Corso di Laurea in Tecniche per l'Architettura e la Costruzione

MATEMATICA - Garroni

ESERCITAZIONE N.6

1. Determinare la matrice inversa di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Verificare, usando il prodotto righe per colonne, che la matrice trovata sia effettivamente la matrice inversa di A.

2. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinarne la matrice inversa.
   (b) Quindi scrivere esplicitamente la trasformazione lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ e la trasformazione inversa $A^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{x}$
   (c) Quale vettore si trasforma secondo A nel vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?
   (d) Verificare la retta di equazione $x + 2y = 1$ viene trasformata in una retta nel piano $x'y'$. Determinare l'equazione di tale retta nelle variabili x' e y'.
   (e) Determinare gli autovalori e gli autovettori di A.

3. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
disegnare l'insieme in cui si trasforma il triangolo di vertici $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 2)$ e $P_3 = (4, 1)$. Quali sono gli autovalori e gli autovettori di A?

4. Scrive la matrice della trasformazione lineare che trasforma il punto $(1, 0)$ nel punto $(2, 1)$ e il punto $(0, 1)$ nel punto $(1, 4)$.

5. Scrivere la matrice del cambiamento di riferimento che corrisponde a ruotare di 90 gradi in senso orario il sistema di riferimento. Determinare quindi l'equazione della retta di equazione cartesiana $x + 3y = 4$ nel nuovo sistema

6. Data la circonferenza di raggio 1 di equazione
$$x^2 + y^2 = 1$$
determinare la curva in cui si trasforma con la trasformazione lineare data dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Che curva è?

7. Data in sistema di riferimento ortonormale xy, disegnare un riferimento $x'y'$ con gli assi traslati in modo che l'origine degli assi x' e y' sia nel punto $(3, 2)$. Quindi disegnare i punti che nel riferimento xy hanno coordinate $(4, 1)$ e $(-1, 3)$. Quali sono le coordinate di questi punti nel nuovo riferimento?

8. Disegnare la parabola di equazione $y = 2x^2$. Quindi scrivere l'equazione di questa parabola nel riferimento traslato $x'y'$ con nuova origine nel punto $(-1, 2)$.

9. Data l'ellisse di centro zero e semiassi 2 e 1 di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

determinare l'equazione dell'ellisse di semiassi 1 e 2 e centro nel punto $(3, 1)$.

10. Scrivere il cambiamento di coordinate, da (x, y) a (x', y'), che lascia fisso l'origine e fa ruotare gli assi di 45 gradi in senso antiorario, in modo che l'asse x' coincida con la bisettrice del primo quadrante nel vecchio sistema di riferimento.

   (a) Nel nuovo sistema di riferimento, come diventa l'equazione della conica $\mathcal{C}$ che nel vecchio sistema di riferimento ha equazione

   $$\mathcal{C} \,:\, x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0?$$

   (b) Che curva è la conica del punto precedente? A questo punto dovreste essere in grado di disegnarla anche nel sistema di riferimento (x, y).

11. Dati i punti $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (6, 1)$ e $P_3 = (\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$, determinare l'equazione cartesiana dell'ellisse che ha come asse maggiore il segmento $\overline{P_1P_2}$ e passa per il punto P_3.

12. Disegnare l'iperbole di equazione $xy = 1$. Quindi traslare l'origine degli assi nel punto $O' = (2, -3)$. Scrivere l'equazione dell'iperbole appena disegnata nel nuovo sistema di riferimento traslato.