Corso di Laurea in Tecniche per l'Architettura e la Costruzione

MATEMATICA 1 - Garroni

ESERCITAZIONE N.11

1. Sia $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$
   (a) Determinare l'insieme di definizione di f
   (b) Determinare i seguenti limiti:
   $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to1^+} f(x)$,
   $\lim_{x\to1^-} f(x)$, $\lim_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim_{x\to-1^-} f(x)$;
   (c) Determinare gli asintoti della funzione f;
   (d) Calcolare $f'(x)$;
   (e) Determinare gli intervalli di monotonia di f e i punti massimo e minimo relativi e assoluti;
   (f) Determinare l'immagine di f;
   (g) **Disegnare il grafico di f.**

2. Studiare e disegnare il grafico delle seguenti funzioni

   a) $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$

   b) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

   c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$

   d) $f(x) = \log(\mathrm{e}^{3x}+1)$

   e) $f(x) = \frac{3x+2}{2-x}$

   f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-4}$

   g) $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}$

   h) $f(x) = |x^2-4| - \log x$

   i) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12$

   l) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

   m) $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2) & \text{se } -\sqrt{\pi} \le x \le \sqrt{\pi} \\ 0 & \text{se } \ x < -\sqrt{\pi} \ \text{ o } \ x > \sqrt{\pi} \end{cases}$

   n) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$

   o) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2(x-1)(x+3)}$

   p) $f(x) = \frac{x^2}{4} - 3x + 2\log(x-1)$

   q) $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9}} - 1$

   r) $f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^x$

   s) $f(x) = x\log x + 2$

   (Determinarne, non necessariamente in quest'ordine: il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti, gli insiemi di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, l'immagine, gli eventuali punti di discontinuità e di non derivabilità, la convessità)

3. Dovendo produrre dei barattoli cilindrici (a base circolare) di alluminio che contengano 125 cm^3, qual'è la forma del barattolo che fa usare meno alluminio?

   (Suggerimento: tener conto del fatto che un cilindro è determinato una volta che se ne fissa l'altezza h e il raggio della base r, che il volume V è dato da $V = \pi r^2 h$ e che la superficie S è data da $S = 2\pi\, r\, h + 2\pi\, r^2$.)

4. Disegnare il grafico di una funzione f che verifichi le seguenti proprietà:

$$\mathrm{dom}\ f = \mathbf{R}\setminus\{2\} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to2} f(x) = +\infty$$

$$f(x) \text{ crescente in } (-\infty,2)\cup(3,+\infty)$$

$$f(x) \text{ decrescente in } (2,3) \text{ e } f(3) = 0\,.$$

5. Disegnare il grafico di una funzione che verifichi le proprietà descritte nell'esercizio precedente e che in piú abbia una discontinuità di salto nel punto $x = -1$ e un punto di non derivabilità in $x = 4$.

6. (a) Disegnare il grafico di una funzione f decrescente e che verifichi le seguenti proprietà:

$$\text{dom } f = \mathbf{R}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad , \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -4\,.$$

   (b) Quale potrebbe essere l'immagine della funzione che verifica le ipotesi descritte qui sopra?

   (c) Disegnate il grafico di un'altra funzione, diversa da quella trovata nel punto a), ma che ancora verifica le stesse proprietà.

   (d) Trovate la forma esplicita (analitica) di una funzione il cui grafico verificherebbe le condizioni date nel punto a).