CAPITOLO 3 OMOTOPIA ELEMENTARE

1 Gruppo fondamentale

NOTA Iniziamo con introdurre le nozioni fondamentali di omotopia arrivando al primo gruppo di omotopia ed alla nozione di spazio semplicemente connesso.

OMOTOPIA Per i ragionamenti seguenti sfrutteremo spesso il fatto che, dato uno spazio X unione di due insiemi chiusi A, B una funzione continua su X è data quando si assegnino due funzioni continue su A, B che coincidano su $A \cap B$.

Inoltre sfrutteremo alcuni ovvi omeomorfismi. Un quadrato di lato 1 ed un rettangolo di base 2 e altezza 1 sono omeomorfi tramite l'ovvio omeomorfismo definito da $(x, y) \to (2x, y)$.

Un quadrato in cui separatamente la base superiore e quella inferiore sono contratte ad un punto ed un disco sono omeomorfi ecc..

Figura 1

Iniziamo con una definizione fondamentale.

DEFINIZIONI.

(1) *Date due funzioni continue $f, g : X \to Y$ una* **omotopia** *fra f e g è una funzione continua $F : X \times I \to Y$ con $F(x, 0) = f(x),\ F(x, 1) = g(x)$.*

(2) *Si dice che* $f, g : X \to Y$ *sono* **omotope** *se esiste una omotopia fra di loro.*
(3) *Se* $f, g : X \to Y$ *coincidono su un sottospazio* A *una omotopia* F *fra* f *e* g *si dice una* **omotopia relativa ad** A *se* $F(a,t) = f(a) = g(a), \forall a \in A$.

Si verifica immediatamente che la relazione di omotopia è una relazione di equivalenza compatibile con la composizione di funzioni. Quindi utilizzando gli spazi topologici come oggetti e le classi di equivalenza come morfismi possiamo definire la **Categoria Omotopica**.

Utilizzando la definizione categoriale di isomorfismo in questo caso abbiamo che

1.1 Definizione.

(1) *Due spazi* X, Y *si dicono* **omotopicamente equivalenti** *se esistono due applicazioni* $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ *tali che* gf *è omotopa a* 1_X *e* fg *è omotopa a* 1_Y.
(2) *Uno spazio* X *si dice* **contraibile** *se è omotopicamente equivalente ad un punto.*
(3) *Un sottospazio* $A \subset X$ *è un* **retratto di deformazione** *di* X *se esiste una omotopia relativa ad* A *dalla identità* 1_X *ad una retrazione* $g : X \to A$ *(cfr. Cap.1, def. 1.2).*

1.2 Esercizio

(1) Ogni insieme stellato in $\mathbb{R}^n$ (in particolare $\mathbb{R}^n$) è contraibile.
(2) Se A è retratto di deformazione in X e B è retratto di deformazione in Y allora $A \times B$ è retratto di deformazione in $X \times Y$.
(3) S^{n-1} è retratto di deformazione di $D^n - 0$.
(4) Prendiamo nel piano $\mathbb{R}^2$, N punti distinti P_i, allora $\mathbb{R}^2 - \{P_1, \ldots, P_N\}$ è omotopicamente equivalente ad N circonferenze attaccate in un punto (dette un un bouquet).

Sugg. 1) Prendendo 0 come centro la contrazione è $F(x,t) := tx$.
2) $F(x,t) := (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$.
3) Prendiamo nel piano $\mathbb{R}^2$, N punti distinti P_i e come origine un punto 0 che non sia allineato con nessuna coppia di punti P_i, P_j. I segmenti $0P_i$ si incontrano dunque solo in 0.

Per ogni i costruiamo un sottile triangolo con uno dei vertici in 0, che contenga P_i nel suo interno e gli altri P_j siano ad esso esterni. Sia T l'unione di tali triangoli. Provare che T è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2$.

Successivamente buchiamo T nei punti P_i e proviamo (come per il disco bucato e la sfera) che $T - \{P_1, \ldots, P_N\}$ si retrae con una deformazione al bordo di T che è omeomorfo a N circonferenze attaccate per un punto .

Figura 2

Pertanto $\mathbb{R}^2 - \{P_1, \ldots, P_N\}$ è omotopicamente equivalente ad un bouquet in N circonferenze. $\square$

Gruppo fondamentale È conveniente in omotopia scegliere un punto $x_0 \in X$, in questo caso si parla di spazio puntato. Utilizziamo sempre la notazione $I := [0, 1]$.

1.3 Definizione. *Un* **cammino** *in X di estremi x_0, x_1 è una funzione continua $\varphi : I \to X$ tale che $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$.*

Un **laccio** *puntato in x_0 è una funzione continua $\varphi : I \to X$ tale che $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Per i cammini e per lacci si considera l'omotopia relativa alla coppia di punti $\{0, 1\}$ di I, cioè ad estremi fissati (cfr. Def. 1.1).*

Figura 3

L'insieme delle classi di omotopia dei cammini di estremi x_0, x_1 verrà denotato con $\pi_1(X, x_0, x_1)$, quella dei lacci puntati in x_0 con $\pi_1(X, x_0)$.

La classe di un cammino α verrà indicata con $[\alpha]$.

Si definisce una composizione di cammini α, β quando $\alpha(1) = \beta(0)$ data da

$$\alpha \circ \beta(u) = \begin{cases} \alpha(2u), & \text{se } u \leq 1/2 \\ \beta(2u - 1), & \text{se } u \geq 1/2 \end{cases}$$

si verifica immediatamente che è compatibile con l'omotopia ottenendo composizioni in $\pi_1(X, x_0, x_1) \times \pi_1(X, x_1, x_2) \to \pi_1(X, x_0, x_2)$.

1.4 Teorema.

(1) *La composizione data è associativa.*

(2) *La classe del laccio costante in x_0 agisce come identità (per le composizioni definite) mentre la classe di un cammino α ha una inversa, la classe del cammino*

$$\alpha^{-1}(u) := \alpha(1-u).$$

(3) *In particolare per ogni x_0, $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo detto* **gruppo fondamentale di X in** *x_0 o primo gruppo di omotopia*[1].

(4) *Due cammini α, β fra due punti x_0, x_1 sono omotopi (con estremi fissati) se e solo se il laccio puntato in x_0, $\alpha \circ \beta^{-1}$ è contraibile.*

Dim. Si tratta di dimostrare prima di tutto che la composizione è associativa, poi che il laccio costante agisce come elemento neutro ed infine la proprietà dell'inverso. Tutte queste verifiche sono semplici formule di omotopia. Illustriamole con dei disegni che suggeriscono le formule delle omotopie richieste. Per distinguere il parametro del laccio da quello di omotopia scriviamo $F(t, s)$ per una omotopia data, dove t è parametro per il laccio ed s per la deformazione.

1) Vi è una deformazione della identità di I in una applicazione che manda i segmenti $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2], [1/2, 1]$ in $[0, 1/2]$, $[1/2, 3/4], [3/4, 1]$ e deforma la paratramizzazione di $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ in quella di $\alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.

2) Per esempio sia α un cammino da x_0 ad x_1 ed indichiamo con P_{x_1} il cammino costante in x_1. $\alpha \circ P_{x_1}(st)$, $s \in [1/2, 1]$ è una omotopia fra $\alpha \circ P_{x_1}$ ed α.

3) Dato un cammino α definiamo il cammino $\alpha_s(t) := \alpha(st)$; è un cammino percorso più lentamente che termina in $\alpha(s)$. La mappa $F(t, s) := \alpha_s \circ \alpha_s^{-1}(t)$ è la richiesta omotopia con il laccio costante.

Se i due cammini sono omotopi allora $\alpha \circ \beta^{-1}$ è omotopo a $\alpha \circ \alpha^{-1}$ e quindi contraibile. Viceversa contraiamo con una omotopia F il laccio $\alpha \circ \beta^{-1}$.

$F(1/2, 1-s)$ descrive dunque un cammino γ fra x_0, x_1 e si vede facilmente che sia α che β sono omotopi a γ.

Quello che abbiamo definito è in effetti una categoria detta **gruppoide di omotopia di X** in cui gli oggetti sono i punti di X, i morfismi fra due punti x_0, x_1 sono le classi di omotopia di cammini con estremi in x_0, x_1, e sono tutti isomorfismi.

Data una applicazione continua $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ di spazi puntati essa induce un omomorfismo di gruppi $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ dato da $f_*[\alpha] := [f \circ \alpha]$,[2]inoltre se $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ si ha $(gf)_* = g_* f_*$.

Questo è un primo esempio topologico di costruzione *funtoriale*

[1] in seguito vedremo gli altri gruppi di omotopia $\pi_i(X, x_0), i > 1$

[2] In effetti si tratta di un funtore fra i due gruppoidi di omotopia

1.5 Proposizione. *La costruzione del gruppo di omotopia è un funtore dalla categoria degli spazi topologici puntati alla categoria dei gruppi.*

troveremo presto con le teorie omologiche molti altri esempi.

Anche se il gruppo di omotopia dipende dal punto base vi è un modo di paragonare i gruppi di omotopia nei vari punti base quando X è connesso per archi.

Se x_0, x_1 sono due punti ed α un arco che li connette si ha una applicazione

$$\gamma_{[\alpha]} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),\ [\beta] \to [\alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha]$$

Si prova facilmente che tale applicazione è un isomorfismo di gruppi la cui inversa è indotta dal cammino inverso α^{-1}.[3]

Si noti che, se $\pi_1(X, x_0)$ non è commutativo, l'isomorfismo fra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ dipende in modo non banale dalla classe di omotopia di α.

1.6 Definizione. *Uno spazio connesso per archi si dice* **semplicemente connesso** *se*
$\pi_1(X, x_0)$ *si riduce ad* 1.

La proprietà di semplice connessione si può anche interpretare secondo il Teorema 1.3.4, X è semplicemente connesso se e solo se due cammini con i medesimi estremi sono omotopi ad estremi fissati.

È utile confrontare i morfismi indotti da due funzioni $f, g : X \to Y$ anche nel caso che esse siano legate da una omotopia libera $F : X \times I \to Y$.

Sia $y_0 = f(x_0),\ y_1 = g(x_0)$, l'omotopia F definisce un cammino $\alpha(t) := F(x_0, t)$ fra y_0 ed y_1.

Dato un laccio β in X, per ogni s la funzione $\beta_s := F(\beta(t), s)$ è un laccio in Y puntato in $\alpha(s)$. Sia dunque $\alpha_s(t) := \alpha(st)$ il cammino α arrestato al tempo s fra y_0 ed $\alpha(s)$. Il cammino $\lambda_s := \alpha_s \circ \beta_s \circ \alpha_s^{-1}$ è un laccio puntato in y_0 e la funzione $G(s, t) := \lambda_s(t)$ è una omotopia fra $f(\beta)$ e $\alpha \circ (\beta) \circ \alpha^{-1}$.

Questo vuol dire che si ha un diagramma commutativo di gruppi ed omomorfismi.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\
\Big\| & & \Big\downarrow \gamma_{[\alpha]} \\
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(Y, y_1)
\end{array}$$

In particolare vediamo che, se f è una equivalenza di omotopia fra X, Y, si ha che f_* è un isomorfismo.

Otteniamo alcuni corollari immediati.

[3] Nel gruppoide di omotopia $[\alpha] : x_0 \to x_1$ è un isomorfismo

COROLLARIO 1.7. *Se X è contraibile, X è semplicemente connesso. In particolare $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{I}^n, \mathbb{D}^n$ sono semplicemente connessi.*

Per quanto riguarda le sfere, vedremo che S^n è semplicemente connessa non appena $n > 1$ mentre $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

2 Rivestimenti

NOTA In questo paragrafo discutiamo la teoria dei rivestimenti, introducendola da un punto di vista formalmente analogo alla Teoria di Galois.

Costruiamo il rivestimento universale come analogo della chiusura algebrica.

RIVESTIMENTI La nozione di gruppo fondamentale è strettamente legata a quella di *rivestimento.*

2.1 DEFINIZIONE.

(1) *Una applicazione $p : X \to Y$ si dice un* **omeomorfismo locale** *se, per ogni punto $x \in X$, esiste un intorno aperto X_α di x e p ristretta ad X_α è un omeomorfismo su un aperto di Y.*

(2) *Una applicazione $p : X \to Y$ si dice un* **rivestimento banale** *se X si può decomporre in un unione disgiunta di aperti X_α e p ristretta ad X_α è un omeomorfismo su Y.*

(3) *p si dice un* **rivestimento** *se esiste un ricoprimento $\mathcal{U} := \{U_i\}$ di Y tale che, per ogni i, la restrizione di p a $p^{-1}(U_i)$ è un rivestimento banale. Questa proprietà si esprime dicendo che $\mathcal{U} := \{U_i\}$ è un ricoprimento di Y* **ben rivestito**.

Si noti che un rivestimento è anche un omeomorfismo locale mentre il viceversa è chiaramente falso (si consideri l'immersione di un aperto).

Si noti che, se Y è connesso e $p : X \to Y$ è un rivestimento banale, gli X_α sono necessariamente le componenti connesse di X. Utilizzeremo questo fatto se Y è *localmente connesso* e p un rivestimento qualunque.

Dati due rivestimenti $p_1 : E_1 \to X$, $p_2 : E_2 \to X$ dello stesso spazio X un morfismo di rivestimenti (covering transformation) è un morfismo $f : E_1 \to E_2$ per cui $p_1 = p_2 f$. In diagramma:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & E_2 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Se $E_1 = E_2 = E$ l'insieme degli automorfismi di E (come rivestimento) è un gruppo.

Esempio fondamentale I rivestimenti $exp : \mathbb{R} \to S^1$, $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ dati dalla formula $t \to e^{2\pi it}$.

Preso comunque un elemento $\alpha \in S^1$ sia b un suo logaritmo $\alpha = e^{2\pi ib}$. Gli altri logaritmi sono $b + \mathbb{Z}$.

Ciascuna componente connessa di $\mathbb{R} - \{b + \mathbb{Z}\}$ è un intervallo aperto $(b + n, b + n + 1)$ che fornisce una determinazione continua per il logaritmo in $S^1 - \alpha$.

$exp : \mathbb{R} - \{b + \mathbb{Z}\} \to S^1 - \alpha$ è un rivestimento banale.

Le trasformazioni $t \to t + m,\ m \in \mathbb{Z}$ sono covering transformations per il rivestimento dato (questo esprime la identità $e^{2\pi i(x+m)} = e^{2\pi ix}$).

Identica considerazione per l'esponenziale su tutti i numeri complessi a valore i complessi non nulli in questo caso ad esempio i complessi meno una semiretta passante per l'origine sono ben rivestiti e si possono scegliere su tale insiemi le infinite determinazioni del logaritmo.

Secondo Esempio Sia $\overset{\circ}{D} := \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ il disco unitario bucato in $\mathbb{C}$ e k un intero. L'applicazione $p_k : \overset{\circ}{D} \to \overset{\circ}{D}$ data da $z \to z^k$ è un rivestimento le cui covering transformations è il gruppo $\mathbb{Z}/(|k|)$ delle radici $|k|-$esime di 1. Date da $z \to ze^{\frac{2\pi h}{|k|}}$, $0 \leq h < |k|$.

Figura 4

Terzo Esempio La Teoria delle funzioni ellittiche ed il teorema di uniformizzazione. Per una breve discussione si veda la fine di questo capitolo.

2.2 Esercizio Sia B connesso F uno spazio discreto ed $E := B \times F \xrightarrow{p} B$ rivestimento banale di B. Si provi che il gruppo degli automorfismi di tale rivestimento si può identificare con il gruppo delle trasformazioni biunivoche di F.

Dato un diagramma:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

un **sollevamento** di f è una funzione $\tilde{f} : Y \to E$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$

Abbiamo il seguente.

2.3 LEMMA. *Sia $p : E \to B$ un omeomorfiasmo locale e Y connesso.*

Due sollevamenti $\tilde{f}, \tilde{g}$ della stessa applicazione $f : Y \to B$ coincidono se coincidono in un punto.

DIM. Poiché l'insieme dei punti su cui due applicazioni continue (a valori uno spazio di Hausdorff) coincidono è chiuso basta, nel nostro caso, provare che l'insieme dei punti in cui $\tilde{f}, \tilde{g}$ coincidono è anche aperto.

Sia dunque $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y) = x$ e sia A in intorno aperto di x per cui p ristretto ad A è un omeomorfismo su un aperto $p(A)$. Per continuità esiste un intorno aperto V di y tale che $\tilde{f}(V) \subset A, \tilde{g}(V) \subset A$.

Poichè $p : A \to p(A)$ è biunivoca e $p\tilde{f} = p\tilde{g} = f$, ne segue che $\tilde{f}, \tilde{g}$ coincidono su V.

Ora abbiamo l'importante

2.4 TEOREMA DI SOLLEVAMENTO. *Sia $p : E \to B$ un rivestimento.*

(1) *Dato un cammino $\alpha : I \to B$ e dato $x \in E$ con $p(x) = \alpha(0)$ esiste (un unico) sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α con $\tilde{\alpha}(0) = x$.*
(2) *Data una funzione (continua) $f : Y \to E$ ed una omotopia $F : Y \times I \to B$ della mappa $p \circ f$ esiste una omotopia $\tilde{F} : Y \times I \to E$ che solleva F e per cui $\tilde{F}(y, 0) = f(y)$.*

DIM. 1) L'unicità segue dal lemma precedente. Per l'esistenza sia $\mathcal{U} := \{U_i\}$ un ricoprimento di B ben rivestito.

Dal lemma sul numero di Lebesgue esiste un n per cui, dividendo l'intervallo I in n segmenti uguali $I_k := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}],\ k = 1, \ldots, n$ si ha che $\alpha(I_k) \subset U_{i_k}$ per qualche i_k.

Supponiamo per induzione di avere definito $\tilde{\alpha}$ sull'intervallo $[0, \frac{k}{n}]$ possiamo considerare il punto $x_k := \tilde{\alpha}(\frac{k}{n})$ che si trova in un aperto, contenuto in $p^{-1}(U_{i_{k+1}})$, che si proietta omeomorficamente su $U_{i_{k+1}}$. È chiaro allora che, utilizzando l'inverso di questo omeomorfismo, possiamo definire $\tilde{\alpha}$ sull'intervallo $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ con il valore iniziale $x_k := \tilde{\alpha}(\frac{k}{n})$.

2) Da 1) segue che esiste una unica funzione $\tilde{F} : Y \times I \to E$ che solleva F, per cui $\tilde{F}(y, 0) = f(y)$ e tale che, per ogni $y \in Y$ si abbia che $\tilde{F}(y, t) : I \to E$ è continua (sollevamento dei vari cammini). Basta quindi provare che $\tilde{F}$ è continua.

Sia $y \in Y$ un punto, esiste un numero finito di intorni aperti A_k in E che, tramite p, sono omeomorfi ad aperti $p(A_k)$ di B ed una decomposizione di I in n intervalli tali che $\tilde{F}(y, t) \in A_k$ per ogni $t \in I_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Per continuità esiste un intorno U_1 di y per cui $f(y) = \tilde{F}(y, 0) \in A_1$ e quindi per la definizione di $\tilde{F}$ (vedi la prima parte) si ha $\tilde{F}(y, t) \in A_1$ per $(y, t) \in U_1 \times I_1$ e su tale insieme F è continua. Poi, ragionando nello stesso modo esiste, per ogni k un intorno U_k di y con $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_k$ tale che $\tilde{F}(y, t) \in A_k$

per $(y,t) \in U_k \times I_k$ e su tale insieme è continua. Prendendo $U := \cap U_k$ si ha dunque che $\tilde{F}$ ristretta ad $U \times I$ è continua . $\square$

Esempio di sollevamento
su un rivestimento
triplo.

Figura 5

Morfismi di rivestimenti Sia ora $p : E \to B$ un rivestimento. Supponiamo che B sia connesso per archi. Dato $x \in B$ sia $F_x := p^{-1}(x)$ la fibra in x.

Prendiamo due punti x, y in B e sia α un cammino da x ad y. Per ogni punto $u \in F_x$ sia α_u il sollevamento di α con inizio in u. Il punto $\alpha_u(1)$ è dunque un punto di F_y.

2.5 Lemma. *L'applicazione $u \to \alpha_u(1)$ è una corrispondenza biunivoca fra F_x ed F_y che dipende solo dalla classe di omotopia (ad estremi fissati) di α.*

Dato un terzo punto z ed un cammino β da y a z la corrispondenza fra F_x ed F_z indotta dal cammino composto $\alpha \circ \beta$ è la composizione delle corrispondenze indotte da α e β.

Dim. La proprietà che $\alpha_u(1)$ dipende solo dalla classe di omotopia (ad estremi fissati) di α è conseguenza del Teorema di sollevamento della omotopia e del fatto che le fibre sono discrete. Da questo e dal fatto che $\alpha^{-1} \circ \alpha$ è omotopa all'identità segue che la corrispondenza indotta da α fra F_x ed F_y e quella indotta da α^{-1} fra F_y ed F_x sono inverse l'una dell'altra.

Dalla definizione e dalla unicità del sollevamento segue che:

$$(\alpha \circ \beta)_u = \alpha_u \circ \beta_{\alpha_u(1)}.$$

□

Se $f \in F_{x_0}, [\gamma] \in \pi_1(B, x_0, x_1)$ si pone

$$f[\gamma] := \gamma_f(1) \tag{2.6}$$

Pensiamo ad $(f, [\alpha]) \to f[\alpha]$ come una composizione $F_{x_0} \times \pi_1(B, x_0, x_1) \to F_{x_1}$. Se $\alpha(1) = \beta(0)$ abbiamo inoltre

$$f([\alpha][\beta]) = (f[\alpha])[\beta]$$

Nel linguaggio del gruppoide di omotopia possiamo dire che la applicazione $x \to F_x$ è un *funtore* detto *funtore fibra* dal gruppoide di omotopia agli insiemi.

In particolare abbiamo una **azione destra**[4] del gruppo di omotopia $\pi_1(B, x_0)$ sulla fibra F_{x_0}.

2.7 Esercizio Provare che, se X è connesso per archi, vi è una corrispondenza biunivoca fra *funtori dal gruppoide di omotopia agli insiemi* da una parte e $\pi_1(X, x_0)$ *insiemi* dall'altra.

Data una azione destra di un gruppo G su un insieme F essa induce la seguente relazione di equivalenza.

$$x \cong y \text{ se e solo se esiste } g \in G \text{ con } y = xg.$$

Le classi di equivalenza sono dette orbite di G in F.

Dato un $f \in F$ l'orbita $fG := \{fg,\ g \in G\}$ si descrive come segue.

Sia $H = St_f := \{g \in G | fg = f\}$, chiaramente H è un sottogruppo di G (detto stabilizzatore di f o piccolo gruppo) e $fg = fh$ se e solo se $gh^{-1} \in H$.

Quindi fG è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $H\backslash G$ delle classi laterali Hg. Su questo insieme G opera a destra ponendo $(Hg)k := Hgk$ e la corrispondenza data è chiaramente un isomorfismo di $G-$insiemi.

2.8 Proposizione.

(1) *Le orbite della azione di $\pi_1(B, x_0)$ sulla fibra F_{x_0} sono le intersezioni della fibra con le componenti connesse per archi di E.*
(2) *Se B è semplicemente connesso e E è connesso allora p è un omeomorfismo.*

Dim. La seconda parte segue dalla prima, visto il Lemma 2.2. Per la prima se x, y sono nella stessa orbita allora esiste un cammino che li congiunge per definizione. Viceversa un cammino che unisce x, y si proietta ad un laccio di cui esso è il sollevamento concludendo la dimostrazione. □

Esempio importante La Teoria delle funzioni polidrome

Sia S^2 la sfera di Riemann ovvero il piano complesso compattificato con un punto all'infinito. Su S^2 usualmente abbiamo due *carte coordinate* una di coordinata $z \in \mathbb{C}$ e l'altra con coordinata $w := 1/z$.

Consideriamo l'insieme Y definito nel seguente modo, Y è l'insieme delle coppie (p, f) dove $p \in S^2$ è un punto di S^2 ed f è un *germe*[5] *funzione olomorfa in* p in pratica in coordinate si tratta di una serie di Taylor convergente in un intorno di a.

[4] Una azione destra di un gruppo G su un insieme F è una composizione $F \times G \to F$, in formule $(x, g) \to xg$, per cui $x1 = x,\ x(hg) = (xh)g,\ \forall x \in F, \forall h, g \in G$. Un morfismo $f : A \to B$ di due G insiemi destri è una applicazione per cui $f(ag) = f(a)g, \forall a \in A,\ \forall g \in G$.

[5] si intende per germe di funzione in un punto la classe di equivalenza ottenuta dall'insieme delle funzioni definite in qualche intorno di p (dipendente dalla funzione) considerando equivalenti due funzioni che coincidono in un qualche intorno di p (dipendente dalla coppia di funzioni).

Ad esempio nella prima carta p ha coordinata a e si ha che $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ con raggio di convergenza non nullo.

Abbiamo una ovvia proiezione $\pi : Y \to S^2$ definita da $\pi(p, f) = p$ ed anche una ovvia funzione a valori complessi, che chiameremo y definita da $y : (p, f) \to f(p)$.

Su Y mettiamo una topologia nel modo seguente: prendiamo un aperto A di S^2 ed una funzione olomorfa g su A allora per ogni punto $p \in a$ possiamo definire come g_p il germe della funzione g in p abbiamo l'applicazione $i : A \to Y$ definita da $p \to (p, g_p)$.

Componendo i con la proiezione π si ha l'identità di A mentre componendo con y abbiamo la funzione g.

Mettiamo su Y la topologia più debole per cui gli insiemi $i(A)$ siano aperti. Proponiamo al lettore di verificare che, con tale topologia la funzione i prima data è un omeomorfismo fra A ed $i(A)$ e che la proiezione π è un omeomorfismo locale.

Inoltre data comunque una funzione continua $j : B \to Y$ da un aperto B di S^2 per cui $\pi \circ j = 1_B$ si ha che $y \circ j$ è olomorfa su B.

Se B è connesso presa la componente connessa Y_0 di Y contenete $j(B)$ la funzione y ristretta a Y_0 si dice la funzione olomorfa polidroma di cui $\pi \circ j$ è una determinazione.

Casi importanti di funzioni polidrome si ottengono risolvendo equazioni algebriche o differenziali inuna variabile complessa a coefficienti olomorfi. Ritorneremo su questo punto alla fine del capitolo.

Se diamo un morfismo $f : E_1 \to E_2$ di due rivestimenti $p_1 : E_1 \to B, p_2 :\ E_2 \to B$ di B ed un cammino α in B dalla unicità del sollevamento e la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow[f]{} & E_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & {\scriptstyle p_2}\downarrow \\ B & \xrightarrow[1_B]{} & B \end{array}$$

è chiaro che $\alpha_{f(u)} = f \circ \alpha_u$. Ne segue.

2.9 Proposizione. *Un morfismo di rivestimenti induce un morfismo fra le due fibre* $F_1 := p_1^{-1}(x_0),\ F_2 := p_2^{-1}(x_0)$ *compatibile con l'azione del gruppo fondamentale.*

Osservazione Nel linguaggio dei funtori un morfismo fra rivestimenti è una trasformazione naturali fra i due funtori fibra del gruppoide di omotopia.

Sia ora $p : E \to B$ un rivestimento, F la fibra di x_0.

2.10 Teorema. *Dato un punto* $f \in F$ *l'omomorfismo* $p_* : \pi_1(E, f) \to \pi_1(B, x_0)$ *è un isomorfismo fra* $\pi_1(E, f)$ *e* $St_f \subset \pi_1(B, x_0)$.

Se E è connesso e semplicemente connesso il gruppo di omotopia di B agisce in modo semplicemente transitivo sulla fibra F.[6]

Dim. Un laccio chiuso in E di estremi f è il sollevamento di un laccio di B che agisce banalmente su f quindi abbiamo una applicazione suriettiva da $\pi_1(E, f)$ a St_f. Ma se un laccio ha immagine contraibile il teorema di sollevamento della omotopia (ed il fatto che la fibra è discreta) provano che il laccio è contraibile in E.

Per il secondo enunciato, poiché E è connesso, $\pi_1(B, x_0)$ opera transitivamente sulla fibra, ma lo stabilizzatore di un qualunque punto è l'identità dalla semplice connessione di E. □

Si osservi che se un gruppo G opera in modo semplicemente transitivo su un insieme F ed un sottogruppo H di G opera transitivamente su F allora $H = G$ pertanto:

Corollario. *Il gruppo di omotopia di S^1 in 1, è il gruppo ciclico infinito generato dalla classe del laccio $\alpha : t \to e^{2\pi i t}$.*

Dim. Consideriamo il rivestimento $exp : \mathbb{R} \to S^1,\ t \to e^{2\pi t}$.
α si solleva al cammino $\alpha_0(t) = t,\ t \in [0, 1]$ con inizio 0 e fine 1.
Questa trasformazione genera il gruppo ciclico infinito che opera in modo semplicemente transitivo per traslazione sulla fibra isomorfa ad i numeri interi $\mathbb{Z}$.
Ne segue il teorema poiché $\mathbb{R}$ è contraibile e quindi semplicemente connesso. □

Rivestimenti e $G-$insiemi Vogliamo ora provare il teorema principale sui rivestimenti.

Sia B connesso per archi, x_0 un suo punto base, $G = \pi_1(B, x_0)$ il gruppo fondamentale.

Supponiamo inoltre che B localmente sia connesso e semplicemente connesso[7] (questo è vero ad esempio per spazi triangolabili e per varietà).

2.11 Teorema. *Il funtore fibra $(p : E \to B) \to F = p^{-1}(x_0)$ dalla categoria dei rivestimenti di B alla categoria dei G insiemi destri è una equivalenza di categorie.*

Dim. L'idea della dimostrazione è semplice. Si cerca di invertire il contenuto del Lemma 2.2.
Bisogna costruire il funtore inverso che ad ogni G insieme F associa un rivestimento.

Primo passo: costruzione di E come insieme. Questo passo consiste semplicemente nel costruire E come insieme di fibre, ovvero nel costruire, a partire dal $G-$insieme F, il funtore fibra dal gruppoide di omotopia agli insiemi.

[6] Un gruppo G opera transitivamente su un insieme X se dati comunque $x, y \in X$ esiste $g \in G$ con $y = xg$ ossia se ha una unica orbita, se inoltre tale g è unico si dice che opera in modo semplicemente transitivo, in questo caso, fissato un $x_0 \in X$ si ha una corrispondenza biunivoca $G \to X$ data da $g \to x_0 g$.

[7] ossia ogni punto di B ha una base di intorni aperti connessi e semplicemente connessi

Consideriamo l'insieme $Z := \{(f, \alpha)\}$ con α un cammino con inizio in x_0 ed $f \in F$. In Z imponiamo la seguente equivalenza

$$(f, \alpha) \cong (g, \beta) \text{ se e solo se }, \alpha(1) = \beta(1), \ f[\alpha \circ \beta^{-1}] = g.$$

Chiamiamo E l'insieme delle classi di equivalenza ed indichiamo con $[f, \alpha]$ la classe di (f, α).

Su E è definita una applicazione $p : E \to B$ data da $p(f, \alpha) := \alpha(1)$.

Si osservi prima di tutto che:

la classe di (f, α) in E dipende solo dalla classe di omotopia di α (ad estremi fissati).

L'equivalenza si può riscrivere nel modo seguente: se α è un laccio in x_0 e β è un cammino partente da x_0 si ha $(f, \alpha \circ \beta) \cong (f[\alpha], \beta)$.

Preso comunque un punto $x_1 \in B$ ed un cammino β da x_0 a x_1 l'applicazione $f \to [f, \beta]$ da F a $p^{-1}(x_1)$ è una corrispondenza biunivoca.

Secondo passo: descrizione locale di E. Sia $U \subset B$ un aperto semplicemente connesso, ed α un cammino di inizio x_0 con $\alpha(1) \in U$.

Costruiamo una identificazione $j_{[\alpha]} : F \times U \to p^{-1}(U)$ compatibile con le proiezioni su U.

Preso un punto $u \in U$ si prenda un qualunque cammino β in U che unisce $\alpha(1)$ con u. Dalle ipotesi fatte β è unico a meno di omotopia e quindi la classe di $(f, \alpha \circ \beta)$ non dipende da β. Poniamo dunque

$$j_{[\alpha]}(f, u) := [f, \alpha \circ \beta] \tag{2.12}$$

$j_{[\alpha]}$ è compatibile con le due proiezioni su U.

Per invertirla si prenda un qualsiasi punto (f, β) con $\beta(1) \in U$, si scelga un qualsiasi cammino γ in U che unisca $\beta(1)$ con $\alpha(1)$ e si osservi che $(f, \beta \circ \gamma) \cong (f[\beta \circ \gamma \circ \alpha^{-1}], \alpha)$ da cui l'inversa di j è

$$[f, \beta] \to (f[\beta \circ \gamma \circ \alpha^{-1}], \beta(1)) \tag{2.13}$$

Si noti ora che, dato un cammino γ in U ed iniziante in $\alpha(1)$ i due cammini $\alpha, \alpha \circ \gamma$ inducono la medesima identificazione di $F \times U$ con $p^{-1}(U)$.

Terzo passo: confronto di due trivializzazioni locali. Si prendano due scelte diverse di cammini α_1, α_2 con punto finale in U, vogliamo paragonare le due identificazioni.

Dalla osservazione precedente ci possiamo ridurre al caso $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$.

Sia $g := [\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}] \in G$.

Per $f \in F, u \in U$ si ha

$$j_{[\alpha_1]}(f, u) = [f, \alpha_1 \circ \beta] = [f[\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}], \alpha_2 \circ \beta] = j_{[\alpha_2]}(fg, u) \tag{2.14}$$

ovvero $j_{[\alpha_1]}$, $j_{[\alpha_2]}$ differiscono per l'isomorfismo del rivestimento banale $U \times F$ indotto dalla azione di g sulla fibra F.

Quarto passo: struttura topologica. Possiamo dare, in modo canonico, una struttura topologica $\mathcal{T}_U$ a $p^{-1}(U)$ per cui le identificazioni j_α siano omeomorfismi con $F \times U$.

Per costruzuione, se $V \subset U$ è un aperto semplicemente connesso $\mathcal{T}_V$ è indotta da $\mathcal{T}_U$.

Si è quindi definito un rivestimento E di B, localmente banale sugli aperti U connessi e semplicemente connessi.

Sia 1_{x_0} la classe del cammino costante in x_0. L'applicazione $f \to [f, 1_{x_0}]$ identifica F con la fibra F_{x_0}.

Quinto passo: $G-$azione Dato un cammino α di inizio in x_0 sia α_t il cammino tagliato al tempo t, $\alpha_t(s) := \alpha(st)$. È evidente che l'applicazione $t \to (f, \alpha_t)$ sia un sollevamento di α ad un cammino in E con punto iniziale f. Se α è un laccio tale cammino termina a $(f, \alpha) = (f[\alpha], 1_{x_0})$ per definizione.

Abbiamo quindi costruito un rivestimento con fibra F come G insieme.

Conclusione Dato un morfismo ϕ di $G-$insiemi questo induce un morfismo di rivestimenti con la formula

$$\phi([f, \alpha]) := [\phi(f), \alpha]. \tag{2.15}$$

ed il funtore fibra è chiaramente invertito in questo modo. $\square$

In particolare fra tutti i $G-$insiemi ridotti ad una sola orbita possiamo considerare il gruppo G stesso con l'azione di moltiplicazione a destra $(h, g) \to hg$.

Il rivestimento associato $\tilde{B}$ è quindi connesso e semplicemente connesso ed è detto **rivestimento universale**.

La proprietà di universalità viene anche dal teorema provato, in quanto i morfismi di rivestimento fra esso ed un rivestimento di fibra F sono dati dai morfismi G equivarianti fra G ed F.

Un tale morfismo è dato semplicemente da un elemento $f \in F$ dalla formula $g \to fg$.

2.16 Esercizi

(1) Siano $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ i rivestimenti universali di due spazi X, Y provare che $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ è rivestimento universale di $X \times Y$.

(2) Dati due G insiemi transitivi $H\backslash G$, $K\backslash G$ determinare i $G-$morfismi fra di essi tramite i sottogruppi H, K.

Provare in particolare che gli automorfismi del rivestimento di fibra $H\backslash G$ si identificano al gruppo quoziente N_H/H dove $N_H := \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$ è il normalizzatore di H in G, che opera per moltiplicazione a sinistra.

(3) In particolare il gruppo degli automorfismi del rivestimento universale è isomorfo al gruppo di omotopia e le sue orbite sul rivestimento universale sono le fibre della proiezione $p : \tilde{B} \to B$.

(4) Un rivestimento connesso si dice **Galoissiano** se il gruppo delle covering transformations è transitivo sulle fibre. Provare che un rivestimento connesso $p : E \to B$ è Galoissiano se e solo se il gruppo di omotopia di E è sottogruppo normale di quello di B. Estendere la nozione di Galoissiano a rivestimenti non connessi.

(5) Dato un gruppo G che opera su uno spazio X a sinistra,[8] diremo che G opera liberamente se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno aperto U di x tale che gli insiemi gU al variare di $g \in G$ sono disgiunti.

Provare che in questo caso, posto $B = X/G$, lo spazio delle orbite di G in X con la topologia quoziente, la proiezione $p : X \to X/G$ è un rivestimento Galoissiano di cui G è il gruppo delle covering transformations.

Esempio Sia $D := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. Il gruppo di omotopia di $D - \{0\}$ è $\mathbb{Z}$ ed il suo rivestimento universale $E := \{z \in \mathbb{C} | Re(z) < 0\}$ tramite l'esponenziale $z \to e^{2\pi i z}$. I sottogruppi di $\mathbb{Z}$ sono tutti del tipo $(m) := m\mathbb{Z}$ e quindi i $\mathbb{Z}$ insiemi transitivi sono $\mathbb{Z}/(m)$.

Ne segue che, a meno di isomorfismo vi è un unico rivestimento connesso di $D - \{0\}$ di ordine m esso può essere descritto dalla funzione $D - \{0\} \to D - \{0\}$ data da $z \to z^m$. Il rivestimento è Galoissiano con gruppo di Galois identico al gruppo delle radici $m-$esime della unità. Se $\zeta := e^{\frac{2\pi k}{m}}$ è una tale radice la trasformazione corrispondente è $z \to \zeta z$.

3 Il teorema di Seifert-Van Kampen

NOTA In questo paragrafo proviamo il teorema di Seifert-Van Kampen che è il principale strumento di calcolo dei gruppi di omotopia. L'idea è che, se uno spazio X si decompone nella unione di due sottospazi A, B si deve poter ricostrire il gruppo di omotopia di X a partire dai gruppi di omotopia dei sottospazi che, se scelti opportunamente, sono più semplici di X.

Il fatto che questa strategia si possa portare a buon fine dipende dalla osservazione che il gruppo di omotopia è essenzialmente determinato dalla categoria dei rivestimenti dello spazio e che per dare un rivestimento su $A \cup B$ è necessario e sufficiente dare separatamente due rivestimenti su A e su B insieme ad una regola di incollamento delle restrizioni di tali rivestimenti su $A \cap B$.

Questo permette di ricostruire il gruppo di omotopia della unione *incollando* i due gruppi di omotopia dei due sottospazi. La nozione tecnica di incollamento è quella di prodotto amalgamato di gruppi.

---

[8] Per le covering transformations conviene operare a sinistra. Ad esempio il rivestimento universale ha come fibra una copia del gruppo G con la azione di G per moltiplicazione destra, una trasformazione $\phi : G \to G$ compatibile con la moltiplicazione destra è necessariamente $g \to \phi(g) = \phi(1\dot{g}) = \phi(1)g$. Pertanto ϕ è la moltiplicazione a *sinistra* per $\phi(1)$.

Prodotto liberi e amalgamati Cominciamo con alcune definizioni (tipiche dell'algebra universale).

3.1 Definizione.

(1) *Dato un gruppo* F *ed un insieme di elementi* $X \subset F$ *diremo che* F *è gruppo libero sugli elementi* X *se, dato comunque un gruppo* G *ed una funzione* $f : X \to G$ *esiste un unico omomorfismo* $\tilde{f} : F \to G$ *che coincide con* f *su* X.

(2) *Dati due gruppi* G_1 *e* G_2 *e due morfismi* $i_1 : G_1 \to G,\ i_2 : G_2 \to G$ *diremo che* G *è* **prodotto libero** *di* G_1, G_2 *se dato comunque un gruppo* K *e due omomorfismi* $f_1 : G_1 \to K,\ f_2 : G_2 \to K$ *esiste un unico omomorfismo* $f : G \to K$ *tale che* $f_1 = fi_1,\ f_2 = fi_2$.

(3) *Sia dato un diagramma commutativo*[9] *di gruppi ed omomorfismi:*

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[dr, "j_2"] & \\ G_1 \arrow[dr, "i_1"'] & & G_2 \arrow[dl, "i_2"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

diremo che G *è* **prodotto** *di* G_1, G_2 **amalgamato** *lungo* H *se* $i_1 j_1 = i_2 j_2$ *e dato comunque un gruppo* K *e due omomorfismi* $f_1 : G_1 \to K,\ f_2 : G_2 \to K$ *con* $f_1 j_1 = f_2 j_2$ *esiste un unico omomorfismo* $f : G \to K$ *tale che* $f_1 = fi_1,\ f_2 = fi_2$.

Diagrammaticamente

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[dr, "j_2"] & \\ G_1 \arrow[dr, "i_1"'] & & G_2 \arrow[dl, "i_2"] \\ & G \arrow[d, "f"] & \\ & K & \end{tikzcd}$$

3.2 Teorema. *Dato un insieme* X *esiste ed è unico (a meno di un unico isomorfismo) un gruppo libero su* X *e lo denoteremo* $F\langle X\rangle$.

Dati due gruppi G_1 *e* G_2 *esiste ed è unico (a meno di un unico isomorfismo) il prodotto libero di* G_1, G_2 *e lo denoteremo con* $G_1 * G_2$.

[9] Un diagramma di oggetti e morfismi si dice commutativo quando, passando da un punto all'altro del diagramma componendo morfismi del diagramma si ottiene sempre il medesimo morfismo.

Dati tre gruppi G_1, G_2, H e due morfismi $j_1 : H \to G_1,\ j_2 : H \to G_2$ esiste ed è unico (a meno di un unico isomorfismo) il prodotto amalgamato di di G_1, G_2 lungo H e lo denoteremo con $G_1 *_H G_2$.

DIM. L'unicità è un ragionamento di *proprietà universali.* È identico nei tre casi ma svolgiamolo solo nel primo. Siano $i_1 : X \to F_1,\ i_2 : X \to F_2$ due gruppi liberi su X. Poichè F_1 è libero esiste un unico morfismo $f : F_1 \to F_2$ tale che $fi_1 = i_2$ similmente esiste $g : F_2 \to F_1$ perché anche F_2 è libero. Ma $gf : F_1 \to F_1$ è un morfismo con $gfi_1 = i_1 = 1_{F_1} i_1$ e per ipotesi esiste un unico morfismo che composto con i_1 da i_1 da cui $gf = 1_{F_1}$. Similmente per fg ottenendo che i due morfismi sono isomorfismi uno inverso dell'altro.

Per l'esistenza del gruppo libero si può lavorare formalmente. Si introducono formalmente nuove variabili $X^{-1} := \{x^{-1},\ x \in X\}$ e si parte dal monoide libero ovvero l'insieme di tutte le parole formali nelle *variabili* $x \in X,\ y^{-1} \in X^{-1}$ e nelle loro inverse, moltiplicate per giustapposizione. Poi si introduce la relazione di equivalenza dedotta dalla sola relazione di semplificazione $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ (con 1 la parola vuota). L'insieme quoziente è il gruppo libero eed i suoi elementi si possono rappresentare come parole nelle x, y^{-1} *non semplificabili.*

Per il prodotto libero basta prendere generatori X_i per i due gruppi G_i e presentarli dunque come $G_i = F\langle X_i \rangle / K_i$ con K_i normale. Per il prodotto libero si verifica immediatamente che si può prendere il gruppo libero $F\langle X_1 \cup X_2 \rangle / K$ dove K è il sottogruppo normale di $F\langle X_1 \cup X_2 \rangle$ generato da K_1, K_2. Infine per il prodotto amalgamato basta prendere il prodotto libero di G_1, G_2 e detti i_1, i_2 le due mappe di G_1, G_2 in $G_1 * G_2$, quozientare per il sottogruppo normale di $G_1 * G_2$ generato dagli elementi $i_1 j_1(h) i_2 j_2(h)^{-1},\ h \in H$. $\square$

Esempio Dati due insiemi disgiunti X_1, X_2 si ha

$$F\langle X_1 \cup X_2 \rangle = F\langle X_1 \rangle * F\langle X_2 \rangle.$$

In particolare il gruppo libero su n elementi è il prodotto libero di n copie del gruppo ciclico infinito.

Un caso speciale di prodotto amalgamato si ha quando uno dei due gruppi, ad esempio G_2, si riduce all'identità. In questo caso si vede facilmente che $G_1 *_H \{1\}$ è il quoziente di G_1 per il sottogruppo normale generato dall'immagine di H.

È utile interpretare queste costruzioni nel linguaggio degli insiemi con $G-$azioni.

Un $F\langle X \rangle-$insieme non è altro che un insieme A con una famiglia di trasformazioni biunivoche indicizzate da X.

Un $G_1 * G_2-$insieme non è altro che un insieme A con due azioni di G_1, G_2 rispettivamente (senza alcuna ipotesi di compatibilità).

Infine un $G_1 *_H G_2-$insieme non è altro che un insieme A con due azioni di G_1, G_2 rispettivamente che però ristrette ad H inducano la medesima azione.

In effetti questa proprietà caratterizza il prodotto amalgamato.

3.3 Proposizione. *Dato un diagramma commutativo di gruppi ed omomorfismi:*

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\ G_1 & & G_2 \\ i_1 \searrow & & \swarrow i_2 \\ & K & \end{array}$$

G è prodotto di G_1, G_2 amalgamato lungo H se e solo se dato comunque un insieme X con una azione di G_1 e una di G_2 compatibili su H esiste una unica azione di G su X che induce su G_1, G_2 le due azioni date.

Dim. Una azione di un gruppo su un insieme X altro non è che un omomorfismo $G \to S(X)$ da G al gruppo delle trasformazioni biunivoche di X, pertanto dalla definizione di prodotto amalgamato, se G è prodotto amalgamato l'esistenza di una unica azione di G su X compatibile con i dati segue dalla proprietà universale.

Viceversa supponiamo che valga l'altra condizione e prendiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ j_1 \swarrow & & \searrow j_2 \\ G_1 & & G_2 \\ i_1 \searrow & & \swarrow i_2 \\ & K & \end{array}$$

Utilizzando la moltiplicazione sinistra di K su se stesso abbiamo definito su K azioni di G_1 e di G_2 compatibili su H e quindi possiamo estendere queste ad una azione di G su K. Se sapessimo che G è generato da G_1, G_2 ne dedurrremo che questa azione è fatta da moltiplicazioni sinistre per elementi di K e quindi ne dedurremmo il desiderato omomorfismo $G \to K$.

Resta dunque da provare che G è generato da G_1, G_2. sia G_0 il sottogruppo generato da G_1, G_2 e $G = \cup G_0 x$ è unione di classi laterali. Le azioni sistre di G_1, G_2 su G si estendono in modo unico ad una azione di G su G che quindi deve essere la moltiplicazione sinistra, ma d'altra parte G_0 è stabile per G_1, G_2 e quindi anche queste azioni si estendono ad ogni classe laterale. Ne segue che tutte le classi laterali di G_0 sono anche stabili per G il che implica $G = G_0$.

Nel linguaggio delle categorie i tre tipi di gruppi costruiti sono oggetti che rappresentano dei funtori a valori insiemi (si riveda il Capp. 2, 1.3).

Il gruppo $F\langle X\rangle$ rappresenta il funtore $G \to G^X$.

Il prodotto libero $G_1 * G_2$ rappresenta $G \to \mathrm{Hom}(G_1, G) \times \mathrm{Hom}(G_2, G)$.

Per il prodotto amangamato ricordiamo la nozione di **prodotto fibrato**.

Dato un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & C \\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow{p} & D \end{array}$$

si dice che A è prodotto fibrato di B, C su D e si scrive $A := B \times_D C$ se, tramite le due funzioni i, j, l'insieme A si identifica a $\{(x, y) \in B \times C |\, p(x) = q(y)\}$.

Con questa nozione $G_1 *_H G_2$ rappresenta $G \to \mathrm{Hom}(G_1, G) \times_{\mathrm{Hom}(H,G)} \mathrm{Hom}(G_2, G)$.

Possiamo ora provare il

3.4 Teorema Seifert Van Kampen. *Sia $X = A \cup B$ uno spazio topologico unione di due aperti A, B.*

Supponiamo che A, B siano connessi e localmente semplicemente connessi, $A \cap B$ sia connesso. Sia $x_0 \in A \cap B$ e consideriamo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A \cap B, x_0) & \xrightarrow{j_1} & \pi_1(A, x_0) \\ \big\downarrow{\scriptstyle j_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle i_1} \\ \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{i_2} & \pi_1(A \cup B, x_0) \end{array}$$

i morfismi indotti dalle inclusioni.

Questo diagramma è un prodotto amalgamato.

Dim. Prendiamo un laccio in $A \cup B$ e spezziamolo in una composizione di cammini ciascuno contenuto in A o in B alternativamente (senza escludere che sia contenuto in entrambi). Poichè l'inizio di ogni cammino è la fine del precedente tali punti iniziali sono contenuti in $A \cap B$. Poiché $A \cap B$ è connesso possiamo inserire fra uno di questi cammini ed il successivo un cammino in $A \cap B$ congiungente tale punto con x_0 ed il cammino inverso, in modo da provare che ogni elemento di $\pi_1(A \cup B, x_0)$ è composizione di elementi dei due sottogruppi $\pi_1(A, x_0), \pi_1(B, x_0)$ abbiamo quindi un omomorfismo suriettivo

$$\pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B, x_0) \xrightarrow{\rho} \pi_1(A \cup B, x_0).$$

Dobbiamo provare che è un isomorfismo.

Sfruttiamo la caratterizzazione categorica dei rivestimenti. Un rivestimento di $A \cup B$ si può dare costruendo separatamente due rivestimenti di A, B ed un isomorfismo fra essi sulla intersezione.

Pertanto un tale rivestimento è descritto da un $\pi_1(A, x_0)-$insieme F_1 ed un $\pi_1(B, x_0)-$ insieme F_2 con un isomorfismo compatibile con le due azioni di $\pi_1(A \cap B, x_0)$ indotte.

Il prodotto amalgamato $\pi_1(A, x_0)*_{\pi_1(A\cap B)}\pi_1(B, x_0)$ con le azioni indotte dei due gruppi è un esempio di tale insieme e quindi è la fibra di un rivestimento su cui opera il gruppo di omotopia $\pi_1(A \cup B, x_0)$ per moltiplicazione destra.

Il gruppo delle moltiplicazioni destre di un gruppo G è G stesso e quindi abbiamo trovato un omomorfismo da $\sigma : \pi_1(A \cup B, x_0) \to \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A\cap B)} \pi_1(B, x_0)$ che solleva la proiezione ρ. Poiché un prodotto amalgamato è generato dalle immagini dei due fattori σ è suriettivo e quindi ρ è un isomorfismo. Il teorema è quindi provato. □

3.5 Esercizio Sia $F : \mathcal{C} \to Sets$ il *forgetful functor* dalla categoria dei $G-$insiemi a quella degli insiemi, che *dimentica* la $G-$azione. Provare che $Nat(F, F)$ si identifica a G^0.

Osservazione L'esperienza degli ultimi 50 anni ha mostrato che l'intreccio fra teoria dei gruppi e topologia, dato dalle nozioni di rivestimento e gruppo fondamentale, si può usare in entrabe le direzioni, ovvero utilizzare tecniche e teoremi di Teoria dei gruppi per analizzare la topologia di un dato spazio ma anche viceversa, alcuni teoremi profondi di teoria dei gruppi trovano una dimostrazione naturale (o anche la sola possibile) solo da considerazioni geometriche sugli spazi di cui sono gruppi di omotopia.

Applicazioni.

Se si prendono due spazi X_1, X_2 (connessi e localmente semplicemente connessi) e si incollano lungo un punto, che viene indicato con x_0, si ha un nuovo spazio, detto *bouquet* dei due spazi ed indicato con $X_1 \vee X_2$ e si ottiene

$$\pi_1(X_1 \vee X_2, x_0) = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0).$$

In particolare se si incollino fra loro in un punto n copie di un cerchio S^1 si ottiene che il gruppo di omotopia dello spazio costruito (un bouquet di circonferenze) è il gruppo libero generato dai cammini che generano singolarmente il gruppo di omotopia di ciascuna circonferenza.

Una conseguenza (cf. 1.2)

Corollario. *Il gruppo di omotopia del piano meno n punti distinti è libero su n lacci che girano semplicemente intorno a ciascun punto.*

Un altro esempio notevole è il calcolo del gruppo di omotopia per una superficie orientabile Σ_g di genere g che si può presentare (cfr. Cap. 4) come un poligono con con $4g$ lati che vengono indicati con x_i, y_i identificati secondo lo schema

$$x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1}\dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$$

In questo caso si sceglie come A l'interno del poligono che è contraibile, come B l'aperto ottenuto bucando la superficie nel centro del poligono.

L' aperto B si retrae sul bordo del poligono che è un bouquet di $2g$ circonferenze corrispondenti ad i lati x_i, y_i pertanto il suo gruppo di omotopia è libero su generatori che ancora potremo indicare con x_i, y_i.

$A \cap B$ è omeomorfo ad un cerchio bucato ed il suo gruppo di omotopia è ciclico infinito generato da un giro intorno al centro.

Tale cerchio corrisponde a percorrere circolarmente il bordo del poligono e quindi induce sul bouquet di circonferenze l'elemento $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1}\dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$. Pertanto si deduce per $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ la espressione:

$$F\langle x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_g, y_g\rangle / \langle x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1}\dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}\rangle$$

dove con $\langle u\rangle$ indichiamo il sottogruppo normale generato da un elemento u di un gruppo dato.

Questo paragrafo è molto schematico, ha come scopo di dare una idea dei metodi topologici nella teoria delle funzioni algebriche. Si tratta di un approfondimento delle idee legate al concetto di funzioni polidrome.

Esempi Sia $f(x,y) := \sum_{i=0}^n a_i(x)y^i \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio irriducibile di grado n in y. Esiste un polinomio $\Delta(x)$ detto **discriminante** di f con la proprietà che, se ξ non è uno zero di $a_n(x)\Delta(x)$, il polinomio in una variabile $f(\xi,y) := \sum_{i=0}^n a_i(\xi)y^i \in \mathbb{C}[y]$ ha $n-$radici distinte. Siano $\{P_1,\dots,P_N\}$ gli zeri di $a_n(x)\Delta(x)$.

Se $\xi \in \mathbb{C} - \{P_1,\dots,P_N\}$, η è una qualunque radice di $f(\xi,y)=0$, la derivata parziale $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ calcolata in ξ,η è non nulla e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, esiste un intorno A di ξ ed $n-$funzioni olomorfe $y_i(x)$ che in ogni punto di A danno le n radici distinte di $f(x,y)=0$. Sia

$$\Sigma := \{(\xi,y) \in \mathbb{C}^2 |\, a_n(\xi)\Delta(\xi) \neq 0,\ f(\xi,y)=0\} \tag{3.6}$$

Conviene pensare a $\mathbb{C}$ come alla sfera di Riemann S^2 privata del punto all'infinito P_0. Dalla analisi fatta otteniamo:

3.7 Teorema. *Σ è un rivestimento ad n fogli di $\mathbb{C}-\{P_1,\dots,P_N\} = S^2-\{P_0,P_1,\dots,P_N\}$.*

Il lettore inizierà con il verificare che Σ si identifica in modo naturale ad un aperto della superficie di Riemann della funzione polidroma di cui una determinazione è ciascuna delle $n-$funzioni olomorfe $y_i(x)$.

Vogliamo rapidamente discuterlo. Prima di tutto proviamo che Σ è connessa.

Prendiamo una componente connessa Σ_i con k fogli, la fibra su x della proiezione corrisponde a k radici $\eta_1(x),\dots,\eta_k(x)$ della equazione data il cui ordine può essere fissato solo su quegli aperti su cui il rivestimento è banale. Il polinomio $\prod_{i=1}^k(t-\eta_i(x))$ è canonicamente definito indipendente dalla banalizzazione e quindi i suoi coefficienti sono funzioni olomorfe su $\mathbb{C}-\{P_1,\dots,P_N\}$.

Non è difficile provare che tali coefficienti hanno al più poli nei punti P_i ed in ∞ da cui segue che sono funzioni razionali (cf. il resto della discussione).

In questo modo si ottiene una fattorizzazione non banale di $f(x,y)$ su $\mathbb{C}(x)[y]$ una contraddizione all'ipotesi di irriducibilità di $f(x,y)$.

Pertanto abbiamo associato, ad una equazione algebrica irriducibile $f(x,y) = 0$ un rivestimento connesso di grado finito su $\mathbb{C} - \{P_1, \dots, P_N\}$.

Per analizzare tali rivestimenti sfruttiamo la teoria svolta. Fissiamo un punto x_0 in $S^2 - \{P_0, P_1, \dots, P_N\}$, abbiamo visto che il gruppo di omotopia di questo spazio è il gruppo libero in n generatori x_i che si possono prendere come cammini che da x_0 vanno verso ciascuno dei punti P_i, girano intorno a P_i e tornano indietro.

Quindi il rivestimento è determinato dalla azione di questi elementi sulla fibra in x_0, geometricamente capire questa azione significa capire come si passa da una determinazione (ovvero radice) all'altra della funzione polidroma che esprime la soluzione della equazione. Dal punto di vista algebrico descrivere un tale rivestimento significa esibire N permutazioni di n elementi.

Il rivestimento è connesso se e solo se il gruppo di permutazioni generato dalle permutazioni date è transitivo.

Poichè il gruppo di omotopia è libero ad ogni scelta di N permutazioni di n elementi corrisponde un rivestimento finito Σ di $\mathbb{C} - \{P_1, \dots, P_N\}$.

Un Teorema non banale Il teorema di esistenza di Riemann afferma che viceversa ogni tale rivestimento può essere associato alla soluzione di una equazione algebrica (cf.).

Per le superfici la precedente teoria dei rivestimenti viene usualmente completata introducendo la nozione di rivestimento ramificato (che non ha analogie semplici nel caso generale). Il passo successivo è quello di prendere, per ogni $i \leq N$, un intorno circolare $D - P_i$ in $S^2 - \{P_0, P_1, \dots, P_N\}$ di uno dei punti $\{P_0, P_1, \dots, P_N\}$.

Sia Σ_D la parte del rivestimento sopra $D - P_i$. Scegliamo una coordinata complessa z in D in modo tale che $P_i = 0$ e $D := \{z||z| < 1\}$. Dall Esempio 1.6 segue che Σ_D è isomorfo alla unione disgiunta di dischi bucati su ciascuno dei quali, in una opportuna coordinata w il rivestimento è dato da $z = w^n$.

Nella teoria delle superfici di Riemann si passa immediatamente a compattificare Σ, rimpiazzando ogni disco bucato della descrizione precedente con un disco chiuso e costruendo così una superficie compatta $\overline{\Sigma}$ da cui Σ si ottiene togliendo un numero finito di punti, questa superficie, detta superficie di Riemann della equazione $f(x,y)$, ha chiaramente delle naturali coordinate olomorfe per costruzione.
Mantenendo la formula $z = w^n$ si vede che il rivestimento si estende ad una funzione olomorfa da $\overline{\Sigma} \to S^2$ che viene detto **rivestimento ramificato**.

Questa è una delle basi topologiche della teoria delle funzioni algebriche e quindi delle curve algebriche complesse e delle superfici di Riemann compatte.

Secondo esempio Si può continuare ad applicare la teoria dei rivestimenti alle superfici di Riemann costruendo il rivestimento universale di una superficie Σ. Questa Teoria ha una lunga storia per cui rimandiamo ai testi (cfr.).

Il primo esempio è stata la teoria delle funzioni ellittiche che produce in particolare l'esistenza di due funzioni doppiamente periodiche su $\mathbb{C}$ (rispetto alla traslazione per un sottogruppo $\Lambda := \{m + n\tau | m, n \in \mathbb{Z},\ Im(\tau) > 0\}$ detto dei *periodi*).

Si prende usualmente la funzione $P(z) := 1/z^2 + \sum_{\lambda \in \Lambda - 0}(\frac{1}{(z-\lambda)^2)} - \frac{1}{\lambda^2}$ di Weierstrass e la sua derivata $P'(z)$ per presentare $\mathbb{C}$ come rivestimento universale della superficie di Riemann associata (nel piano proiettivo complesso) alla equazione cubica $P'(z)^2 = P(z)^3 + g_2 P(z) + g_3$ soddisfatta dalla P di Weierstrass.

Le ricerche di Abel, Jacobi, Riemann etc. hanno portato alla analisi del rivestimento universale anche per le altre superfici di Riemann, i Teoremi orttenuti sono legati al prossimo esempio.

Terzo esempio In questo esempio vogliamo discutere una classe di azioni libere.

Sia $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | Im(\tau) > 0\}$. Il semipiano di Poincaré.

Il gruppo $SL(2, \mathbb{R}) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\}$ delle matrici reali 2×2 a determinante 1 opera su $\mathcal{H}$ come segue.

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

La teoria delle superfici di Riemann si lega con questa azione nel modo seguente.

Prima di tutto per ragioni tecniche si passa al gruppo $PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$ che opera fedelmente. Dato un sottogruppo Γ di $PSL(2, \mathbb{R})$ che operi liberamente su $\mathcal{H}$ abbiamo che la proiezione $\mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Gamma$ sullo spazio delle orbite è un rivestimento universale di $\mathcal{H}/\Gamma$.

La naturale coordinata complessa su $\mathcal{H}$ induce coordinate su $\mathcal{H}/\Gamma$ che mostrano come questo spazio sia naturalmente una superficie di Riemann.

Un Teorema profondo, il teorema di uniformizzazione mostra come tutte le superfici di Riemann di genere diverso da 0,1 si ottengano con questo procedimento. Quelle di genere 0 sono isomorfe alla retta proiettiva complessa, topologicamente una sfera e quindi semplicemente connesse, mentre quelle di genere 1 sono trattate dalla teoria delle funzioni ellittiche.

Vi è una teoria molto sviluppata per analizzare e costruire gruppi che operino liberamente.

Una classe interessante e rilevante per problemi di aritmetica (come ad esempio l'ultimo teorema di Fermat) si ottiene a partire dal sottogruppo $PSL(2, \mathbb{Z})$ delle matrici intere.

Questo gruppo non opera liberamente poiché si prova che alcuni punti speciali hanno uno stabilizzatore finito non ridotto ad 1 ma alcuni gruppi di congruenza di $PSL(2, \mathbb{Z})$ operano liberamente fornendo quindi dei rivestimenti particolarmente interessanti per la aritmetica (cf. Shimura).