

Istituzioni di Matematica I

Laurea Triennale in Scienze Chimiche

Registro Didattico a.a. 2023/2024

21 dicembre 2023

Lezione 1-2 (25 Settembre 2023) Gli assiomi dei numeri reali: ordinamento, somma, prodotto e assioma di continuità (Dedekind). Regole di calcolo algebrico in \mathbb{R} come conseguenza degli assiomi.

Lezione 3-4 (26 Settembre 2023) Sottoinsiemi particolari di \mathbb{R} : i numeri naturali \mathbb{N} , gli interi relativi \mathbb{Z} , i razionali \mathbb{Q} . Dimostrazione del fatto che non esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.

Lezione 5-6 (27 Settembre 2023) Non validità in \mathbb{Q} dell'assioma di Dedekind. Definizione di \mathbb{N} come il minimo sottoinsieme induttivo di \mathbb{R} . Principio di induzione, esempi. Intervalli della retta: notazione. Definizione di insieme limitato superiormente/inferiormente. Definizione di maggiorante e minorante. Definizione di massimo e minimo.

Lezione 7-8 (28 Settembre 2023) Proprietà di esistenza del minimo dei maggioranti e del massimo dei minoranti: definizione di estremo superiore e inferiore. Proprietà archimedea. Esempi di calcolo di sup e inf, caratterizzazioni.

Lezione 9-10 (29 Settembre 2023) Proprietà di densità dei numeri razionali nell'insieme dei numeri reali. Formula del binomio di Newton e richiami di calcolo combinatorio.

Lezione 11-12 (2 Ottobre 2023) Correzione esercizi Foglio 1.

Lezione 13-14 (3 Ottobre 2023) Teorema di esistenza delle radici n -esime. Definizione di modulo di un numero reale e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare. Esercizi su disequazioni con il modulo.

Lezione 15-16 (4 Ottobre 2023) Funzioni reali di variabile reale: definizione di dominio, codominio, immagine e grafico di una funzione. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biettiva. Definizione di funzione inversa. Relazione tra il grafico di una funzione invertibile e il grafico della sua inversa. Esempi.

Lezione 17-18 (5 Ottobre 2023) Funzioni lineari, funzioni quadratiche. Definizione di funzione monotona e strettamente monotona, esempi. La funzione parte intera. Relazione tra stretta monotonia e iniettività. Definizione di funzione (superiormente, inferiormente) limitata. Funzioni potenza a esponente reale: definizione, monotonia e andamento grafico qualitativo.

Lezione 19-20 (6 Ottobre 2023) Funzioni esponenziali. Funzioni logaritmiche. Il logaritmo naturale. Funzioni composte. Esempi.

Lezione 21-22 (9 Ottobre 2023) Correzione esercizi Foglio 2.

Lezione 23-24 (10 Ottobre 2023) Richiami sulla misura in gradi e in radianti di un angolo. Funzioni trigonometriche ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cotan x$): definizione, grafici e proprietà. Funzioni trigonometriche inverse: $\arcsin x$, $\arccos x$.

Lezione 25-26 (11 Ottobre 2023) La funzione $\arctan x$. Esempi di disequazioni trigonometriche. Funzioni iperboliche ($\sinh x$, $\cosh x$): definizione, grafici e loro inverse.

Lezione 27-28 (12 Ottobre 2023) Costruzione del campo complesso: definizione di \mathbb{C} , operazioni di somma e prodotto, proprietà. Esempi. Coniugato di un numero complesso: proprietà. Modulo di un numero complesso: proprietà e disuguaglianza triangolare. Esempi.

Lezione 29-30 (13 Ottobre 2023) Forma trigonometrica dei numeri complessi. Interpretazione geometrica del prodotto complesso. Radici ennesime in campo complesso. Esempi. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).

Lezione 31-32 (16 ottobre 2023) Calcolo delle radici quadrate di un numero complesso. Formula per il calcolo delle radici complesse di una equazione di secondo grado: giustificazione della formula. Successioni numeriche: introduzione, definizione, esempi.

Lezione 33-34 (17 ottobre 2023) Definizione di successione inferiormente limitata, superiormente limitata, limitata. Cosa vuol dire che una successione verifica una proprietà *definitivamente*. Esempi. Definizione di limite finito di una successione. Definizione di successione divergente positivamente o negativamente. Esempi. Definizione di successione irregolare. Teorema di unicità del limite (con dimostrazione).

Lezione 35-36 (18 ottobre 2023) Teorema: ogni successione convergente è limitata (con dimostrazione). Definizione di successione monotona. Teorema di regolarità delle successioni monotone. Limiti della successioni $(n^\alpha)_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e di $(q^n)_n$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Lezione 37-38 (19 ottobre 2023) Applicazione: il limite della successione $(1 + 1/n)^n$ e il numero di Nepero e (solo enunciato). Algebra dei limiti e forme indeterminate. Esercizi su limiti di successioni.

Lezione 39-40 (20 ottobre 2023) Teorema di permanenza del segno (con dimostrazione). Corollario: monotonia del limite (con dimostrazione). Teorema dei due carabinieri: enunciato e applicazioni. Esercizi del Foglio 3.

Lezione 41-42 (23 ottobre 2023) Esercizi sui limiti. Infiniti di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine. Criterio del rapporto: idea della dimostrazione. Applicazioni: gerarchia degli infiniti e alcuni limiti notevoli. Infinitesimi. Esercizi su limiti di successioni.

Lezione 43-44 (24 ottobre 2023) Esercizi sui limiti. Definizione di successione infinitesima e ordini di infinitesimo. Serie numeriche: generalità. Esempi di serie: serie armonica, serie armonica generalizzata (di esponente 2), serie geometrica. Esempio della scacchiera. Achille e la tartaruga. Serie geometrica: calcolo del carattere e della somma della serie geometrica.

Lezione 45-46 (25 ottobre 2023) Serie di Mengoli, serie telescopiche. Proposizione: se una serie $\sum a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$. Non vale il viceversa. Serie a termini non negativi: regolarità delle serie a termini non negativi; criterio del

confronto e del confronto asintotico. Applicazione: la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$. Esempi ed esercizi.

Lezione 47-48 (26 ottobre 2023) Serie a termini non negativi: criterio del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.

Lezione 49-50 (27 ottobre 2023) Esercizi dei Fogli 3 e 4.

Lezione 51-52 (30 ottobre 2023) Serie a termini di segno generico: una serie assolutamente convergente è convergente. Serie a segno alterno: criterio di Leibniz. Esercizi.

Lezione 53-54 (31 ottobre 2023) Nozione di limite di una funzione $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Gerarchia degli infiniti. Esempi ed esercizi.

Lezione 55-56 (2 novembre 2023) Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$. Teorema ponte: caratterizzazione del limite di una funzione attraverso successioni. Applicazione: il limite di $\sin(1/x)$ per x che tende a 0 non esiste. Teorema di unicità del limite. Algebra dei limiti. Teorema di permanenza del segno.

Lezione 57-58 (3 novembre 2023) Esercizi del Foglio 5.

Lezione 59-60 (6 novembre 2023) Teorema di permanenza del segno. Corollario: monotonia del limite. Teorema dei due carabinieri. Teorema di confronto. Primo limite notevole $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$ e sue conseguenze. Limite destro e sinistro di una funzione in un punto.

Lezione 61-62 (7 novembre 2023) Teorema: una funzione f ammette limite in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di f in x_0 e tali limiti coincidono. Secondo limite notevole $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta} = 0$ per $\beta > 0$. Terzo limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e sue conseguenze.

Lezione 63-64 (8 novembre 2023) Esistenza del limite destro e sinistro in un punto per una funzione monotona. Applicazione: $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Definizione di funzione continua. Esempi: continuità delle funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$ nei loro domini di definizione.

Lezione 65-66 (9 novembre 2023) Esempio: continuità della funzione $\log(x)$ nel suo dominio di definizione. Teorema di permanenza del segno. Algebra delle funzioni continue: continuità della somma, differenza, prodotto, rapporto. La composizione di funzioni continue è continua. Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione).

Lezione 67-68 (10 novembre 2023) Teorema di Weierstrass. Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione). Esercizi.

Lezione 69-70 (13 novembre 2023) Applicazioni: calcolo dell'immagine della funzione $x \mapsto x^n$ definita in $[0, +\infty)$ se n è pari, in \mathbb{R} se n è dispari; un polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale. Teorema: la funzione $x \mapsto x^n$ definita in $[0, +\infty)$ se n è pari, in \mathbb{R} se n è dispari, è strettamente monotona, quindi invertibile. La funzione inversa è la funzione $f^{-1}(y) := \sqrt[n]{y}$. Teorema: una funzione strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) è invertibile e la sua inversa è strettamente crescente (risp., decrescente). Teorema: una funzione continua definita su un intervallo è invertibile se e solo se è strettamente monotona. In tal caso, la sua inversa è continua (solo enunciato). Osservazioni ed esempi. Esercizi.

Lezione 71-72 (14 novembre 2023) Punti di discontinuità di una funzione: possibili casi ed esempi. Cenni alla dimostrazione del Teorema ponte tra limite di funzioni e limiti di successioni. Esercizi.

Lezione 73-74 (15 novembre 2023) Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale: definizione di derivata di una funzione in un punto. Calcolo della derivata di funzioni elementari (usando la definizione). Definizione di retta tangente.

Lezione 75-76 (16 novembre 2023) Derivata destra, derivata sinistra in un punto. Applicazione: non derivabilità della funzione $|x|$. Teorema: una funzione derivabile è continua (con dimostrazione). Non vale il viceversa: la funzione $|x|$ è continua ma non derivabile in $x = 0$. Esercizi.

Lezione 77-78 (17 novembre 2023) Algebra delle derivate: derivata della somma, differenza, prodotto, rapporto di due funzioni derivabili (con dimostrazione). Esempi. Esercizi.

Lezione 79-80 (20 novembre 2023) Derivata di una funzione composta (con "dimostrazione"). Esempi. Esercizi.

Lezione 81-82 (21 novembre 2023) Esonero.

Lezione 83-84 (22 novembre 2023) Derivata di una funzione inversa (con giustificazione euristica della formula e idea geometrica). Applicazione: calcolo della derivata delle funzioni $\log(x)$, $\arctan(x)$ e $\arcsin(x)$ ($\arccos(x)$ lasciato per esercizio). Punti di massimo e di minimo locali.

Lezione 85-86 (23 novembre 2023) Teorema di Fermat (con dimostrazione). Teorema di Rolle (con dimostrazione) e alcune osservazioni. Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Teorema di Cauchy (dimostrazione per esercizio). Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla.

Lezione 87-88 (24 novembre 2023) Applicazioni del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile su un intervallo è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (risp., non positiva). Come fare uno studio qualitativo del grafico di una funzione e ricerca di massimi e minimi (locali e assoluti) tramite lo studio del segno della derivata prima

Lezione 89-90 (27 novembre 2023) Limite della derivata della funzione f in un punto x_0 vs. derivabilità di f in x_0 e teorema relativo (con dimostrazione). Teoremi di de l'Hôpital.

Lezione 91-92 (28 novembre 2023) Teoremi di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi. Definizione di insieme convesso. Definizione di funzione convessa e concava. Teorema: una funzione convessa è continua. Teorema: caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili in un intervallo. Definizione di punto di flesso.

Lezione 93-94 (29 novembre 2023) Approssimazione di funzioni e polinomio di Taylor. Nozione di o piccolo. Teorema: data una funzione f derivabile n volte in un punto x_0 , il polinomio di Taylor P_n è l'unico polinomio di grado n tale che il resto $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$ è un o piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \rightarrow x_0$ (enunciato). Calcolo di alcuni limiti usando il polinomio di Taylor. Cenni all'algebra degli o piccoli.

Lezione 95-96 (30 novembre 2023) Teorema: data una funzione f derivabile n volte in un punto x_0 , il polinomio di Taylor P_n è l'unico polinomio di grado n tale che il resto $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$ è un o piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \rightarrow x_0$ (con

dimostrazione nel caso $x_0 = 0$ e $n = 2$). Calcolo di alcuni limiti usando il polinomio di Taylor.

Lezione 97-98 (1 dicembre 2023) Introduzione al calcolo integrale per funzioni di una variabile: teoria dell'integrazione vs. teoria della misura. Definizione di funzione (limitata e definita su un intervallo chiuso e limitato) integrabile secondo Riemann e integrale di Riemann. Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

Lezione 99-100 (6 dicembre 2023) Classi di funzioni integrabili (su un intervallo chiuso e limitato): funzioni continue; funzioni monotone; funzioni ottenute incollando funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale: linearità, additività rispetto all'insieme di integrazione, monotonia. Classi di funzioni integrabili secondo Riemann. Teorema della media integrale (con dimostrazione). Esercizi.

Lezione 101-102 (7 dicembre 2023) Definizione di primitiva. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). Lista di alcune primitive elementari. Integrazione per sostituzione. Esempi e applicazioni.

Lezione 103-104 (11 dicembre 2023) Integrazione di funzioni razionali.

Lezione 105-106 (12 dicembre 2023) Integrazione per parti. Esercizi.

Lezione 107-108 (13 dicembre 2023) Definizione di integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo limitato. Calcolo di $\int_0^1 1/x^\alpha dx$ al variare di $\alpha > 0$. Definizione di integrale generalizzato su un intervallo non limitato. Calcolo di $\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha dx$ al variare di $\alpha > 0$. Applicazioni: la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente; la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$ è convergente per ogni $\alpha > 1$.

Lezione 109-110 (14 dicembre 2023) Criteri di integrabilità. Esercizi.

Lezione 111-112 (15 dicembre 2023) Equazioni differenziali: generalità. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (con dimostrazione). Ricerca delle soluzioni di una equazione omogenea: primi esempi.

Lezione 113-114 (18 dicembre 2023) Equazioni differenziali lineari del primo ordine: formula per la soluzione generale dell'equazione omogenea. Esempi. Problema di Cauchy.

Lezione 115-116 (19 dicembre 2023) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine e problema di Cauchy: teoremi generali (senza dimostrazione). Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea associata e polinomio caratteristico.

Lezione 117-118 (20 dicembre 2023) Ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di non risonanza. Esempi. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di risonanza.