ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE
PROGRAMMA DEL CORSO A.A. 2011–12
PROFF. A. TESEI & A. DALL'AGLIO

a) Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$: misura di aperti e di compatti, misura esterna. Insiemi misurabili di misura finita. Proprietà della misura di Lebesgue; additività e subadditività numerabile. Esempi di insiemi misurabili. Relazione con la misura di Peano-Jordan. Insiemi di misura nulla; completezza. Proprietà vere quasi ovunque. Insieme di Cantor.

b) Teoria astratta della misura: famiglie di insiemi, σ-algebre; insiemi di Borel. Spazi misurabili. Misure positive: definizione e proprietà. Spazi di misura. Misure finite e σ-finite. Misure esterne. Famiglie di ricoprimenti numerabili. Costruzione e restrizione di misure esterne. Misure complete.

c) Funzioni semplici. Funzioni misurabili: definizione e proprietà. Funzioni definite quasi ovunque. Approssimazione di funzioni misurabili mediante funzioni semplici.

d) Integrale di funzioni misurabili nonnegative, integrale di funzioni sommabili: definizione e proprietà. Relazione con l'integrale di Riemann. Teoremi di passaggio al limite: teorema di B. Levi; lemma di Fatou; teorema di Lebesgue. Integrazione per serie. Assoluta continuità dell'integrale. Misure di densità.

e) Misura in spazi prodotto. Teorema di Tonelli. Teorema di Fubini. Convoluzione: definizione e proprietà.

f) Definizione degli spazi L^p ($p \in [1, \infty]$). Disuguaglianze di Young, di Hölder e di Minkowski. Completezza degli spazi L^p. Separabilità degli spazi L^p. Teorema di Lusin. Spazi uniformemente convessi. Uniforme convessità degli spazi L^p (s.d.). Funzionali lineari e continui su uno spazio normato. Spazio duale di uno spazio normato. Teorema di rappresentazione di Riesz per i funzionali lineari e continui su L^p. Spazi di successioni: l^p, c, c_0, c_{00}.

g) Convergenze di funzioni. Convergenza semplice, quasi ovunque, uniforme, quasi uniforme, in misura, in L^p. Relazioni tra le varie convergenze. Successione di Rademacher. Passaggio al limite sotto il segno di integrale sotto l'ipotesi di convergenza in misura. Teorema di Severini-Egorov. Uniforme integrabilità. Teorema di Vitali (s.d.) e applicazioni.

h) Spazi dotati di prodotto scalare (spazi euclidei). Disuguaglianza di Cauchy–Schwartz. Identità del parallelogramma e di polarizzazione. Spazi di Hilbert. Proiezione su un convesso chiuso. Caratterizzazione della proiezione su un convesso chiuso (si veda Brezis, Teorema V.1). Complemento ortogonale. Decomposizione ortogonale rispetto ad un sottospazio chiuso. Proiettori ortogonali e loro proprietà. Teorema di rappresentazione di Riesz per il duale di uno spazio di Hilbert. Sistemi ortonormali. Ortonormalizzazione di Gram–Schmidt. Coefficienti di Fourier. Disuguaglianza di Bessel. Sistemi ortonormali completi. Serie di Fourier rispetto ad un sistema ortonormale numerabile. Identità di Parseval. Teorema di Riesz–Fischer. Serie di Fourier per funzioni periodiche in $L^2(S^1)$ (completezza del sistema di polinomi trigonometrici: s.d.).

TESTI CONSIGLIATI

A. Tesei: *Istituzioni di Analisi Superiore* (Bollati Boringhieri, 1997).
H. L. Royden: *Real Analysis* (Macmillan, 1988).
H. Brezis: *Analisi Funzionale* (Liguori).
W. Rudin: *Real and Complex Analysis*.
L. Orsina: *dispense di Analisi Reale* (2009, disponibili su internet all'indirizzo `http://www.mat.uniroma1.it/people/orsina/AR0809/AnalisiReale0809.pdf`)