^k \sum n(A,B) \omega_B \cap f^X.$$

**Osservazione** In particolare se $A$ è un simplesso di dimensione $k$ si ha che $\omega_A \cap f^X$ è catena di orientazione di un numero finito di punti orientati e quindi $< A | f^X >= \epsilon(A \cap f^X)$ è uguale al numero di tali punti contati con il loro segno.
Questa informazione determina la cocatena $f^X$ sui simplessi $A$ di $\mathcal{C}$ (e quindi la classe di coomologia di $f^X$).

Sia ora $Y$ una altra pseudovarietà orientata, avente supporto un sottocomplesso della triangolazione $\mathcal{C}$. Sia $\mathcal{C}_Y$ l'insieme dei simplessi di $\mathcal{C}$ di dimensione massima in $Y$ e sia $\omega_Y = \omega_M \cap f^Y = \sum_{A \in \mathcal{C}_Y} \eta(A) \omega_A, \ \eta(A) = \pm 1$ la sua catena di orientazione.

8.9 TEOREMA.

(1) *$Y \cap X$ è una pseudovarietà orientabile.*
(2) *$\omega_{Y \cap X} := \omega_Y \cap f^X$ è un ciclo di orientazione di $Y \cap X$.*
(3) *$f^Y \cup f^X$ è un cociclo duale a $Y \cap X$.*

Dim. Calcoliamo $\omega_Y \cap f^X = \sum_{A\in\mathcal{C}_Y} \eta(A)(\omega_A \cap f^X)$ otteniamo un ciclo, somma di catene di orientazione delle pseudovarietà $A \cap X,\ A \in \mathcal{C}_Y$. Pertanto $\omega_Y \cap f^X$ è una catena di orientazione di $Y \cap X$.

Poiché
$$\omega_{Y\cap X} = \omega_Y \cap f^X = (\omega_M \cap f^Y) \cap f^X = \omega_M \cap (f^Y \cup f^X)$$
si ha che $f^Y \cup f^X$ è una cocatena duale a $Y \cap X$.

Si noti che la intersezione di due pseudovarietà orientate eredita una orientazione privilegiata che però nel caso in cui entrambe le pseudovarietà abbiano codimensione dispari dipende dall'ordine in cui si fa l'intersezione.

Un caso particolarmente importante si ha quando le due pseudovarietà hanno dimensioni complementari e dunque l'ipotesi di trasversalità implica che si intersecano in un numero finito di punti. In questo caso orientare un punto significa semplicemente attribuirgli un segno $\pm 1$ ed il Teorema precedente implica:

Corollario.
$$\epsilon(\omega_M \cap (f^X \cup f^Y)) = \langle \omega_M | f^X \cup f^Y \rangle$$
*conta il numero dei punti di intersezione con i segni.*

In particolare in geometria algebrica complessa si prova che i segni sono necessariamente positivi anche se poi ci sono difficoltà a mettere due varietà algebriche in posizione trasversale in modo algebrico.

## Numero di allacciamento

8.10 Lemma. *Sia $X \subset S^n$ una pseudovarietà orientata, di codimensione $k$ allora*
$$H_{k-1}(S^n - X) = \mathbb{Z}\omega, \quad H_i(S^n - X) = 0,\ \forall i \geq k$$
*dove $\omega$ è la classe di orientazione del link trasverso a $X$ in un qualunque punto liscio $p$ di $X$.*

dim. Triangoliamo $S^n, X$ in modo compatibile, ed inoltre tale che $p$ sia il baricentro di un simplesso $A$ di dimensione massima $n - k$ in $X$, e consideriamo $Y := X - A$.

Dalle ipotesi fatte
$$H_i(X) = 0, \forall i > n-k; \qquad H_i(Y) = 0,\ \forall i \geq n-k; \qquad H_{n-k}(X) = \mathbb{Z}.$$
Siano $X^\perp \subset Y^\perp$ i poliedri ortogonali rispetto alla suddivisione baricentrica. Si ha che (cf. 1.18.1.19):

$$Y^\perp = X^\perp \cup ST(A, S^n),\ Y^\perp \cap X^\perp = LT(A, S^n) \tag{8.11}$$

Dalla dualità di Lefschetz si ha che

$$H_{k-1}(X^{\perp}) = H_{k-1}(S^n - X) = H^{n-k}(X) = \mathbb{Z}u,\ H_{k-1}(Y^{\perp}) = H_{k-1}(S^n - Y) = H^{n-k}(Y) = 0$$

dove $u$ è data da un cociclo duale alla catena di orientazione di $X$.

Consideriamo ora la successione esatta della coppia $X^{\perp} \subset Y^{\perp}$:

$$0 = H_k(Y^{\perp}) \to H_k(Y^{\perp}, X^{\perp}) \to H_{k-1}(X^{\perp}) \to 0 = H_{k-1}(Y^{\perp}) \tag{8.12}$$

Per escissione la inclusione di coppie $(ST(A, S^n), LT(A, S^n)) \to (Y^{\perp}, X^{\perp})$ induce un isomorfismo in omologia e quindi $H_k(Y^{\perp}, X^{\perp}) = H_k(ST(A, S^n), LT(A, S^n)) = \mathbb{Z}c(A, S^n)$ è generata dalla classe di orientazione $c(A, S^n)$ della stella trasversa ad $A$.

Dalla 7.13 segue che $H_{k-1}(S^n - X)$ è generata dalla classe $\partial c(A, S^n) = \omega(A, S^n)$, classe di orientazione per il link trasverso. □

Vogliamo ora dedurre la nozione di numero di allacciamento fra due pseudovarietà normali, connesse ed orientate $X, Y \subset S^n$ nelle ipotesi che esse siano disgiunte di dimensioni $h, k$ con $h + k = n - 1,\ h, k \geq 0$.

8.13 Definizione. *Il numero di allacciamento $m := L(X, Y)$ è definito dalla formula*

$$\omega_Y = m\omega(A, S^n) \in H_k(S^n - X)$$

*dove $\omega_Y$ è la classe di orientazione di $Y$.*

Vogliamo dare un'altra espressione per tale numero, per questo siano $f^X, f^Y$ due cocicli, di gradi $k+1, h+1$, su $S^n$ per cui in una triangolazione opportuna e con le usuali notazioni si abbia:

$$\omega_X = \omega_{S^n} \cap f^X,\ \omega_Y = \omega_{S^n} \cap f^Y.$$

Essendo $X, Y$ disgiunte possiamo prendere $f^X = 0$ su un intorno $U_Y$ di $Y$, $f^Y = 0$ su un intorno $U_X$ di $X$ con la condizione che i due aperti $U_X, U_Y$ ricoprano $S^n$, infatti in una opportuna triangolazione si prende

$$U_Y := S^n - X^{\perp};\ U_X := S^n - Y^{\perp}$$

e la classe di $f^X$ in $H^{k+1}(S^n, U^Y) = H_h(X)$ per dualità di Alexander genera tale coomologia, similmente per $f^Y$.

Per costruzione $\langle c(A, S^n) | f^X \rangle = 1$ per ogni simplesso di dimensione massima di $X$.

Se una delle due pseudovarietà ha dimensione 0, per definizione è la sfera $S^0$, per cui dalla successione esatta $H^k(U^Y) \to H^{k+1}(S^n, U^Y) \to H^{k+1}(S^n)$ segue che $f^X, f^Y$ sono cobordi $f^X = dg^X,\ f^Y = dg^Y$ e per ipotesi $g^X$ (risp. $g^Y$) ristretta ad $U_Y$ (risp. $U_X$) è un cociclo.

Le due cocatene $f^X \cup g^Y, g^X \cup f^Y$ sono cocicli su $S^n$ e il prodotto $\cup$ va pensato come definito in coomologia e quindi indipendente dai rappresentanti:

$$H^{k+1}(S^n, U^Y) \times H^h(U^Y) \to H^n(S^n).$$

$$\langle \omega_{S^n} | f^Y \cup g^X \rangle = \langle \omega_{S^n} \cap f^Y | g^X \rangle = \langle \omega_Y | g^X \rangle, \langle \omega_{S^n} | f^X \cup g^Y \rangle = \langle \omega_{S^n} \cap f^X | g^Y \rangle = \langle \omega_X | g^Y \rangle$$

Con le stesse notazioni dell'enunciato per ogni simplesso $A$ massimale di $X$

$$\langle \omega_Y | g^X \rangle = \langle m\omega(A, S^n) | g^X \rangle = m\langle \omega(A, S^n) | g^X \rangle$$

Per costruzione $\omega(A, S^n) = \partial c(A, S^n)$ da cui

$$\langle \omega(A, S^n) | g^X \rangle = \langle \partial c(A, S^n) | g^X \rangle = \langle c(A, S^n) | dg^X \rangle = \langle c(A, S^n) | f^X \rangle = 1$$

Infine $L(X, Y) = m = \langle \omega_Y | g^X \rangle$ riassumendo e per simmetria:

$$L(X, Y) = \langle \omega_Y | g^X \rangle, \quad L(Y, X) = \langle \omega_X | g^Y \rangle, \qquad dg^X = f^X,\ dg^Y = f^Y \tag{8.14}$$

Vogliamo ora provare che dalla formula segue la regola del segno rispetto allo scambio delle due pseudovarietà:

$$L(X, Y) = (-1)^{hk+1} L(Y, X)$$

Per questo ricordiamo che $g^X,\ g^Y$ sono cocatene di gradi $k, h$. Partiamo da

$$0 = \langle \omega_{S^n} | d(g^X \cup g^Y) \rangle = \langle \omega_{S^n} | d(g^X) \cup g^Y \rangle + (-1)^k \langle \omega_{S^n} | g^X \cup d(g^Y) \rangle$$

ovvero $\langle \omega_{S^n} | f^X \cup g^Y \rangle = -(-1)^k \langle \omega_{S^n} | g^X \cup f^Y \rangle$. Vorremmo dunque arguire che

$$\begin{aligned}\langle \omega_X | g^Y \rangle = \langle \omega_{S^n} \cap f^X | g^Y \rangle = \langle \omega_{S^n} | f^X \cup g^Y \rangle = -(-1)^k \langle \omega_{S^n} | g^X \cup f^Y \rangle = \\ (-1)^{hk+1} \langle \omega_{S^n} | f^Y \cup g^X \rangle = (-1)^{hk+1} \langle \omega_{S^n} \cap f^Y | g^X \rangle = (-1)^{hk+1} \langle \omega_Y | g^X \rangle\end{aligned}$$

in questo passaggio va giustificato lo scambio

$$-(-1)^k \langle \omega_{S^n} | g^X \cup f^Y \rangle = -(-1)^k (-1)^{k(h-1)} \langle \omega_{S^n} | f^Y \cup g^X \rangle = (-1)^{hk+1} \langle \omega_{S^n} | f^Y \cup g^X \rangle$$

in quanto stiamo operando su cocatene e non su classi di coomologia.

Possiamo però tornare alla formula 3.13 per cui

$$\theta^*(g^X \cup f^Y) = (-1)^{k(h-1)} \theta^*(f^Y) \cup \theta^*(g^X).$$

Abbiamo però che $g^X \cup f^Y,\ \theta^*(g^X \cup f^Y)$ sono cocatene legate attraverso la legge di omotopia inoltre per costruzione sono due cocicli, questo implica che sono in effetti coomologhe e pertanto prendono lo stesso valore sul ciclo $\omega_{S^n}$.

Ma ora $\theta^*(f^Y), \theta^*(g^X)$ rappresentano le stesse classi di coomologia di

$$f^Y = \theta^*(f^Y) \in H^{h+1}(S^n, U^Y);\ g^X = \theta^*(g^X) \in H^k(U^Y)$$

da cui il medesimo valore del prodotto

$$H^{h+1}(S^n, U^Y) \times H^k(U^Y) \to H^n(S^n).$$

## Molteplicità di intersezione

Sia $X$ una PL varietà triangolata orientata di dimensione $n$ scriviamo la sua classe duale nella decomposizione baricentrica come $\omega_M = \sum_{v \in \mathcal{V}} c(v, X)$ somma delle catene di orientazione delle celle trasverse di dimensione massima.

Consideriamo due pseudovarietà orientate $Y, Z$ contenute in $X$ di dimensioni complementari $h, k,\ h + k = n$, che si intersecano solo in un numero finito di vertici, vogliamo definire una molteplicità di intersezione $m_i$ in ogni punto $p_i$ di intersezione, in modo tale che

$$\epsilon(\omega_M \cap (f^Y \cup f^Z)) = \langle \omega_M | f^Y \cup f^Z \rangle = \sum_i m_i$$

ed inoltre, se una delle due varietà $Y$ viene deformata con una isotopia in un piccolo intorno di $p_i$ un modo tale che in tale intorno dopo la isotopia le due varietà si intersecano traseversalmente in un numero finito di punti, il numero $m_i$ coincide con tale numero di punti pur di calcolare ogni punto con il segno della intersezione.

Otterremo questo risultato provando che la molteplicità $m_i$ può essere descritta geometricamente da un numero di allacciamneto.

Poniamo

$$m_v := \epsilon(c(v, X) \cap (f^Y \cup f^Z)) = \langle c(v, X) | f^Y \cup f^Z \rangle$$

e partiamo dalla osservazione che $c(v, X) \cap (f^Y \cup f^Z) = 0$ se $v$ non è un punto di intersezione da cui

$$\epsilon(\omega_M \cap (f^Y \cup f^Z)) = \sum_{v \in \mathcal{V}} \epsilon(c(v, X) \cap (f^Y \cup f^Z)) = \sum m_v$$

si esprime come una somma di contributi locali nei punti di intersezione.

Possiamo interpretare geometricamente il contributo $m_v = \langle c(v, X) | f^Y \cup f^Z \rangle$ di un punto $v$ di intersezione, se $Y, Z$ sono pseudovarietà orientate.

Prendiamo per questo una triangolazione di $X$ in cui sia $Y$ che $Z$ siano sotto complessi pieni e $v$ un vertice, scegliamo il cociclo $f^Y$ in modo che si annulli su $Y^\perp$. Consideriamo la stella $ST(v, X)$ nella decomposizione baricentrica della triangolazione data, che è un intorno sferico PL di $v$ in $X$.

Il nostro obiettivo è di provare che;

8.15 TEOREMA. *Il contributo $m_v$ di $v$ alla intersezione è*

$$(-1)^k L(Lk(v,Z),\ Lk(v,Y))$$

*dove $L(Lk(v,Z),\ Lk(v,Y))$ è il linking number delle due pseudovaietà $Lk(v,Z),\ Lk(v,Y)$ in $Lk(v,X)$.*

Per semplificare le notazioni e ricordarci alcuni fatti geometrici indichiamo

$$Lk(v,X) := S^{n-1},\ ST(v,X) := D^n$$

Il cociclo $f^Y$ ristretto a $D^n$ è un cobordo e lo scriviamo come $f^Y = dg^Y$, poiché $f^Y$ si annulla su $Y^\perp$ si ha che $g^Y$ è un cociclo su $D^n \cap Y^\perp$.

Si ha inoltre, su $D^n$, che $f^Y \cup f^Z = (-1)^k d(f^Y \cup g^Z)$ da cui

$$m_v = \epsilon(c(v,X) \cap (f^Y \cup f^Z)) = (-1)^k \langle c(v,X) | d(f^Y \cup g^Z) \rangle =$$
$$(-1)^k \langle \partial c(v,X) | f^Y \cup g^Z \rangle = (-1)^k \langle (\partial c(v,X)) \cap f^Y | g^Z \rangle$$

Per completare il ragionamento basta osservare che:

1) I cocicli $f^Y, f^Z$ ristretti alla sfera $S^{n-1}$ rappresentano cocicli duali per le due pseudovarietà $Lk(v,Y),\ Lk(v,Z)$.

La catena $\partial c(v,X) \cap f^Y = \omega_{Lk(v,Y)}$ è il ciclo di orientazione di $Lk(v,Y) = S^{n-1} \cap Z$.

Dal Lemma 7.14 sappiamo che

$$\langle \partial (c(v,X) \cap f^Y) | g^Z \rangle = \langle \omega_{Lk(v,Y)} | g^Z \rangle$$

è il numero di allacciamento fra $Lk(v,Z),\ Lk(v,Y)$ in $S^{n-1}$.

Questo completa la dimostrazione del primo punto.

Ora possiamo completare anche il secondo punto.

Prendiamo sempre due pseudovarietà $X, Y$ di dimensioni complementari ed un punto isolato $p$ di intersezione, sia $D^n$ una stella di $p$ con bordo $S^{n-1}$ in modo tale che $X, Y$ sono trasverse ad $S^{n-1}$ possiamo applicare il Lemma di trasversalità in modo da costruire una isotopia di $D^n$ che sia l'identità su $S^{n-1}$ e che metta in posizione trasversa le due pseudovarietà (all'interno di $D^n$).

Alla fine di tale isotopia il punto $p$ di intersezione si è trasformato in un numero finito di intersezioni trasverse ciascuna con una molteplicità $\pm 1$ mentre il linking number delle due intersezioni di $X, Y$ con $S^{n-1}$ rimane costante. Pertanto la molteplicità di intersezione di $p$ si può contare con il numero (con segno) di punti di intersezione dopo la deformazione.