Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Corso di Laurea in Matematica

Federico Incitti

# Istituzioni di Analisi Superiore

appunti delle lezioni del
prof. Alberto Tesei

Anno Accademico 1998/1999
Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"

**Capitolo 1 Famiglie di insiemi** . . . . . . . . . . . . . . . . **3**

1.1 Algebre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.2 Sigma-algebre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.3 Topologie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.4 Insiemi di Borel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.5 Classi monotone . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**Capitolo 2 Misure positive** . . . . . . . . . . . . . . . . . **9**

2.1 Definizione e prime proprietà . . . . . . . . . . . . . . . . 9

2.2 Insiemi di misura nulla . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.3 Misure esterne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2.4 Generazione di misure . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

**Capitolo 3 Misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$** . . . . . . . . . **19**

3.1 Definizione e prime proprietà . . . . . . . . . . . . . . . 19

3.2 Misura di Peano-Jordan e misura di Lebesgue . . . . . . 20

3.3 Insiemi di Borel e insiemi di Lebesgue . . . . . . . . . . 23

3.4 Covarianza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

3.5 Misura di Lebesgue-Stieltjes . . . . . . . . . . . . . . . . 26

3.6 Misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ . . . . . . . . . . . . . . . 28

**Capitolo 4 Funzioni Misurabili** . . . . . . . . . . . . . . **29**

4.1 Definizione e prime proprietà . . . . . . . . . . . . . . . 29

4.2 Funzioni a valori in $\overline{\mathbf{R}}$ . . . . . . . . . . . . . . . 30

4.3 Funzioni semplici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

4.4 Funzioni essenzialmente limitate . . . . . . . . . . . . . 35

4.5 Funzione di Lebesgue-Vitali . . . . . . . . . . . . . . . . 36

**Capitolo 5 Integrale di Lebesgue** . . . . . . . . . . . . . **39**

5.1 Integrale di funzioni semplici non negative . . . . . . . . 39

5.2 Integrale di funzioni non negative . . . . . . . . . . . . . 41

5.3 Teorema di convergenza monotona . . . . . . . . . . . . 42

5.4 Insiemi di misura nulla . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

5.5 Funzioni integrabili . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

5.6 Teorema di convergenza dominata . . . . . . . . . . . . . 48

5.7 Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue . . . . . . . 50

**Capitolo 6 Spazi di Lebesgue** . . . . . . . . . . . . . . . **53**

6.1 Richiami: spazi metrici . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

6.2 Richiami: spazi vettoriali normati . . . . . . . . . . . . . 53

6.3 Richiami: funzionali lineari e dualità . . . . . . . . . . . 54

6.4 Disuguaglianze . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

6.5 Definizione degli spazi $L^p$ . . . . . . . . . . . . . . . . 58

6.6 Completezza degli spazi $L^p$ . . . . . . . . . . . . . . . 59

6.7 Separabilità degli spazi $L^p$ . . . . . . . . . . . . . . . . 60

6.8 Uniforme convessità degli spazi $L^p$ . . . . . . . . . . . 63

6.9 Dualità negli spazi $L^p$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

**Capitolo 7 Risultati di convergenza** . . . . . . . . . . . . **67**

7.1 Richiami . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

7.2 Convergenza in misura . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

7.3 Convergenza quasi uniforme . . . . . . . . . . . . . . . . 69

**Capitolo 8 Misure prodotto** . . . . . . . . . . . . . . . . **73**

8.1 Prodotto di spazi misurabili . . . . . . . . . . . . . . . . 73

8.2 Funzioni misurabili e spazi prodotto . . . . . . . . . . . . 74

8.3 Misura prodotto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75

8.4 Teorema di Fubini . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78

8.5 Convoluzione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82

8.6 Trasformata di Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85

**Capitolo 9 Derivazione** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **91**

9.1 Derivazione di funzioni monotone . . . . . . . . . . . . . 91

9.2 Funzioni a variazione limitata . . . . . . . . . . . . . . . 96

9.3 Funzioni assolutamente continue . . . . . . . . . . . . . 99

9.4 Derivazione e integrazione . . . . . . . . . . . . . . . . . 103

9.5 Integrazione per parti e per sostituzione . . . . . . . . . . 105

9.6 Funzioni a salti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106

**Capitolo 10 Spazi di Hilbert** . . . . . . . . . . . . . . . . **109**

10.1 Spazi euclidei . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109

10.2 Identità del parallelogramma e di polarizzazione . . . . 110

10.3 Decomposizione ortogonale . . . . . . . . . . . . . . . . 111

10.4 Dualità . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

10.5 Sistemi ortonormali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

10.6 Serie trigonometriche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119

10.7 Convergenza puntuale della serie di Fourier . . . . . . . 120

**Capitolo 11 Analisi complessa** . . . . . . . . . . . . . . . **125**

11.1 Determinazione del logaritmo e della radice . . . . . . . 125

11.2 Richiami sulle funzioni olomorfe . . . . . . . . . . . . . 126

11.3 Funzioni olomorfe e 1-forme differenziali . . . . . . . . 128

11.4 Teorema di deformazione e teoremi di Cauchy . . . . . . 131

11.5 Funzioni armoniche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

11.6 Richiami sulle successioni di funzioni . . . . . . . . . . 139

11.7 Richiami sulle serie di funzioni . . . . . . . . . . . . . . 140

11.8 Serie di potenze . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 140

11.9 Zeri di funzioni analitiche . . . . . . . . . . . . . . . . . 144

11.10 Poli di funzioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 144

11.11 Serie di potenze inverse . . . . . . . . . . . . . . . . . . 145

11.12 Serie di potenze inverse con punto iniziale generico . . 148

11.13 Metodo dei residui . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150

11.14 Punti singolari . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152

11.15 Applicazioni del metodo dei residui . . . . . . . . . . . 154

# Capitolo 1
# Famiglie di insiemi

## 1.1 Algebre

**Definizione 1.1** Una famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é detta *algebra* su $X$ se

(i) risulta
$$\emptyset \in \mathcal{A};$$
(ii) per ogni $E \in \mathcal{A}$ risulta
$$CE \in \mathcal{A};$$
(iii) per ogni $E, F \in \mathcal{A}$ risulta
$$E \cup F \in \mathcal{A}.$$

**Osservazione 1.2** Sia $\mathcal{A}$ un algebra su $X$. Allora per ogni $E, F \in \mathcal{A}$ risulta
$$E \cap F \in \mathcal{A}.$$

**Osservazione 1.3** Sia $\mathcal{A}$ un algebra su $X$. Allora per ogni $\{E_1, ..., E_n\} \subseteq \mathcal{A}$ risulta
$$\bigcup_{k=1}^{n} E_n \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_n \in \mathcal{A}.$$

**Proposizione 1.4** Sia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di algebre su $X$. Allora la famiglia
$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$
è un'algebra su $X$.

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Notazione 1.5** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Poniamo
$$\mathcal{A}_0(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ algebra su } X, \ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

**Teorema 1.6** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{A}_0(\mathcal{S})$ è un algebra su $X$ e risulta
$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_0(\mathcal{S}).$$
Inoltre per ogni algebra $\mathcal{A}$ su $X$ tale che
$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$$
risulta
$$\mathcal{A}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 1.7** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. L'algebra $\mathcal{A}_0(\mathcal{S})$ è detta *algebra generata* da $\mathcal{S}$ o *algebra minimale* contenente $\mathcal{S}$.

**Lemma 1.8** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra. Sia $\{E_n\} \subseteq \mathcal{A}$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia
$$F_n := E_n \backslash \left( \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right).$$
Allora la successione $\{F_n\} \subseteq \mathcal{A}$ è disgiunta e per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$F_n \subseteq E_n.$$
Inoltre risulta
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

*Dimostrazione.* Immediata ∎

**Definizione 1.9** Una famiglia non vuota $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é detta *semialgebra* su $X$ se

(i) per ogni $E, F \in \mathcal{S}$ risulta
$$E \cap F \in \mathcal{S};$$
(ii) per ogni $E \in \mathcal{S}$ esistono $F_1, ..., F_n \in \mathcal{S}$ tali che
$$CE = \bigcup_{k=1}^{n} F_k.$$

**Osservazione 1.10** Sia $\mathcal{S}$ una semialgebra su $X$. Allora per ogni $\{E_1, ..., E_n\} \subseteq \mathcal{A}$ risulta
$$\bigcap_{k=1}^{n} E_n \in \mathcal{A}.$$

**Osservazione 1.11** Ogni algebra è una semialgebra.

**Notazione 1.12** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Denotiamo con $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ la famiglia delle unioni finite di elementi di $\mathcal{S}$, con $\mathcal{U}_0(\mathcal{S})$ la famiglia delle unioni finite disgiunte di elementi di $\mathcal{S}$.

**Proposizione 1.13** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una semialgebra su $X$. Allora
$$\mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathcal{U}_0(\mathcal{S}).$$

*Dimostrazione.* Evidentemente si ha
$$\mathcal{U}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{S}).$$
Mostriamo che vale l'inclusione opposta
$$\mathcal{U}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{U}_0(\mathcal{S}).$$
Sia $E \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$. Siano $\{E_1, ..., E_n\} \subseteq \mathcal{S}$ tali che
$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$
Per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ poniamo
$$F_k := E_k \backslash \left( \bigcup_{l=1}^{k-1} E_l \right).$$
Si verifica facilmente che $\{F_1, ..., F_n\} \subseteq \mathcal{S}$ sono disgiunti e tali che
$$E = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$$
Quindi
$$E \in \mathcal{U}_0(\mathcal{S}). \ ∎$$

**Proposizione 1.14** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una semialgebra su $X$. Allora la famiglia
$$\mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathcal{U}_0(\mathcal{S})$$
è un'algebra su $X$.

*Dimostrazione.* Evidentemente si ha

$$\emptyset \in \mathcal{U}(\mathcal{S}).$$

Sia $E \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$. Siano $\{E_1, \dots, E_n\} \subseteq \mathcal{S}$ tali che

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Allora

$$\mathcal{C}E = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{C}E_k.$$

Per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$ siano $\{F_{k1}, \dots, F_{km}\} \subseteq \mathcal{S}$ tali che

$$\mathcal{C}E_k = \bigcup_{l=1}^{m} F_{kl}.$$

Allora

$$\mathcal{C}E = \bigcap_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{l=1}^{m} F_{kl}\right) = \bigcup_{l=1}^{m}\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{kl}\right).$$

Poiché per ogni $l \in \{1, \dots, m\}$ risulta

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{kl} \in \mathcal{S}$$

si ha

$$\mathcal{C}E \in \mathcal{U}(\mathcal{S}).$$

Siano $E, F \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$. Siano $\{E_1, \dots, E_n\}, \{F_1, \dots, F_m\} \subseteq \mathcal{S}$ tali che

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, \quad F = \bigcup_{l=1}^{m} F_l.$$

Allora

$$E \cup F = E = \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{m} F_l\right) \in \mathcal{U}(\mathcal{S}). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 1.15** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una semialgebra su $X$. Allora

$$\mathcal{A}_0(\mathcal{S}) = \mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathcal{U}_0(\mathcal{S}).$$

*Dimostrazione.* Evidentemente si ha

$$\mathcal{U}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}_0(\mathcal{S}).$$

Mostriamo che vale l'inclusione opposta

$$\mathcal{A}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{S}).$$

Per la proposizione precedente $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ è un'algebra. Evidentemente si ha

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{S}).$$

Allora

$$\mathcal{A}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{S}). \quad \blacksquare$$

**Definizione 1.16** Poniamo

$$\mathcal{I}_0 := \{(a,b] \mid -\infty \le a \le b < \infty\} \cup \{(a,\infty) \mid -\infty < a < \infty\}.$$

Poniamo

$$\mathcal{I} := \mathcal{U}_0(\mathcal{I}).$$

Gli elementi della famiglia $\mathcal{I}$ sono detti *plurintervalli*.

**Osservazione 1.17** La famiglia $\mathcal{I}_0$ è una semialgebra su $\mathbf{R}$. Allora la famiglia $\mathcal{I}$ è un'algebra su $\mathbf{R}$ e risulta

$$\mathcal{A}_0(\mathcal{I}_0) = \mathcal{I}.$$

**Osservazione 1.18** Sia $\mathcal{S}_1$ una semialgebra su $X_1$. Sia $\mathcal{S}_2$ una semialgebra su $X_2$. Allora la famiglia

$$\{E_1 \times E_2 \mid E_1 \in \mathcal{S}_1, E_2 \in \mathcal{S}_2\}$$

è una semialgebra su $X_1 \times X_2$.

**Osservazione 1.19** Se $\mathcal{A}_1$ è un'algebra su $X_1$ e $\mathcal{A}_2$ è un'algebra su $X_2$ la famiglia

$$\mathcal{A} := \{E_1 \times E_2 \mid E_1 \in \mathcal{A}_1, E_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

non è in generale un'algebra su $X_1 \times X_2$.

## 1.2 Sigma-algebre

**Definizione 2.1** Una famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è detta *$\sigma$-algebra* su $X$ se

(i) risulta

$$\emptyset \in \mathcal{A};$$

(ii) per ogni $E \in \mathcal{A}$ risulta

$$\mathcal{C}E \in \mathcal{A};$$

(iii) per ogni $\{E_k\} \subseteq \mathcal{A}$ risulta

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}.$$

Gli elementi di $\mathcal{A}$ sono detti *insiemi misurabili*, la coppia $(X, \mathcal{A})$ *spazio misurabile*.

**Osservazione 2.2** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una $\sigma$-algebra. Allora per ogni $\{E_k\} \subseteq \mathcal{A}$ risulta

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}.$$

**Osservazione 2.3** Ogni $\sigma$-algebra è un'algebra.

**Osservazione 2.4** L'algebra $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$ non è una $\sigma$-algebra. Infatti per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\left(a, b - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{I}.$$

D'altra parte

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a, b - \frac{1}{n}\right] = (a,b) \notin \mathcal{I}.$$

**Proposizione 2.5** Sia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di $\sigma$-algebre su $X$. Allora la famiglia

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

è una $\sigma$-algebra su $X$.

*Dimostrazione.* Immediata. $\blacksquare$

**Notazione 2.6** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Poniamo

$$\sigma_0(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{-algebra su } X,\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

**Teorema 2.7** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora $\sigma_0(\mathcal{S})$ è una $\sigma$-algebra su $X$ e risulta

$$\mathcal{S} \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}).$$

Inoltre per ogni $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ su $X$ tale che

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$$

risulta

$$\sigma_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 2.8** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La $\sigma$-algebra $\sigma_0(\mathcal{S})$ è detta <u>*$\sigma$-algebra generata*</u> da $\mathcal{S}$ o <u>*$\sigma$-algebra minimale*</u> contenente $\mathcal{S}$.

**Proposizione 2.9** Siano $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ tali che

$$\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2.$$

Allora

$$\sigma_0(\mathcal{S}_1) \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_2).$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_2).$$

Poiché $\sigma_0(\mathcal{S}_2)$ è una $\sigma$-algebra e poiché

$$\mathcal{S}_1 \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_2),$$

si ha

$$\sigma_0(\mathcal{S}_1) \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_2). \quad ∎$$

**Proposizione 2.10** Siano $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ tali che

$$\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_1).$$

Allora

$$\sigma_0(\mathcal{S}_1) = \sigma_0(\mathcal{S}_2).$$

*Dimostrazione.* Poiché $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$ per la proposizione precedente si ha

$$\sigma_0(\mathcal{S}_1) \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_2).$$

Poiché $\sigma_0(\mathcal{S}_1)$ è una $\sigma$-algebra e poiché

$$\mathcal{S}_2 \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_1),$$

si ha

$$\sigma_0(\mathcal{S}_2) \subseteq \sigma_0(\mathcal{S}_1). \quad ∎$$

**Notazione 2.11** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sia $F \subseteq X$. Poniamo

$$\mathcal{S} \cap F := \{E \cap F \mid E \in \mathcal{S}\}.$$

**Proposizione 2.12** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una $\sigma$-algebra su $X$. Sia $F \subseteq X$. Allora la famiglia $\mathcal{A} \cap F$ è una $\sigma$-algebra su $F$.

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 2.13** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Sia $F \subseteq X$. Lo spazio misurabile $(F, \mathcal{A} \cap F)$ è detto <u>*sottospazio misurabile*</u> di $(X, \mathcal{A})$. La $\sigma$-algebra $\mathcal{A} \cap F$ è detta <u>*$\sigma$-algebra indotta*</u> da $\mathcal{A}$ su $F$.

**Definizione 2.14** Uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si dice <u>*separabile*</u> se esiste una famiglia numerabile $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

$$\mathcal{A} = \sigma_0(\mathcal{S}).$$

## 1.3 Topologie

**Definizione 3.1** Una famiglia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é detta <u>*topologia*</u> su $X$ se

(i) risulta

$$\emptyset, X \overset{\in}{\cancel{\subseteq}} \mathcal{G};$$

(ii) per ogni $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{G}$ risulta

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{G};$$

(iii) per ogni $\{A_1, ..., A_n\} \subseteq \mathcal{G}$ risulta

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{G}.$$

Gli elementi di $\mathcal{G}$ sono detti <u>*insiemi aperti*</u>, la coppia $(X, \mathcal{G})$ è detta <u>*spazio topologico*</u>.

**Definizione 3.2** Siano $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ due topologie su $X$. Si dice che $\mathcal{G}_1$ è <u>*più debole*</u> di $\mathcal{G}_2$ se

$$\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2.$$

Si dice che $\mathcal{G}_1$ è <u>*più forte*</u> di $\mathcal{G}_2$ se

$$\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}_2.$$

**Esempio 3.3** Le famiglie $\{\emptyset, X\}, \mathcal{P}(X)$ sono rispettivamente la più debole e la più forte fra le topologie su $X$.

**Definizione 3.4** La topologia $\mathcal{P}(X)$ è detta <u>*topologia discreta*</u> su $X$.

**Notazione 3.5** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Poniamo

$$\mathcal{G}_0(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ topologia su } X,\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}\}.$$

**Teorema 3.6** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{G}_0(\mathcal{S})$ è una topologia su $X$ e risulta

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}_0(\mathcal{S}).$$

Inoltre per ogni topologia $\mathcal{G}$ su $X$ tale che

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$$

risulta

$$\mathcal{G}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{G}.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 3.7** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La topologia $\mathcal{G}_0(\mathcal{S})$ è detta <u>*topologia generata*</u> da $\mathcal{S}$.

**Proposizione 3.8** Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una topologia su $X$. Sia $F \subseteq X$. Allora la famiglia $\mathcal{G} \cap F$ è una topologia su $F$.

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 3.9** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Sia $F \subseteq X$. Lo spazio topologico $(F, \mathcal{G} \cap F)$ è detto <u>*sottospazio topologico*</u> di $(X, \mathcal{G})$. La topologia $\mathcal{G} \cap F$ è detta <u>*topologia indotta*</u> da $\mathcal{G}$ su $F$.

**Definizione 3.10** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Un insieme $E \subseteq X$ si dice <u>*chiuso*</u> se

$$\mathcal{C}E \in \mathcal{G}.$$

Denotiamo con $\mathcal{F}$ la famiglia degli insiemi chiusi.

**Definizione 3.11** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Definiamo

$$\mathcal{G}_\delta := \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid \{A_n\} \subseteq \mathcal{G} \right\}, \quad \mathcal{F}_\sigma := \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \mid \{C_n\} \subseteq \mathcal{F} \right\}.$$

Da queste definiamo ricorsivamente

$$\mathcal{G}_{\delta\sigma}, \ \mathcal{F}_{\sigma\delta}, \ \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}, \ \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}, \ \ldots$$

**Osservazione 3.12** Valgono le inclusioni

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_\delta \subseteq \mathcal{G}_{\delta\sigma} \subseteq \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta} \subseteq \ldots, \quad \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\sigma\delta} \subseteq \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma} \subseteq \ldots$$

**Definizione 3.13** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Sia $E \subseteq X$. Si dice *interno* di $E$ l'insieme

$$E^0 := \bigcup \{A \in \mathcal{G} \mid A \subseteq E\}.$$

Si dice *chiusura* di $E$ l'insieme

$$\overline{E} := \bigcap \{C \in \mathcal{F} \mid C \supseteq E\}.$$

**Definizione 3.14** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Un insieme $E \subseteq X$ si dice *denso* in $X$ se

$$\overline{E} = X.$$

**Definizione 3.15** Uno spazio topologico $(X, \mathcal{G})$ si dice *separabile* se esiste un insieme numerabile $E \subseteq X$ denso in $X$.

**Definizione 3.16** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Una *base* dello spazio topologico (o della topologia $\mathcal{G}$) è una famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ di aperti non vuoti tale che per ogni $A \in \mathcal{G}$ esiste

$$\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$$

tale che

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

**Definizione 3.17** Uno spazio topologico $(X, \mathcal{G})$ si dice *a base numerabile* se ammette una base numerabile.

**Teorema 3.18** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico.

(i) Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ una base di $(X, \mathcal{G})$. Allora

(a) $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di $X$;

(b) per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, con

$$B_1 \cap B_2 \neq \emptyset,$$

e per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che

$$x \in B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

(ii) Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti per cui valgano le proprietà $(a)$, $(b)$. Allora esiste una ed una sola topologia $\mathcal{G}$ su $X$ di cui $\mathcal{B}$ è base.

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Proposizione 3.19** Uno spazio topologico a base numerabile è separabile.

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Definizione 3.20** Poniamo

$$\widetilde{\mathcal{I}} := \{(a,b) \mid -\infty < a < b < \infty\}.$$

**Proposizione 3.21** La famiglia $\widetilde{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$ è base di un'unica topologia su $\mathbf{R}$.

Dimostrazione. La famiglia $\widetilde{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$ verifica le condizioni $(a)$ e $(b)$ del teorema precedente. ■

**Definizione 3.22** La topologia su $\mathbf{R}$ di cui la famiglia $\widetilde{\mathcal{I}}$ è base è detta *topologia della retta reale* ed è denotata con $\tau(\mathbf{R})$.

**Definizione 3.23** Poniamo

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{I}} := &\{(a,b) \mid -\infty < a < b < \infty\} \cup \\ &\cup \{[-\infty, b) \mid -\infty < b < \infty\} \cup \\ &\cup \{(a, \infty] \mid -\infty < a < \infty\}. \end{aligned}$$

**Proposizione 3.24** La famiglia $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}})$ è base di un'unica topologia su $\overline{\mathbf{R}}$.

Dimostrazione. La famiglia $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}})$ verifica le condizioni $(a)$ e $(b)$ del teorema precedente. ■

**Definizione 3.25** La topologia su $\overline{\mathbf{R}}$ di cui la famiglia $\overline{\mathcal{I}}$ è base è detta *topologia della retta reale estesa* ed è denotata con $\tau(\overline{\mathbf{R}})$.

**Osservazione 3.26** Lo spazio topologico $(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R}))$ è sottospazio topologico di $(\overline{\mathbf{R}}, \tau(\overline{\mathbf{R}}))$.

**Definizione 3.27** La *distanza euclidea* su $\mathbf{R}^n$ è l'applicazione $d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ definita nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

**Definizione 3.28** Sia $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Sia $r > 0$. La *palla* di centro $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e raggio $r > 0$ è l'insieme

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x_0, x) < r\}.$$

**Proposizione 3.29** La famiglia

$$\{B(x_0, r) \mid x_0 \in X, \ r > 0\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$$

è base di un'unica topologia su $\mathbf{R}^n$.

*Dmiostrazione.* La famiglia $\{B(x_0, r) \mid x_0 \in X, \ r > 0\}$ verifica le condizioni $(a)$ e $(b)$ del teorema precedente. ■

**Notazione 3.30** La topologia su $\mathbf{R}^n$ di cui la famiglia

$$\{B(x_0, r) \mid x_0 \in X, \ r > 0\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$$

è base è denotata con $\tau(\mathbf{R}^n)$.

**Osservazione 3.31** Le topologie $\tau(\mathbf{R})$, $\tau(\overline{\mathbf{R}})$ e $\tau(\mathbf{R}^n)$ sono a base numerabile.

## 1.4 Insiemi di Borel

**Definizione 4.1** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. La $\sigma$-algebra $\sigma_0(\mathcal{G})$ è detta <u>*σ-algebra di Borel*</u> relativa a $\mathcal{G}$ e si denota con $\mathcal{B}(X, \mathcal{G})$ o con $\mathcal{B}(X)$. Gli elementi di $\mathcal{B}(X, \mathcal{G})$ sono detti <u>*insiemi misurabili secondo Borel*</u>.

**Definizione 4.2** Ricordiamo

$$\widetilde{\mathcal{I}} := \{(a, b) \mid -\infty < a < b < \infty\}.$$

**Proposizione 4.3** Risulta

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}\right).$$

*Dimostrazione.* Poiché $\widetilde{\mathcal{I}} \subseteq \tau(\mathbf{R})$ si ha

$$\sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}\right) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})).$$

Mostriamo che vale l'inclusione opposta:

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) \subseteq \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}\right).$$

Poiché ogni aperto è unione numerabile di intervalli aperti limitati si ha

$$\tau(\mathbf{R}) \subseteq \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}\right).$$

Quindi

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) \subseteq \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}\right). \quad \blacksquare$$

**Definizione 4.4** Poniamo

$$\widetilde{\mathcal{I}}_1 := \{[a, b] \mid -\infty < a \leq b < \infty\},$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_2 := \{(a, b] \mid -\infty < a \leq b < \infty\},$$

$$\widehat{\mathcal{I}} := \{(a, \infty) \mid -\infty < a < \infty\}.$$

**Proposizione 4.5** Risulta

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_1\right),$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_2\right),$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widehat{\mathcal{I}}\right).$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_1\right).$$

Poiché

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right],$$

si ha

$$\widetilde{\mathcal{I}} \subseteq \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_1\right),$$

quindi

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) \subseteq \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_1\right).$$

Poiché

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right),$$

si ha

$$\widetilde{\mathcal{I}}_1 \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})),$$

quindi

$$\sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_1\right) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})).$$

Le altre due uguaglianze si dimostrano in modo analogo. $\blacksquare$

**Definizione 4.6** Ricordiamo

$$\mathcal{I}_0 := \{(a, b] \mid -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a, \infty) \mid -\infty < a < \infty\}.$$

**Proposizione 4.7** Risulta

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0(\mathcal{I}_0).$$

*Dimostrazione.* Poiché

$$\widehat{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{I}_0$$

si ha

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widehat{\mathcal{I}}\right) \subseteq \sigma_0(\mathcal{I}_0).$$

Inoltre poiché

$$(a, b] = (a, \infty) \cap \mathcal{C}(b, \infty),$$

si ha

$$\mathcal{I}_0 \subseteq \sigma_0\left(\widehat{\mathcal{I}}\right) = \mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})). \quad \blacksquare$$

**Osservazione 4.8** Se poniamo

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbf{Q}} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Q}, \ -\infty < a < b < \infty\},$$

risulta

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbf{Q}}\right).$$

**Proposizione 4.9** La $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R}))$ è separabile.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbf{Q}} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Q}, \ -\infty < a < b < \infty\}.$$

La famiglia $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbf{Q}}$ è numerabile. Inoltre in modo analogo a quanto visto nelle proposizioni precedenti, si dimostra che

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \sigma_0\left(\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathbf{Q}}\right).$$

Quindi si ha la tesi. $\blacksquare$

**Definizione 4.10** Ricordiamo

$$\overline{\mathcal{I}} := \{(a, b) \mid -\infty < a < b < \infty\} \cup$$
$$\cup \{[-\infty, b) \mid -\infty < b < \infty\} \cup$$
$$\cup \{(a, \infty] \mid -\infty < a < \infty\}.$$

**Proposizione 4.11** Risulta

$$\mathcal{B}\left(\overline{\mathbf{R}}, \tau\left(\overline{\mathbf{R}}\right)\right) = \sigma_0\left(\overline{\mathcal{I}}\right)$$

*Dimostrazione.* Analoga alle precedenti. $\blacksquare$

**Teorema 4.12** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Sia $F \subseteq X$. Allora

$$\mathcal{B}(F, \mathcal{G} \cap F) = \mathcal{B}(X, \mathcal{G}) \cap F.$$

*Dimostrazione.* Immediata. $\blacksquare$

**Corollario 4.13** Risulta

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}, \tau(\mathbf{R})) = \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}, \tau(\overline{\mathbf{R}})) \cap \mathbf{R}.$$

## 1.5 Classi monotone

**Definizione 5.1** Una famiglia non vuota $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è detta *classe monotona* su $X$ se per ogni successione monotona $\{E_n\} \subseteq \mathcal{M}$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{M},$$

ovvero se

(i) per ogni successione non decrescente $\{E_k\} \subseteq \mathcal{M}$ risulta

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M};$$

(ii) per ogni successione non crescente $\{E_k\} \subseteq \mathcal{M}$ risulta

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}.$$

**Osservazione 5.2** Ogni $\sigma$-algebra è una classe monotona.

**Notazione 5.3** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Poniamo

$$\mathcal{M}_0(\mathcal{S}) := \bigcap \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ classe monotona su } X,\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}\}.$$

**Teorema 5.4** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{M}_0(\mathcal{S})$ è una classe monotona su $X$ e risulta

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_0(\mathcal{S}).$$

Inoltre per ogni classe monotona $\mathcal{M}$ su $X$ tale che

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$$

risulta

$$\mathcal{M}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Definizione 5.5** Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. La classe monotona $\mathcal{M}_0(\mathcal{S})$ è detta *classe monotona generata* da $\mathcal{S}$ oppure *classe monotona minimale* contenente $\mathcal{S}$.

**Teorema 5.6** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra. Allora

$$\mathcal{M}_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A}).$$

Dimostrazione. Omessa. ■

# Capitolo 2
# Misure positive

## 2.1 Definizione e prime proprietà

**Definizione 1.1** Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia tale che
$$\emptyset \in \mathcal{C}.$$
Un'applicazione $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è detta *misura* su $\mathcal{C}$ se

(i) risulta
$$\mu(\emptyset) = 0;$$
(ii) *($\sigma$-additività)* per ogni successione disgiunta $\{E_k\} \subseteq \mathcal{C}$ tale che
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{C}$$
risulta
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

**Osservazione 1.2** Se la famiglia $\mathcal{C}$ è una $\sigma$-algebra la condizione
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{C}$$
richiesta nella definizione di misura è sempre verificata.

**Definizione 1.3** Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia tale che
$$\emptyset \in \mathcal{S}.$$
Sia $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura su $\mathcal{C}$. La misura $\mu$ si dice *finita* se per ogni $E \subseteq \mathcal{C}$ risulta
$$\mu(E) < \infty.$$
La misura $\mu$ si dice *$\sigma$-finita* se esiste una successione $\{E_n\} \subseteq \mathcal{C}$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti
$$\mu(E_n) < \infty$$
e tale che
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

**Definizione 1.4** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra su $X$. Sia $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura su $\mathcal{A}$. La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detta *spazio di misura*.

**Definizione 1.5** Uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si dice *finito* se la misura $\mu$ è finita, si dice $\sigma$-finito se la misura $\mu$ è $\sigma$-finita.

**Definizione 1.6** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Se
$$\mu(X) = 1$$
lo spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detto *spazio di probabilità* e la misura $\mu$ è detta *misura di probabilità*.

**Definizione 1.7** Definiamo l'applicazione $\mu^{\#} : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Per ogni $E \subseteq X$ poniamo
$$\mu^{\#}(E) := \begin{cases} \text{numero degli elementi di } E & \text{se } E \text{ è finito,} \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Proposizione 1.8** L'applicazione $\mu^{\#} : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è una misura su $X$.

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 1.9** La misura $\mu^{\#} : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è detta *misura che conta*.

**Osservazione 1.10** La misura $\mu^{\#} : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è finita se $X$ è finito, è $\sigma$-finita se $X$ è numerabile.

**Definizione 1.11** Sia $X$ un insieme non vuoto. Sia $x \in X$. Definiamo l'applicazione $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Per ogni $E \subseteq X$ poniamo
$$\delta_x(E) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

**Proposizione 1.12** Sia $X$ un insieme non vuoto. Sia $x \in X$. L'applicazione $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è una misura su $X$.

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 1.13** Sia $X$ un insieme non vuoto. Sia $x \in X$. La misura $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è detta *misura di Dirac* concentrata in $x$.

**Proposizione 1.14** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora

(i) *(additività)* per ogni $\{E_1, ..., E_n\} \subseteq X$ disgiunti risulta
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k);$$
(ii) *(monotonia)* per ogni $E, F \subseteq X$ tali che
$$E \subseteq F$$
risulta
$$\mu(E) \leq \mu(F);$$
(iii) *($\sigma$-subadditività)* per ogni $\{E_n\} \subseteq X$ risulta
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Segue dalla $\sigma$-additività.
$(ii)$ Poiché
$$F = E \cup (F \backslash E), \quad E \cap (F \backslash E) = \emptyset,$$
per l'additività di $\mu$ si ha
$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \geq \mu(E).$$
$(iii)$ Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{A}$. Sia $\{F_k\} \subseteq \mathcal{A}$ una successione disgiunta tale che per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulti
$$F_k \subseteq E_k$$
e tale che
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$
Allora, per la $\sigma$-additività e per la monotonia di $\mu$ si ha
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$ ∎

**Proposizione 1.15** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora

(i) per ogni successione non decrescente $\{E_k\} \subseteq \mathcal{A}$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k);$$

(ii) per ogni successione non crescente $\{E_k\} \subseteq \mathcal{A}$, con

$$\mu(E_1) < \infty,$$

si ha

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

Dimostrazione. $(i)$ Poniamo

$$E_0 := \emptyset.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$F_k := E_k \backslash E_{k-1}.$$

Allora la successione $\{F_k\} \subseteq \mathcal{A}$ è disgiunta. Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ risuta

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

e risulta

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)\end{aligned}$$

$(ii)$ Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$F_k := E_1 \backslash E_k.$$

Allora la successione $\{F_k\} \subseteq \mathcal{A}$ è non decrescente. Quindi per il punto $(i)$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k).$$

Poiché $\mu(E_1) < \infty$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu(F_k) = \mu(E_1) - \mu(E_k).$$

Quindi

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \mu(E_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \backslash E_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \cap \mathcal{C}E_k) = \\ &= E_1 \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}E_k\right) = E_1 \cap \mathcal{C}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \\ &= E_1 \backslash \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right).\end{aligned}$$

Allora

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

Quindi

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k). \quad \blacksquare$$

**Osservazione 1.16** L'affermazione $(ii)$ della proposizione precedente in generale è falsa se $\mu(E_1) = \infty$, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 1.17** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu^{\#})$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$E_n := \{k \in \mathbf{N} \mid k \geq n\}.$$

Poiché

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$$

si ha

$$\mu^{\#}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

D'altra parte per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu^{\#}(E_n) = \infty.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{\#}(E_n) = \infty.$$

NO

**Proposizione 1.18** *(Lemma di Borel-Cantelli).* Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{E_n\} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Allora

$$\mu\left(\overline{\lim} E_n\right) = 0.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$F_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

Per la $\sigma$-additività di $\mu$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu(F_k) = \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n).$$

Inoltre si ha

$$\overline{\lim} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

La successione $\{F_k\} \subseteq \mathcal{A}$ è non crescente. Inoltre si ha

$$\mu(F_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}\mu\left(\overline{\lim} E_n\right) &= \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) \leq \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) - \sum_{n=1}^{k-1} \mu(E_n)\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) - \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \mu(E_n) = 0.\end{aligned}$$

Quindi si ha la tesi. $\blacksquare$

**Notazione 1.19** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $F \subseteq \mathcal{A}$. Poniamo

$$\mu_F := \mu|_{\mathcal{A}\cap F}.$$

**Proposizione 1.20** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $F \subseteq \mathcal{A}$. L'applicazione $\mu_F$ è una misura su $\mathcal{A} \cap F$.

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Definizione 1.21** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $F \subseteq \mathcal{A}$. La misura $\mu_F$ è detta *misura indotta* da $\mu$ su $\mathcal{A} \cap F$. Lo spazio di misura $(F, \mathcal{A} \cap F, \mu_F)$ è detto *sottospazio di misura* di $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**Definizione 1.22** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Una misura

$$\mu : \mathcal{B}(X, \mathcal{G}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

su $\mathcal{B}(X, \mathcal{G})$ è detta *misura di Borel* su $(X, \mathcal{G})$.

## 2.2 Insiemi di misura nulla

**Definizione 2.1** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Un insieme $N \subseteq X$ si dice *di misura nulla* se

$$N \in \mathcal{A}, \quad \mu(N) = 0.$$

Denotiamo con $\mathcal{N}_\mu$ la famiglia degli insiemi di misura nulla.

**Definizione 2.2** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Un insieme $E \subseteq X$ si dice *trascurabile* se esiste $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che

$$E \subseteq N.$$

Denotiamo con $\mathcal{T}_\mu$ la famiglia degli insiemi trascurabili.

**Proposizione 2.3** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora

$$\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\mu.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Proposizione 2.4** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $E \in \mathcal{T}_\mu$. Allora per ogni $F \subseteq X$ tale che

$$F \subseteq E$$

si ha

$$F \in \mathcal{T}_\mu.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Osservazione 2.5** Le famiglie $\mathcal{N}_\mu$ e $\mathcal{T}_\mu$ sono stabili per unione numerabile.

**Definizione 2.6** Uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si dice *completo* se ogni insieme trascurabile è misurabile, ovvero se

$$\mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{A}.$$

In tal caso si dice che $\mu$ è una *misura completa* e che $\mathcal{A}$ è una *$\sigma$-algebra completa* rispetto a $\mu$.

**Proposizione 2.7** Uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo se e solo se

$$\mathcal{N}_\mu = \mathcal{T}_\mu.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ completo. Abbiamo già visto che

$$\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{T}_\mu.$$

Mostriamo che vale l'inclusione opposta:

$$\mathcal{T}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\mu.$$

Sia $E \in \mathcal{T}_\mu$. Poiché $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo si ha

$$E \in \mathcal{A}.$$

Sia $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che

$$E \subseteq N.$$

Allora per la monotonia di $\mu$ si ha

$$\mu(E) = 0.$$

Quindi

$$E \in \mathcal{N}_\mu.$$

Viceversa supponiamo

$$\mathcal{N}_\mu = \mathcal{T}_\mu.$$

Mostriamo che $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è completo. Sia $E \in \mathcal{T}_\mu$. Allora

$$E \in \mathcal{N}_\mu,$$

quindi in particolare

$$E \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.8** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Poniamo

$$\overline{\mathcal{A}} := \{E \subseteq X \mid \text{esistono } F, G \in \mathcal{A}, \text{con } F \subseteq E \subseteq G, \text{ tali che } \mu(G \backslash F) = 0\}.$$

Definiamo l'applicazione $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Per ogni $E \in \overline{\mathcal{A}}$, siano $F, G \in \mathcal{A}$, con

$$F \subseteq E \subseteq G$$

tali che

$$\mu(G \backslash F) = 0.$$

Allora poniamo

$$\overline{\mu}(E) := \mu(F).$$

**Proposizione 2.9** L'applicazione $\overline{\mu}$ è ben definita.

*Dimostrazione.* Siano $F_1, G_1, F_2, G_2 \in \mathcal{A}$, con

$$F_1 \subseteq E \subseteq G_1, \quad F_2 \subseteq E \subseteq G_2$$

tali che

$$\mu(G_1 \backslash F_1) = 0, \quad \mu(G_2 \backslash F_2) = 0.$$

Allora

$$(G_2 \backslash F_1) = (G_2 \backslash E) \cup (E \backslash F_1) \subseteq (G_2 \backslash F_2) \cup (G_1 \backslash F_1)$$

da cui segue

$$\mu(G_2 \backslash F_1) = 0.$$

Analogamente si ha

$$\mu(G_1 \backslash F_2) = 0.$$

Poiché

$$\mu(G_1 \backslash F_1) = \mu(G_1 \backslash F_2) = \mu(G_2 \backslash F_1) = \mu(G_2 \backslash F_2) = 0$$

si ha

$$\mu(F_1) = \mu(F_2) = \mu(G_1) = \mu(G_2).$$

Quindi la definizione è indipendente dalla scelta di $F$. ∎

**Teorema 2.10** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.

Esempio. $X = \{a,b,c\}$; $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$; $\mu(\emptyset) = \mu(\{b,c\}) = 0$, $\mu(\{a\}) = \mu(X) = 1$
Allora $\{b\}, \{c\} \subseteq \{b,c\} \in \mathcal{N}_\mu \Rightarrow \{b\}, \{c\}$ trascurabili, ma $\notin \mathcal{A}$
$\Rightarrow \mathcal{T}_\mu \not\subseteq \mathcal{A}$.

(i) $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ è uno spazio di misura, ovvero

(a) $\overline{\mathcal{A}}$ è una $\sigma$-algebra su $X$

(b) $\overline{\mu}$ è una misura su $\overline{\mathcal{A}}$

(ii) $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ è uno spazio di misura completo, ovvero $\overline{\mu}$ è una misura completa su $\overline{\mathcal{A}}$.

(iii) $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ contiene $(X,\mathcal{A},\mu)$ ovvero

(a) $\mathcal{A}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$

(b) $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}}=\mu$

(iv) $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ è il più piccolo spazio di misura completo contenente $(X,\mathcal{A},\mu)$, ovvero se $(X,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ è uno spazio di misura completo tale che

$$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}_1,\quad \mu_1|_{\mathcal{A}}=\mu,$$

allora risulta

$$\overline{\mathcal{A}}\subseteq\mathcal{A}_1,\quad \mu_1|_{\overline{\mathcal{A}}}=\overline{\mu}.$$

Dimostrazione. $(i)\,(a)$ Evidentemente si ha

$$\emptyset\in\overline{\mathcal{A}}.$$

Sia $E\in\overline{\mathcal{A}}$. Siano $F,G\in\mathcal{A}$, con

$$F\subseteq E\subseteq G,$$

tali che

$$\mu(G\backslash F)=0.$$

Allora $\mathcal{C}G,\mathcal{C}F\in\mathcal{A}$ e risulta

$$\mathcal{C}G\subseteq\mathcal{C}E\subseteq\mathcal{C}F$$

e

$$\mu(\mathcal{C}F\backslash\mathcal{C}G)=\mu(G\backslash F)=0.$$

Quindi

$$\mathcal{C}E\in\overline{\mathcal{A}}.$$

Sia $\{E_n\}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$. Siano $\{F_n\},\{G_n\}\subseteq\mathcal{A}$ tali che per ogni $n\in\mathbb{N}$ risulti

$$F_n\subseteq E_n\subseteq G_n,\quad \mu(G_n\backslash F_n)=0.$$

Allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\in\mathcal{A}$$

e risulta

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)&=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\mathcal{C}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\\&=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}F_n\right)\subseteq\\&\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\cap\mathcal{C}F_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\backslash F_n).\end{aligned}$$

Quindi per la monotonia e la $\sigma$-subadditività di $\mu$

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(G_n\backslash F_n)=0.$$

Allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\overline{\mathcal{A}}.$$

$(i)\,(b)$ Evidentemente si ha

$$\overline{\mu}(\emptyset)=0.$$

Sia $\{E_n\}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$ una successione disgiunta. Siano $\{F_n\},\{G_n\}\subseteq\mathcal{A}$ tali che per ogni $n\in\mathbb{N}$ risulti

$$F_n\subseteq E_n\subseteq G_n,\quad \mu(G_n\backslash F_n)=0.$$

Allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\in\mathcal{A}$$

e risulta

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$$

e

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\right)=0.$$

Inoltre la successione $\{F_n\}\subseteq\mathcal{A}$ è disgiunta. Quindi

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(E_n).$$

$(ii)$ Sia $E\in\mathcal{T}_{\overline{\mu}}$. Sia $N\in\mathcal{N}_{\overline{\mu}}$ tale che

$$E\subseteq N.$$

Allora

$$N\in\overline{\mathcal{A}},\quad \overline{\mu}(N)=0.$$

Siano $F,G\in\mathcal{A}$, con

$$F\subseteq N\subseteq G,$$

tali che

$$\mu(G\backslash F)=0.$$

Allora

$$\mu(F)=\overline{\mu}(N)=0$$

e

$$\mu(G)=\mu(F)+\mu(G\backslash F)=0.$$

Quindi $\emptyset,G\in\mathcal{A}$ e risulta

$$\emptyset\subseteq E\subseteq G$$

e

$$\mu(G\backslash\emptyset)=\mu(G)=0.$$

Allora

$$E\in\overline{\mathcal{A}}.$$

$(iii)\,(a)$, $(iii)\,(b)$ Evidenti.

$(iv)$ Sia $E\in\overline{\mathcal{A}}$. Siano $F,G\in\mathcal{A}$, con

$$F\subseteq E\subseteq G,$$

tali che

$$\mu(G\backslash F)=0.$$

Poiché $\mu_1|_{\mathcal{A}}=\mu$ e $G\backslash F\in\mathcal{A}$ si ha

$$\mu_1(G\backslash F)=\mu(G\backslash F)=0.$$

Allora poiché $G\backslash E\subseteq G\backslash F$ e poiché $\mu_1$ è completa si ha

$$G\backslash E\in\mathcal{A}_1.$$

Quindi

$$E=G\backslash(G\backslash E)\in\mathcal{A}_1.$$

Non dimostriamo l'affermazione

$$\mu_1|_{\overline{\mathcal{A}}}=\overline{\mu}.\ \blacksquare$$

**Definizione 2.11** Lo spazio di misura $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ è detto il <u>completamento</u> di $(X,\mathcal{A},\mu)$.

**Proposizione 2.12** Risulta

$$\overline{\mathcal{A}}=\{F\cup E_0\mid F\in\mathcal{A},\ E_0\in\mathcal{T}_{\mu}\}.$$

Dimostrazione. Sia $E \in \overline{\mathcal{A}}$. Siano $F, G \in \mathcal{A}$, con

$$F \subseteq E \subseteq G,$$

tali che

$$\mu(G \backslash F) = 0.$$

Poniamo

$$E_0 := E \backslash F.$$

Allora risulta

$$E = F \cup E_0.$$

Inoltre, poiché $E_0 \subseteq G \backslash F$ si ha

$$E_0 \in \mathcal{T}_\mu.$$

Viceversa siano $F \in \mathcal{A}$, $E_0 \in \mathcal{T}_\mu$. Poniamo

$$E := F \cup E_0.$$

Sia $N_0 \in \mathcal{N}_\mu$ tale che

$$E_0 \subseteq N_0.$$

Poniamo

$$G := F \cup N_0.$$

Allora $G \in \mathcal{A}$. Inoltre risulta

$$F \subseteq E \subseteq G$$

e

$$\mu(G \backslash F) = \mu(N_0 \backslash F) = 0$$

Quindi

$$E \in \overline{\mathcal{A}}. \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.13** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.
Una proprietà $P$ su $X$ si dice *vera quasi ovunque* (*q.o.*) in $X$ se

$$\complement\{x \in X \mid P(x) \text{ è vera}\} \in \mathcal{N}_\mu .$$

**Definizione 2.14** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.
Due funzioni $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ si dicono *uguali quasi ovunque* in $X$ se

$$\complement\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{N}_\mu .$$

Una funzione $f : X \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ si dice *finita quasi ovunque* in $X$ se

$$\complement\{x \in X \mid |f(x)| < \infty\} \in \mathcal{N}_\mu .$$

Sia $D \in \mathcal{A}$. Una funzione $f : D \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ si dice *definita quasi ovunque* in $X$ se

$$\complement D \in \mathcal{N}_\mu .$$

**Proposizione 2.15** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura completo. Allora l'uguaglianza quasi ovunque tra funzioni in $\overline{\mathbf{R}}^X$ è una relazione di equivalenza in $\overline{\mathbf{R}}^X$.

Dimostrazione. Riflessività e simmetria sono evidenti.
Per provare la transitività consideriamo tre funzioni $f, g, h : X \to \overline{\mathbf{R}}$ tali che

$$f = g \quad \text{q.o. in } X, \quad g = h \quad \text{q.o. in } X.$$

Poniamo

$$N_1 := \complement\{x \in X \mid f(x) = g(x)\},$$

$$N_2 := \complement\{x \in X \mid g(x) = h(x)\}.$$

Allora $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. Poniamo

$$N := N_1 \cup N_2.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$. Inoltre, poiché

$$\complement N = \complement N_1 \cap \complement N_2,$$

per ogni $x \in \complement N$ si ha

$$f(x) = g(x) = h(x).$$

Quindi

$$\complement N \subseteq \{x \in X \mid f(x) = h(x)\}.$$

Da questa segue

$$\complement\{x \in X \mid f(x) = h(x)\} \subseteq N.$$

Allora poiché la misura $\mu$ è completa, si ha

$$\complement\{x \in X \mid f(x) = h(x)\} \in \mathcal{N}_\mu,$$

ovvero

$$f = h \quad \text{q.o. in } X. \quad \blacksquare$$

**Osservazione 2.16** È naturale identificare gli elementi di una stessa classe di equivalenza in $\overline{\mathbf{R}}^X$, pensandola come un'unica funzione definita quasi ovunque in $X$.

## 2.3 Misure esterne

**Definizione 3.1** Un'applicazione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ si dice *misura esterna* su $X$ se

(i) risulta

$$\mu^*(\emptyset) = 0;$$

(ii) *(monotonia)* per ogni $E, F$, con

$$E \subseteq F,$$

risulta

$$\mu^*(E) \le \mu^*(F);$$

(iii) *($\sigma$-subadditività)* per ogni $\{E_n\} \subseteq X$ si ha

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

**Osservazione 3.2** Ogni misura definita sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{P}(X)$ è una misura esterna.

**Notazione 3.3** Sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

$$\emptyset \in \mathcal{K}.$$

Poniamo

$$\mathcal{R}_\mathcal{K}(E) := \left\{ \{I_k\} \subseteq \mathcal{K} \mid E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

famiglia dei ricoprimenti numerabili di E con elementi di K

**Definizione 3.4** Sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

$$\emptyset \in \mathcal{K}.$$

Sia $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ tale che

$$\nu(\emptyset) = 0.$$

Definiamo l'applicazione $\mu^{(\mathcal{K},\nu)} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Per ogni $E \subseteq X$ poniamo

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E) := \begin{cases} \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(I_k) \mid \{I_k\} \in \mathcal{R}_\mathcal{K}(E) \right\} & \text{se } \mathcal{R}_\mathcal{K}(E) \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se } \mathcal{R}_\mathcal{K}(E) = \emptyset. \end{cases}$$

**Teorema 3.5** Sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

$$\emptyset \in \mathcal{K}.$$

Sia $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ tale che

$$\nu(\emptyset) = 0.$$

Allora l'applicazione $\mu^{(\mathcal{K},\nu)}$ è una misura esterna su $X$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Evidentemente si ha

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(\emptyset) = 0.$$

$(ii)$ Siano $E, F \subseteq X$ tali che

$$E \subseteq F.$$

Mostriamo che

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E) \leq \mu^{(\mathcal{K},\nu)}(F).$$

Se $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(F) = \emptyset$ si ha

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(F) = \infty$$

e la disuguaglianza è ovvia.
Se $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(F) \neq \emptyset$ si ha

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(F) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(E).$$

Quindi

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E) \leq \mu^{(\mathcal{K},\nu)}(F).$$

$(iii)$ Sia $\{E_n\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Mostriamo che

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E_n).$$

Se esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E_n) = \infty,$$

la disuguaglianza è ovvia.
Allora supponiamo che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E_n) < \infty.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $\{I_{n,k}\}_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}_{\mathcal{K}}(E_n)$ tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(I_{n,k}) < \mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k},$$

si ha

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n,k=1}^{\infty} I_{n,k},$$

ovvero

$$\{I_{n,k}\}_{n,k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}_{\mathcal{K}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Allora

$$\begin{aligned}\mu^{(\mathcal{K},\nu)}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \nu(I_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E_n) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ si ha la tesi. ■

**Definizione 3.6** Sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

$$\emptyset \in \mathcal{K}.$$

Sia $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ tale che

$$\nu(\emptyset) = 0.$$

Allora la misura esterna $\mu^{(\mathcal{K},\nu)}$ è detta <u>*misura esterna generata*</u> dalla coppia $(\mathcal{K}, \nu)$.

**Osservazione 3.7** Sia $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che

$$\emptyset \in \mathcal{K}.$$

Sia $\nu : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ tale che

$$\nu(\emptyset) = 0.$$

Allora per ogni $E \in \mathcal{K}$ si ha

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E) \leq \nu(E).$$

**Proposizione 3.8** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra su $X$. Sia $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura su $\mathcal{A}$. Allora

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\mathcal{A}} = \nu.$$

*Dimostrazione.* Sia $E \in \mathcal{A}$. Mostriamo che

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(E) = \nu(E).$$

Per l'osservazione precedente si ha

$$\mu^{(\mathcal{K},\nu)}(E) \leq \nu(E).$$

Mostriamo che vale la disuaglianza inversa:

$$\nu(E) \leq \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(E).$$

Se $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(E) = \emptyset$ si ha

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(E) = \infty$$

e la disuguaglianza è ovvia.
Supponiamo $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(E) \neq \emptyset$. Sia $\{I_k\} \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(E)$ arbitraria. Per la monotonia e per la $\sigma$-subadditività di $\nu$ si ha

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(I_k).$$

perché è definita Chi unione

Per l'arbitrarietà di $\{I_k\} \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(E)$ si ha

$$\nu(E) \leq \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(E). \quad ■$$

## 2.4 Generazione di misure

**Definizione 4.1** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Un insieme $E \subseteq X$ si dice <u>*$\mu^*$-misurabile*</u> se per ogni $Z \subseteq X$ risulta

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E).$$

Denotiamo con $\mathcal{L}(\mu^*)$ la famiglia degli insiemi $\mu^*$-misurabili.

**Proposizione 4.2** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Un insieme $E \subseteq X$ è $\mu^*$-misurabile se e solo se per ogni $Z \subseteq X$ risulta

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E).$$

*Dimostrazione.* Sia $E \in \mathcal{L}(\mu^*)$. Allora per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E),$$

quindi in particolare

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E).$$

Viceversa sia $E \subseteq X$ tale che per ogni $Z \subseteq X$ risulti

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E).$$

Per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$Z = Z \cap X = Z \cap (E \cup \mathcal{C}E) = (Z \cap E) \cup (Z \cap \mathcal{C}E),$$

quindi, per la subadditività di $\mu^*$

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E).$$

Allora per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E),$$

quindi $E \in \mathcal{L}(\mu^*)$. ■

**Lemma 4.3** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Sia $E \subseteq X$ tale che

$$\mu^*(E) = 0.$$

Allora

$$E \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

*Dimostrazione.* Per ogni $Z \subseteq X$ per la monotonia di $\mu^*$ si ha

$$\mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E) \leq \mu^*(E) + \mu^*(Z) = \mu^*(Z).$$

Allora la tesi segue dalla proposizione precedente. ■

**Proposizione 4.4** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Per ogni $E, F \in \mathcal{L}(\mu^*)$ risulta

$$E \cup F \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

*Dimostrazione.* Siano $E, F \in \mathcal{L}(\mu^*)$. Sia $Z \subseteq X$ arbitrario. Poiché $E \in \mathcal{L}(\mu^*)$ si ha

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E).$$

Poiché $F \in \mathcal{L}(\mu^*)$ si ha

$$\mu^*(Z \cap \mathcal{C}E) = \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E \cap F) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E \cap \mathcal{C}F).$$

Quindi

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E \cap F) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E \cap \mathcal{C}F).$$

Si ha

$$\begin{aligned} (Z \cap E) \cup (Z \cap \mathcal{C}E \cap F) &= Z \cap [E \cup (\mathcal{C}E \cap F)] = \\ &= Z \cap [E \cup (F \backslash E)] = \\ &= Z \cap (E \cup F). \end{aligned}$$

Quindi per la subadditività di $\mu^*$ si ha

$$\mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E \cap F) \geq \mu^*(Z \cap (E \cup F)).$$

Inoltre

$$Z \cap \mathcal{C}E \cap \mathcal{C}F = Z \cap \mathcal{C}(E \cup F).$$

Quindi

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*[Z \cap (E \cup F)] + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}(E \cup F)).$$

Per l'arbitrarietà di $Z \subseteq X$ si ha

$$E \cup F \in \mathcal{L}(\mu^*). \ ■$$

**Corollario 4.5** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Per ogni $\{E_1, ..., E_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu^*)$ risulta

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

**Lemma 4.6** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{L}(\mu^*)$ una successione disgiunta. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$S_n := \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z \cap S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap E_k).$$

*Dimostrazione.* Induzione su $n$.

Se $n = 1$ l'uguaglianza è vera.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Supponiamo che risulti

$$\mu^*(Z \cap S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap E_k)$$

Mostriamo che

$$\mu^*(Z \cap S_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(Z \cap E_k).$$

Per il corollario precedente si ha

$$S_n \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

Quindi per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z \cap S_{n+1}) = \mu^*(Z \cap S_{n+1} \cap S_n) + \mu^*(Z \cap S_{n+1} \cap \mathcal{C}S_n).$$

Poiché $\{E_k\}$ è una successione disgiunta, si ha

$$S_{n+1} \cap S_n = S_n, \quad S_{n+1} \cap \mathcal{C}S_n = E_{n+1}.$$

Quindi per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap S_{n+1}) &= \mu^*(Z \cap S_n) + \mu^*(Z \cap E_{n+1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap E_k) + \mu^*(Z \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(Z \cap E_k). \ ■ \end{aligned}$$

**Lemma 4.7** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{L}(\mu^*)$ una successione disgiunta. Sia

$$S := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Allora per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z \cap S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k).$$

*Dimostrazione.* Sia $Z \subseteq X$ arbitrario.
Mostriamo che vale la disuguaglianza

$$\mu^*(Z \cap S) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k).$$

Si ha

$$Z \cap S = Z \cap \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (Z \cap E_k).$$

Allora per la $\sigma$-subadditività di $\mu^*$ si ha

$$\mu^*(Z \cap S) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k).$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza opposta

$$\mu^*(Z \cap S) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k).$$

Sia $n \in \mathbf{N}$ arbitrario. Poniamo

$$S_n := \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Allora per il lemma precedente si ha

$$\mu^*(Z \cap S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap E_k).$$

Poiché $S_n \subseteq S$, si ha

$$Z \cap S_n \subseteq Z \cap S.$$

Quindi per la monotonia di $\mu^*$ si ha

$$\mu^*(Z \cap S) \geq \mu^*(Z \cap S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap E_k).$$

Allora

$$\mu^*(Z \cap S) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 4.8** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Allora per ogni successione $\{E_k\} \subseteq \mathcal{L}(\mu^*)$ si ha

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

*Dimostrazione.* $(a)$ Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{L}$ una successione disgiunta arbitraria. Poniamo

$$S := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Sia $Z \subseteq X$ arbitrario. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$S_n := \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Sia $n \in \mathbf{N}$ arbitrario. Per la proposizione 4.4 si ha

$$S_n \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

Quindi

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap S_n) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}S_n).$$

Per il lemma 4.6 si ha

$$\mu^*(Z \cap S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap E_k).$$

Inoltre, poiché $S_n \subseteq S$ si ha

$$\mathcal{C}S \subseteq \mathcal{C}S_n,$$

da cui segue

$$Z \cap \mathcal{C}S \subseteq Z \cap \mathcal{C}S_n.$$

Quindi per monotonia di $\mu^*$ si ha

$$\mu^*(Z \cap \mathcal{C}S_n) \geq \mu^*(Z \cap \mathcal{C}S).$$

Allora

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap E_k) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}S).$$

Per l'arbitarietà di $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}S).$$

Poiché per il lemma 4.7 si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k) = \mu^*(Z \cap S),$$

si ha

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap S) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}S)$$

Per l'arbitarietà si $Z \subseteq X$ si ha

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

$(b)$ Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{L}(\mu^*)$ una generica successione. Allora la tesi segue da $(a)$ tenendo conto del lemma 1.8. $\blacksquare$

**Teorema 4.9** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Allora $\mathcal{L}(\mu^*)$ è una $\sigma$-algebra su $X$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Poiché

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$

per il lemma 4.3 si ha

$$\emptyset \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

$(ii)$ Sia $E \in \mathcal{L}(\mu^*)$. Allora per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E).$$

Quindi per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap \mathcal{C}E) + \mu^*(Z \cap \mathcal{C}(\mathcal{C}E)).$$

Allora

$$\mathcal{C}E \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

$(iii)$ Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{L}(\mu^*)$. Allora per la proposizione precedente si ha

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{L}(\mu^*). \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.10** Sia $\mu^*$ una misura esterna su $X$. Allora $\mu^*|_{\mathcal{L}(\mu^*)}$ è una misura completa su $\mathcal{L}(\mu^*)$.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\mu := \mu^*|_{\mathcal{L}(\mu^*)}.$$

Mostriamo che $\mu$ è una misura su $\mathcal{L}(\mu^*)$.
Evidentemente si ha

$$\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0.$$

Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{L}(\mu^*)$ una successione disgiunta. Poiché $\mathcal{L}(\mu^*)$ è una $\sigma$-algebra si ha

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{L}(\mu^*).$$

Poniamo

$$S := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Per il lemma 4.7 per ogni $Z \subseteq X$ si ha

$$\mu^*(Z \cap S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap E_k).$$

In particolare, scegliendo $Z = S$, si ha

$$\mu^*(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(S \cap E_k),$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$S \cap E_k = \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} E_l\right) \cap E_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} (E_l \cap E_k) = E_k.$$

Quindi si ha

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Allora, poiché

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{L}(\mu^*)$$

e poiché per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$E_k \in \mathcal{L}(\mu^*),$$

si ha

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Mostriamo che la misura $\mu$ è completa.
Sia $E \in \mathcal{T}_\mu$. Sia $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che

$$E \subseteq N.$$

Allora $N \in \mathcal{L}(\mu^*)$ e risulta

$$\mu(N) = 0.$$

Poiché

$$\mu(N) = \mu^*(N)$$

si ha

$$\mu^*(N) = 0.$$

Quindi per monotonia di $\mu^*$ si ha

$$\mu^*(E) = 0.$$

Allora per il lemma 4.3 si ha

$$E \in \mathcal{L}(\mu^*). \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.11** *(Caratheodory)* Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra su $X$. Sia $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura su $\mathcal{A}$. Allora:

(i) $\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\big|_{\mathcal{A}} = \nu$;

(ii) $\sigma_0(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mu^{(\mathcal{A},\nu)})$;

(iii) $\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\big|_{\sigma_0(\mathcal{A})}$ è una misura.

Inoltre supponiamo che la misura $\nu$ sia $\sigma$-finita. Allora la misura

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\sigma_0(\mathcal{A})}$$

è l'unica misura che estende $\nu$ su $\sigma_0(\mathcal{A})$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Segue dalla proposizione 3.8.
$(ii)$ Mostriamo che

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right).$$

Sia $E \in \mathcal{A}$. Sia $Z \subseteq X$ arbitrario. Mostriamo che

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z) \geq \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap E) + \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap CE).$$

Se $\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z) = \infty$ la disuguaglianza è sempre verificata.
Sia $\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z) < \infty$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\{I_n\} \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(Z)$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) < \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z) + \varepsilon.$$

Poiché

$$Z \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

si ha

$$Z \cap E \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E).$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$I_n \cap E \in \mathcal{A}.$$

Quindi

$$\{I_n \cap E\} \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(Z \cap E).$$

Allora

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n \cap E).$$

Analogamente si ottiene

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap CE) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n \cap CE).$$

Allora, tenendo conto dell'additività di $\nu$, si ha

$$\begin{aligned}\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap E) + \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap CE) &\leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n \cap CE) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\nu(I_n \cap E) + \nu(I_n \cap CE)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(I_n) < \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z) \geq \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap E) + \mu^{(\mathcal{A},\nu)}(Z \cap CE).$$

Per l'arbitrarietà di $Z \subseteq X$ si ha

$$E \in \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right).$$

Allora

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right).$$

Quindi, poiché $\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right)$ è una $\sigma$-algebra, si ha

$$\sigma_0(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right).$$

$(iii)$ Poiché

$$\sigma_0(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right),$$

si ha

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\sigma_0(\mathcal{A})} = \left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right)}\right)\Bigg|_{\sigma_0(\mathcal{A})}.$$

Per il teorema precedente

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right)}$$

è una misura su $\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right)$. Quindi

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\sigma_0(\mathcal{A})}$$

è una misura su $\sigma_0(\mathcal{A})$.
Non dimostriamo l'affermazione riguardante l'unicità. $\blacksquare$

**Definizione 4.12** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra su $X$. Sia $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura su $\mathcal{A}$. La misura

$$\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\sigma_0(\mathcal{A})}$$

è detta *estensione di Caratheodory* di $\nu$.

**Osservazione 4.13** In generale lo spazio di misura

$$\left(X, \sigma_0(\mathcal{A}), \mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\sigma_0(\mathcal{A})}\right)$$

non è completo.

**Teorema 4.14** Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra su $X$. Sia $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura $\sigma$-finita su $\mathcal{A}$. Allora lo spazio di misura

$$\left(X, \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right), \mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{A},\nu)}\right)}\right)$$

è il completamento dello spazio di misura

$$\left(X, \sigma_0(\mathcal{A}), \mu^{(\mathcal{A},\nu)}\Big|_{\sigma_0(\mathcal{A})}\right)$$

*Dimostrazione.* Omessa. $\blacksquare$

**Corollario 4.15** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Sia $\mu : \mathcal{B}(X, \mathcal{G}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura di Borel $\sigma$-finita su $(X, \mathcal{G})$. Allora lo spazio di misura

$$\left(X, \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{B}(X,\mathcal{G}),\mu)}\right), \mu^{(\mathcal{B}(X,\mathcal{G}),\mu)}\Big|_{\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{B}(X,\mathcal{G}),\mu)}\right)}\right)$$

è il completamento dello spazio di misura

$$(X, \mathcal{B}(X, \mathcal{G}), \mu).$$

**Definizione 4.16** Sia $(X, \mathcal{G})$ uno spazio topologico. Sia $\mu : \mathcal{B}(X, \mathcal{G}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura di Borel $\sigma$-finita su $(X, \mathcal{G})$. La $\sigma$-algebra

$$\overline{\mathcal{B}(X, \mathcal{G})} = \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{B}(X,\mathcal{G}),\mu)}\right)$$

è detta *$\sigma$-algebra di Lebesgue*. I suoi elementi sono detti *insiemi misurabili secondo Lebesgue*. La misura

$$\overline{\mu} = \mu^{(\mathcal{B}(X,\mathcal{G}),\mu)}\Big|_{\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{B}(X,\mathcal{G}),\mu)}\right)}$$

è detta *misura di Lebesgue*.

**Proposizione 4.17** Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una semialgebra tale che

$$\emptyset \in \mathcal{C}.$$

Sia $\nu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ una misura su $\mathcal{C}$. Allora esiste un'unica misura $\mu : \mathcal{A}_0(\mathcal{C}) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ tale che

$$\mu|_{\mathcal{C}} = \nu.$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

# Capitolo 3
# Misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$

## 3.1 Definizione e prime proprietà

**Definizione 1.1** Consideriamo la semialgebra

$$\mathcal{I}_0 := \{(a,b] \mid -\infty \le a \le b < \infty\} \cup \{(a,\infty) \mid -\infty < a < \infty\}$$

e l'algebra

$$\mathcal{I} := \mathcal{U}_0(\mathcal{I}_0).$$

Definiamo l'applicazione $\lambda_0 : \mathcal{I} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Poniamo

$$\lambda_0(\emptyset) := 0.$$

Per ogni $a, b$ tali che $-\infty \le a \le b < \infty$ poniamo

$$\lambda_0((a,b]) := b - a.$$

Per ogni $a$ tale che $-\infty < a < \infty$ poniamo

$$\lambda_0((a,\infty)) := \infty.$$

Per ogni $E \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{I}_0$ siano $\{E_1, ..., E_n\} \subseteq \mathcal{I}_0$ disgiunti tali che

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Allora poniamo

$$\lambda_0(E) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_0(E_k).$$

**Proposizione 1.2** L'applicazione

$$\lambda_0|_{\mathcal{I}_0} : \mathcal{I}_0 \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

è una misura $\sigma$-finita su $\mathcal{I}_0$.

*Dimostrazione.* Non dimostriamo che $\lambda_0|_{\mathcal{I}_0}$ è una misura su $\mathcal{I}_0$. Mostriamo che la misura $\lambda_0|_{\mathcal{I}_0}$ è $\sigma$-finita. Si ha

$$\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]$$

e per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$(-n, n] \in \mathcal{I}_0, \quad \lambda_0((-n,n]) = 2n < \infty. \blacksquare$$

**Proposizione 1.3** L'applicazione

$$\lambda_0 : \mathcal{I} \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

è una misura $\sigma$-finita su $\mathcal{I}$.

*Dimostrazione.* Segue dalla proposizione precedente, tenendo conto della definizione di $\lambda^0$. ■

**Definizione 1.4** La misura esterna $\mu^{(\mathcal{I},\lambda_0)}$ è detta <u>misura esterna di Lebesgue</u> ed è denotata con $\lambda^*$. La $\sigma$-algebra

$$\mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{I},\lambda_0)}\right)$$

è detta <u>$\sigma$-algebra di Lebesgue</u> ed è denotata con $\mathcal{L}(\mathbf{R})$ o con $\mathcal{L}$. I suoi elementi sono detti <u>insiemi misurabili secondo Lebesgue</u> o <u>insiemi di Lebesgue</u>. La misura

$$\mu^{(\mathcal{I},\lambda_0)}\Big|_{\mathcal{L}(\mu^{(\mathcal{I},\lambda_0)})}$$

è detta <u>misura di Lebesgue</u> in $\mathbf{R}$ ed è denotata con $\lambda$.

**Proposizione 1.5** Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ numerabile. Allora $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e risulta

$$\lambda(E) = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $a \in \mathbf{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\{a\} \subseteq (a - \varepsilon, a],$$

quindi, per la monotonia di $\lambda^*$

$$\lambda^*(\{a\}) \le \varepsilon.$$

Allora

$$\lambda^*(\{a\}) = 0.$$

Sia $E = \{a_1, a_2, ...\}$. Per la $\sigma$-subadditività di $\lambda^*$ si ha

$$\lambda^*(E) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(\{a_n\}) = 0.$$

Quindi

$$\lambda^*(E) = 0.$$

Allora si ha $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e risulta

$$\lambda(E) = \lambda^*(E) = 0. \blacksquare$$

**Teorema 1.6** Vale l'inclusione

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R}),$$

ovvero ogni insieme di Borel in $\mathbf{R}$ è misurabile secondo Lebesgue.

*Dimostrazione.* Poiché $\lambda_0$ è una misura $\sigma$-finita su $\mathcal{I}$ per il teorema di Caratheodory si ha

$$\sigma_0(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{L}\left(\mu^{(\mathcal{I},\lambda_0)}\right),$$

ovvero

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R}). \blacksquare$$

**Proposizione 1.7**

(i) Ogni intervallo limitato $I_{a,b}$ di estremi $a, b$ è misurabile secondo Lebesgue e risulta

$$\lambda(I_{a,b}) = b - a.$$

(ii) Ogni intervallo illimitato $I$ è misurabile secondo Lebesgue e risulta

$$\lambda(I) = \infty.$$

*Dimostrazione.* (*i*) Sia ad esempio

$$I_{a,b} = (a, b).$$

Allora si ha

$$I_{a,b} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right].$$

Quindi

$$I_{a,b} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

e per il teorema precedente

$$I_{a,b} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ poiché

$$\left(a, b - \frac{1}{n}\right] \subseteq I_{a,b} \subseteq (a, b],$$

per monotonia di $\lambda$ si ha

$$b - a - \frac{1}{n} \leq \lambda(I_{a,b}) \leq b - a.$$

Allora

$$\lambda(I_{a,b}) = b - a.$$

$(ii)$ Sia ad esempio

$$I = (-\infty, b).$$

Allora

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right].$$

Quindi

$$I \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

e per il teorema precedente

$$I \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ poiché

$$\left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right] \subseteq I \subseteq (-\infty, b]$$

per monotonia di $\lambda$ si ha

$$\infty \leq \lambda(I) \leq \infty$$

cioè

$$\lambda(I) = \infty. \quad \blacksquare$$

**Osservazione 1.8** Lo spazio di misura

$$(\mathbf{R}, \mathcal{L}(\mathbf{R}), \lambda)$$

è completo

**Osservazione 1.9** Lo spazio di misura

$$(\mathbf{R}, \mathcal{L}(\mathbf{R}), \lambda)$$

è il completamento dello spazio

$$\left(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda|_{\mathcal{B}(\mathbf{R})}\right).$$

**Osservazione 1.10** Lo spazio di misura

$$(\mathbf{R}, \mathcal{L}(\mathbf{R}), \lambda)$$

è $\sigma$-finito.

## 3.2 Misura di Peano-Jordan e misura di Lebesgue

**Proposizione 2.1** Sia $E \subseteq \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ aperto}\}.$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che vale la disuguaglianza

$$\lambda^*(E) \leq \inf\{\lambda(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ aperto}\}.$$

Sia $A$ un aperto tale che $E \subseteq A$. Per la monotonia di $\lambda^*$ si ha

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(A).$$

Per il teorema 1.6 si ha $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Quindi

$$\lambda^*(A) = \lambda(A).$$

Allora per ogni aperto $A$ tale che $E \subseteq A$ si ha

$$\lambda^*(E) \leq \lambda(A).$$

Quindi

$$\lambda^*(E) \leq \inf\{\lambda(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ aperto}\}.$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza inversa

$$\inf\{\lambda(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ aperto}\} \leq \lambda^*(E).$$

Se $\lambda^*(E) = \infty$, è evidente.
Se $\lambda^*(E) < \infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento numerabile $\{(a_k, b_k]\} \subseteq \mathcal{I}$ tale che

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k], \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \lambda^*(E) + \varepsilon.$$

Per ogni $\sigma > 0$ poniamo

$$A_\sigma := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a_k, b_k + \frac{\sigma}{2^k}\right).$$

L'insieme $A_\sigma$ è un aperto tale che $E \subseteq A_\sigma$. Tenendo conto della $\sigma$-subadditività di $\lambda^*$ si ha

$$\begin{aligned}
\lambda(A_\sigma) &= \lambda^*(A_\sigma) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*\left(a_k, b_k + \frac{\sigma}{2^k}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\left(a_k, b_k + \frac{\sigma}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma}{2^k} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \sigma.
\end{aligned}$$

Allora

$$\lambda(A_\sigma) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon + \sigma.$$

Quindi

$$\inf\{\lambda(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ aperto}\} \leq \lambda(A_\sigma) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon + \sigma.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ e $\sigma$ si ha

$$\inf\{\lambda(A) \mid E \subseteq A,\ A \text{ aperto}\} \leq \lambda^*(E). \quad \blacksquare$$

**Osservazione 2.2** Sia $E \subseteq \mathbf{R}$. Allora

$$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(G) \mid E \subseteq G,\ G \in \mathcal{L}(\mathbf{R})\}.$$

**Definizione 2.3** Sia $E \subseteq \mathbf{R}$. Si dice *misura interna di Lebesgue* di $E$ la quantità

$$\lambda_*(E) := \sup\{\lambda(F) \mid F \subseteq E,\ F \in \mathcal{L}(\mathbf{R})\}.$$

**Proposizione 2.4** Per ogni $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ si ha

$$\lambda_*(E) = \lambda(E).$$

**Proposizione 2.5** Per ogni $E_1$, $E_2$ tali che $E_1 \subseteq E_2$ risulta

$$\lambda_*(E_1) \leq \lambda_*(E_2).$$

**Proposizione 2.6** Per ogni $E \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$\lambda_*(E) \leq \lambda^*(E).$$

*Dimostrazione.* Sia $F \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $F \subseteq E$. Per la monotonia di $\lambda^*$ si ha

$$\lambda(F) = \lambda^*(F) \leq \lambda^*(E).$$

Allora

$$\lambda_*(E) \leq \lambda^*(E). \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.7** Sia $E \subseteq \mathbf{R}$. Un insieme $G \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ si dice *inviluppo misurabile* di $E$ se

(i) $E \subseteq G$;
(ii) per ogni $H \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $H \subseteq G \backslash E$ risulta $\lambda(H) = 0$.

**Proposizione 2.8** Sia $E \in \mathbf{R}$. Allora

(i) esiste un inviluppo misurabile $G \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ di $E$;
(ii) per ogni inviluppo misurabile $G$ di $E$ risulta

$$\lambda(G) = \lambda^*(E).$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $\lambda^*(E) < \infty$. Per la proposizione 2.1, per ogni $k \in \mathbf{N}$ esiste $A_k$ aperto tale che

$$E \subseteq A_k, \quad \lambda^*(E) + \frac{1}{k} > \lambda^*(A_k).$$

Poniamo

$$G := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Ovviamente $G \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ e risulta

$$E \subseteq G.$$

Inoltre per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$G \subseteq A_k.$$

Allora per la monotonia di $\lambda^*$ per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(G) \leq \lambda^*(A_k) < \lambda^*(E) + \frac{1}{k}.$$

Per l'arbitrarietà di $k$ e poiché $G \in \mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R})$, si ha

$$\lambda(G) = \lambda^*(G) = \lambda^*(E).$$

Sia $H \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $H \subseteq G \backslash E$. Allora $E \subseteq G \backslash H$. Tenendo conto della monotonia di $\lambda^*$ e dell'additività di $\lambda$ si ha

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(G \backslash H) = \lambda(G \backslash H) = \lambda(G) - \lambda(H)$$

ovvero

$$\lambda(G) \leq \lambda(G) - \lambda(H).$$

Poiché $\lambda(G) < \infty$ da questa segue

$$\lambda(H) = 0.$$

Quindi $G$ è un inviluppo misurabile di $E$.
Sia $\lambda^*(E) = \infty$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$E_n := E \cap (-n, n].$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\lambda^*(E_n) < \infty$$

quindi esiste un inviluppo misurabile $G_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ di $E_n$. Poniamo

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Ovviamente $G \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ e risulta

$$E \subseteq G.$$

Sia $H \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $H \subseteq G \backslash E$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$H_n := H \cap G_n.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $H_n \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e risulta

$$H_n \subseteq G_n \backslash E \subseteq G_n \backslash E_n.$$

Allora, poiché $G_n$ è inviluppo misurabile di $E_n$, si ha $\lambda(H_n) = 0$. Poiché

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

per la $\sigma$-subadditività di $\lambda$ segue

$$\lambda(H) = 0.$$

$(ii)$ Sia $G$ un inviluppo misurabile di $E$.

Sia $\lambda^*(E) = \infty$. Allora evidentemente si ha

$$\lambda^*(G) \leq \lambda^*(E).$$

Inoltre per la monotonia di $\lambda^*$ si ha

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(G).$$

Quindi

$$\lambda(G) = \lambda^*(G) = \lambda^*(E).$$

Sia $\lambda^*(E) < \infty$. Abbiamo dimostrato l'uguaglianza

$$\lambda(G) = \lambda^*(E)$$

per un particolare inviluppo misurabile $G$ di $E$.
Mostriamo che tutti gli inviluppi misurabili di Lebesgue di $E$ hanno la stessa misura di Lebesgue. Siano $G_1$, $G_2$ due arbitrari inviluppi misurabili di $E$. Poiché $E \subseteq G_2$ si ha

$$G_1 \backslash G_2 \subseteq G_1 \backslash E.$$

Allora, poichè $G_1$ è inviluppo misurabile di $E$, si ha

$$\lambda(G_1 \backslash G_2) = 0.$$

Poiché

$$G_1 = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \backslash G_2), \quad (G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \backslash G_2) = \emptyset,$$

per l'additività di $\lambda$ si ha

$$\lambda(G_1) = \lambda(G_1 \cap G_2).$$

Analogamente si prova che

$$\lambda(G_2) = \lambda(G_1 \cap G_2).$$

Quindi

$$\lambda(G_1) = \lambda(G_2).$$

Allora per ogni inviluppo misurabile $G$ di $E$ si ha

$$\lambda(G) = \lambda^*(E). \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.9** Sia $E \subseteq \mathbf{R}$. Un insieme $F \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ si dice *nucleo misurabile* di $E$ se

(i) $F \subseteq E$;
(ii) per ogni $K \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $K \subseteq E \backslash F$ risulta $\lambda(K) = 0$.

**Proposizione 2.10** Sia $E \in \mathbf{R}$. Allora

(i) esiste un nucleo misurabile $F \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ di $E$;
(ii) per ogni nucleo misurabile $F$ di $E$ risulta

$$\lambda(F) = \lambda_*(E).$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $G \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ un inviluppo misurabile di $E$, sia $M \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ un inviluppo misurabile di $G \backslash E$. Poniamo

$$F := G \backslash M.$$

Ovviamente si ha $F \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. Poiché $G \backslash E \subseteq M$, si ha $F \subseteq E$. Poiché

$$E \backslash F = E \backslash (G \backslash M) = E \cap \mathcal{C}(G \cap \mathcal{C}M) = E \cap M,$$

$$M \backslash (G \backslash E) = M \cap \mathcal{C}(G \cap \mathcal{C}E) = (M \cap E) \cup (M \backslash G),$$

si ha

$$E \backslash F \subseteq M \backslash (G \backslash E).$$

Sia $K \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $K \subseteq M \backslash (G \backslash E)$. Allora

$$K \subseteq M \backslash (G \backslash E).$$

Allora, poiché $M$ è inviluppo misurabile di $G \backslash E$, si ha

$$\lambda(K) = 0.$$

Quindi $M$ è nucleo misurabile di $E$.
$(ii)$ Sia $F$ un nucleo misurabile di $E$. Poiché $F \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e $F \subseteq E$ si ha

$$\lambda(F) \leq \lambda_*(E).$$

Supponiamo per assurdo

$$\lambda(F) < \lambda_*(E).$$

Allora esiste $F_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ con $F_1 \subseteq E$ tale che

$$\lambda(F) < \lambda(F_1).$$

Poichè $F_1 \backslash F \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e $F_1 \backslash F \subseteq E \backslash F$.si ha

$$\lambda(F_1 \backslash F) = 0.$$

Allora essendo

$$F_1 = (F_1 \cap F) \cup (F_1 \backslash F), \quad (F_1 \cap F) \cap (F_1 \backslash F) = \emptyset$$

si ha

$$\lambda(F_1) = \lambda(F_1 \cap F) \leq \lambda(F) < \lambda(F_1)$$

da cui l'assurdo. Quindi

$$\lambda(F) = \lambda_*(E). \quad \blacksquare$$

**Corollario 2.11** Sia $\{E_n\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$ una successione disgiunta. Allora

$$\lambda_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(E_n).$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $G_n$ un nucleo misurabile di $E_n$. Allora per la proposizione precedente per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\lambda(E_n) = \lambda_*(G_n).$$

Inoltre $\{G_n\}$ è una successione disgiunta. Poniamo

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Poiché $G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ per la monotonia di $\lambda_*$ si ha

$$\lambda_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \lambda_*(G).$$

Inoltre poiché $G \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ si ha

$$\lambda_*(G) = \lambda(G).$$

Per la $\sigma$-additività di $\mu$ si ha

$$\lambda(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(E_n).$$

Allora

$$\lambda_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(E_n). \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.12**

(i) Sia $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Allora

$$\lambda_*(E) = \lambda^*(E) = \lambda(E).$$

(ii) Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ tale che

$$\lambda_*(E) = \lambda^*(E) < \infty.$$

Allora

$$E \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Poiché $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ si ha

$$\lambda_*(E) = \lambda(E), \quad \lambda^*(E) = \lambda(E).$$

$(ii)$ Sia $G$ un inviluppo misurabile, $F$ un nucleo misurabile di $E$. Allora si ha

$$\lambda(G) = \lambda^*(E), \quad \lambda(F) = \lambda_*(E).$$

Quindi si ha

$$\lambda(G \backslash F) = \lambda(G) - \lambda(F) = \lambda^*(E) - \lambda_*(E) = 0.$$

Sia $Z \subseteq \mathbf{R}$ arbitrario. Mostriamo che

$$\lambda^*(Z \cap F) \geq \lambda^*(Z \cap G).$$

Poiché

$$G = F \cup (G \backslash F),$$

si ha

$$Z \cap G = (Z \cap F) \cup (Z \cap (G \backslash F)).$$

Allora, per la subadditività di $\lambda^*$ si ha

$$\lambda^*(Z \cap G) \leq \lambda^*(Z \cap F) + \lambda^*(Z \cap (G \backslash F)).$$

Poiché

$$Z \cap (G \backslash F) \subseteq G \backslash F,$$

per la monotonia di $\lambda^*$ si ha

$$\lambda^*(Z \cap (G \backslash F)) \leq \lambda^*(G \backslash F) = 0,$$

cioè

$$\lambda^*(Z \cap (G \backslash F)) = 0.$$

Quindi

$$\lambda^*(Z \cap G) \leq \lambda^*(Z \cap F).$$

Poiché $F$ è misurabile, si ha

$$\begin{aligned} \lambda^*(Z) &= \lambda^*(Z \cap F) + \lambda^*(Z \cap \complement F) \geq \\ &\geq \lambda^*(Z \cap G) + \lambda^*(Z \cap \complement F). \end{aligned}$$

Poiché

$$G \supseteq E, \quad \complement F \supseteq \complement E,$$

per la monotonia di $\lambda^*$ si ha

$$\begin{aligned} \lambda^*(Z) &\geq \lambda^*(Z \cap G) + \lambda^*(Z \cap \complement F) \geq \\ &\geq \lambda^*(Z \cap E) + \lambda^*(Z \cap \complement E). \end{aligned}$$

Quindi $E$ è misurabile. $\blacksquare$

**Definizione 2.13**
Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ limitato. La *misura esterna secondo Peano-Jordan* di $E$ è la quantità

$$\text{mis}_e(E) := \inf\{\lambda_0(G) \mid E \subseteq \overline{G},\ G \in \mathcal{I}\}.$$

La *misura interna secondo Peano-Jordan* di $E$ è la quantità

$$\text{mis}_i(E) := \sup\{\lambda_0(F) \mid \overline{F} \subseteq E,\ F \in \mathcal{I}\}.$$

**Definizione 2.14** Un insieme $E \subseteq \mathbf{R}$ limitato si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se risulta

$$\text{mis}_i(E) = \text{mis}_e(E).$$

In tal caso si definisce *misura secondo Peano-Jordan* di $E$ la quantità

$$\text{mis}(E) := \text{mis}_i(E) = \text{mis}_e(E).$$

**Definizione 2.15** Un insieme $E \subseteq \mathbf{R}$ non limitato si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se per ogni $n \in \mathbf{Z}$ l'insieme

$$E \cap [n, n+1]$$

è misurabile secondo Peano-Jordan.
In tal caso si definisce *misura secondo Peano-Jordan* di $E$ la quantità

$$\text{mis}(E) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \text{mis}(E \cap [n, n+1]).$$

Denotiamo con $\mathcal{A}_{PJ}$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan.

**Teorema 2.16** Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ misurabile secondo Peano-Jordan. Allora $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e risulta
$$\lambda(E) = \text{mis}(E).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo $E$ limitato. Ricordiamo che
$$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(G) \mid E \subseteq G,\ G \in \mathcal{L}(\mathbf{R})\},$$
$$\lambda_*(E) := \sup\{\lambda(F) \mid F \subseteq E,\ F \in \mathcal{L}(\mathbf{R})\},$$
$$\text{mis}_e(E) := \inf\left\{\lambda_0(G) \mid E \subseteq \overline{G},\ G \in \mathcal{I}\right\},$$
$$\text{mis}_i(E) := \sup\left\{\lambda_0(F) \mid \overline{F} \subseteq E,\ F \in \mathcal{I}\right\}.$$
Poiché $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e risulta $\lambda|_{\mathcal{I}} = \lambda_0$ si ha
$$\lambda^*(E) \leq \text{mis}_e(E), \quad \text{mis}_i(E) \leq \lambda_*(E).$$
Poiché $E$ è misurabile secondo Peano Jordan si ha
$$\text{mis}(E) = \text{mis}_i(E) = \text{mis}_e(E) < \infty.$$
Allora, poiché $\lambda_*(E) \leq \lambda^*(E)$ si ha
$$\text{mis}(E) = \text{mis}_i(E) \leq \lambda_*(E) \leq \lambda^*(E) \leq \text{mis}_e(E) = \text{mis}(E) < \infty.$$
Quindi
$$\lambda_*(E) = \lambda^*(E).$$
Allora per il teorema precedente si ha
$$E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$$
e risulta
$$\lambda(E) = \lambda_*(E) = \lambda^*(E) = \text{mis}(E).$$
L'estensione ad insiemi non limitati è immediata. ■

**Osservazione 2.17** Esistono insiemi misurabili secondo Lebesgue ma non secondo Peano-Jordan, come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 2.18** Sia $E = \mathbf{Q} \cap [0,1]$. Poiché $E$ è numerabile, $E$ è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura di Lebesgue nulla.
D'altra parte, poichè $E$ è privo di punti interni si ha
$$\text{mis}_i(E) = 0.$$
Poiché per ogni $G \in \mathcal{I}$ tale che $E \subseteq \overline{G}$ risulta
$$\lambda_0(G) \geq 1,$$
si ha
$$\text{mis}_e(E) = 1.$$
Quindi $E$ non è misurabile secondo Peano-Jordan.

**Osservazione 2.19** Dalla definizione di $\text{mis}_i(E)$ segue che
$$\text{mis}_i(E) > 0 \quad \text{se e solo se} \quad \overset{0}{E} \neq \emptyset.$$
In particolare un insieme misurabile secondo Peano-Jordan ha misura positiva se e solo se possiede punti interni. Lo stesso non vale per la misura di Lebesgue. Esistono infatti insiemi misurabili secondo Lebesgue e di misura positiva, ma privi di punti interni, come vedremo nel prossimo paragrafo.

**Proposizione 2.20** La famiglia $\mathcal{A}_{PJ}$ degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan è un'algebra.

*Dimostrazione.* Per ogni $E \subseteq \mathbf{R}$ si ha
$$E \in \mathcal{A}_{PJ} \quad \text{se e solo se} \quad \text{mis}_e(\partial E) = 0.$$
Poiché per ogni $E \subseteq \mathbf{R}$ si ha
$$\partial(\mathcal{C}E) = \partial E$$
e per ogni $E, F \subseteq \mathbf{R}$ si ha
$$\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F,$$
si ha la tesi. ■

**Osservazione 2.21** La famiglia $\mathcal{A}_{PJ}$ non è una $\sigma$-algebra. Infatti ogni insieme costituito da un punto è misurabile secondo Peano-Jordan, mentre l'insieme $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ è numerabile ma non misurabile secondo Peano-Jordan.

## 3.3 Insiemi di Borel e insiemi di Lebesgue

**Osservazione 3.1** Valgono le seguenti inclusioni
$$\tau(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}).$$
Abbiamo già visto che l'inclusione
$$\tau(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{R})$$
è stretta. In questo paragrafo mostreremo che anche le due inclusioni
$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R}), \quad \mathcal{L}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$$
sono strette.

**Definizione 3.2** L'*insieme ternario di Cantor* o *insieme di Cantor* è l'insieme $K$ definito per induzione nel seguente modo.
Il primo passo consiste nell'eliminare dall'intervallo chiuso $J_{0,1} := [0,1]$ l'intervallo aperto $I_{0,1} := (1/3, 2/3)$.
Dopo il passo $n$-esimo restano $2^n$ intervalli chiusi $J_{n,k}$ di lunghezza
$$\lambda(J_{n,k}) = 1/3^n.$$
Il passo $(n+1)$-esimo consiste nell'eliminare da ogni intervallo $J_{n,k}$ un intervallo aperto $I_{n,k}$ con lo stesso centro e lunghezza
$$\lambda(I_{n,k}) = 1/3^{n+1}.$$
Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo
$$K_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}.$$
L'insieme di Cantor è l'insieme
$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

**Proposizione 3.3** L'insieme di Cantor ha misura di Lebesgue nulla.

*Dimostrazione.* Si ha
$$[0,1] \setminus K = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}.$$
Poiché gli intervalli $I_{n,k}$ sono sono disgiunti, si ha
$$\lambda([0,1] \setminus K) = \lambda\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$
Quindi
$$\lambda(K) = 1 - \lambda([0,1] \setminus K) = 0. \ ■$$

**Teorema 3.4** L'insieme di Cantor coincide con l'insieme degli $x \in [0,1]$ aventi sviluppo ternario

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

con $\{a_k\} \in \{0,2\}^{\mathbf{N}}$.

*Dimostrazione.* L'intervallo $I_{0,1} = (1/3, 2/3)$ è costituito da punti aventi sviluppo ternario con primo coefficiente $a_1 = 1$. Gli estremi di tale intervallo ammettono due distinti sviluppi ternari:

$$1/3 = 0,1\overline{0} = 0,0\overline{2}, \quad 2/3 = 0,2\overline{0} = 0,1\overline{2}.$$

Se si scelgono gli sviluppi

$$1/3 = 0,0\overline{2}, \quad 2/3 = 0,2\overline{0},$$

l'insieme $K_1$ risulta costituito da punti aventi sviluppo ternario con primo coefficiente

$$a_1 \in \{0,2\}.$$

Iterando l'argomento si ha la tesi. ■

**Corollario 3.5** L'insieme di Cantor coincide con l'insieme degli $x \in [0,1]$ aventi sviluppo ternario

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}$$

con $\{\varepsilon_k\} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$.

**Osservazione 3.6** L'insieme di Cantor è unione disgiunta di 3 insiemi

$$K = K^{(1)} \cup K^{(2)} \cup K^{(3)},$$

dove

$$K^{(1)} := \{x \in K \mid \varepsilon_k = 0 \text{ definitivamente}\},$$

$$K^{(2)} := \{x \in K \mid \varepsilon_k = 1 \text{ definitivamente}\},$$

$$K^{(3)} := \{x \in K \mid \varepsilon_k = 0 \text{ per infiniti } k,\ \varepsilon_k = 1 \text{ per infiniti } k\}.$$

Inoltre si ha

$$K^{(1)} = \{\text{estremi sinistri degli intervalli } J_{n,k}\},$$

$$K^{(2)} = \{\text{estremi destri degli intervalli } J_{n,k}\}.$$

**Corollario 3.7** L'insieme di Cantor ha la potenza del continuo.

*Dimostrazione.* Per il corollario precedente esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme di Cantor e l'insieme $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Quindi

$$|K| = \left|\{0,1\}^{\mathbf{N}}\right| = |\mathcal{P}(\mathbf{N})| = |\mathbf{R}|. \quad ■$$

**Osservazione 3.8** L'insieme di Cantor è un esempio di sottoinsieme di $\mathbf{R}$ non numerabile di misura nulla.

**Proposizione 3.9** La $\sigma$-algebra $\mathcal{L}(\mathbf{R})$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

*Dimostrazione.* Poiché

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$$

si ha

$$|\mathcal{L}(\mathbf{R})| \leq |\mathcal{P}(\mathbf{R})|.$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza opposta

$$|\mathcal{P}(\mathbf{R})| \leq |\mathcal{L}(\mathbf{R})|.$$

Poiché l'insieme $K$ ha misura nulla e lo spazio $(\mathbf{R}, \mathcal{L}(\mathbf{R}), \lambda)$ è completo, ogni sottoinsieme di $K$ è misurabile secondo Lebesgue, cioè

$$\mathcal{P}(K) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Quindi

$$|\mathcal{P}(K)| \leq |\mathcal{L}(\mathbf{R})|.$$

Dal corollario precedente segue

$$|\mathcal{P}(K)| = \left|\{0,1\}^K\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbf{R}}\right| = |\mathcal{P}(\mathbf{R})|.$$

Allora

$$|\mathcal{P}(\mathbf{R})| \leq |\mathcal{L}(\mathbf{R})|. \quad ■$$

**Teorema 3.10** L'inclusione

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{R})$$

è stretta, cioè esistono sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ misurabili secondo Lebesgue ma non secondo Borel.

*Dimostrazione.* La $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ha la potenza del continuo (non lo dimostriamo). Quindi, per la proposizione precedente si ha

$$|\mathcal{B}(\mathbf{R})| = |\mathbf{R}| < |\mathcal{P}(\mathbf{R})| = |\mathcal{L}(\mathbf{R})|.$$

Allora

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) \neq \mathcal{L}(\mathbf{R}). \quad ■$$

**Proposizione 3.11**

(i) Il complementare $[0,1] \setminus K$ dell'insieme di Cantor è denso in $[0,1]$.

(ii) L'insieme di Cantor coincide con l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

*Dimostrazione.* $(i)$ Per ogni $n \in \mathbf{N}$ l'insieme $K_n$ non contiene intervalli di lunghezza maggiore di $1/3^n$. Quindi l'insieme $K$ non contiene intervalli, cioè per ogni $x, y \in K$ esiste $z \in [0,1] \setminus K$ tale che $x < z < y$. Allora $[0,1] \setminus K$ è denso in $[0,1]$.
$(ii)$ Poiché $K$ è chiuso, contiene l'insieme dei suoi punti di accumulazione.
Proviamo che $K$ è contenuto nell'insieme dei suoi punti di accumulazione.
Sia $x \in K$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tale che $x \in J_{n,k}$.
Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario, sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $1/3^n < \varepsilon$ e sia $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tale che $x \in J_{n,k}$. Allora si ha

$$x \in J_{n,k} \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Inoltre entrambi gli estremi dell'intervallo chiuso $J_{n,k}$ appartengono a $K$. Quindi ogni intorno di $x$ contiene punti di $K$ distinti da $x$, cioè $x$ è punto di accumulazione di $K$. ■

**Definizione 3.12** Sia $\alpha \in (0,1)$. L'*insieme di Cantor generalizzato* di ordine $\alpha$ è l'insieme $K_\alpha$ definito come l'insieme di Cantor eliminando al passo $(n+1)$-simo $2^n$ intervalli aperti di lunghezza $\alpha/3^{n+1}$ anziché $1/3^{n+1}$.

**Proposizione 3.13** Sia $\alpha \in (0,1)$. L'insieme di Cantor generalizzato di ordine $\alpha$ ha misura

$$\lambda(K_\alpha) = 1 - \alpha.$$

*Dimostrazione.* Analogamente a quanto visto per $K$ si ha

$$\lambda([0,1] \setminus K_\alpha) = \lambda\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{\alpha}{3^{n+1}} = \frac{\alpha}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \alpha.$$

Quindi

$$\lambda(K_\alpha) = 1 - \lambda([0,1] \setminus K_\alpha) = 1 - \alpha. \quad ■$$

**Osservazione 3.14** L'insieme di Cantor generalizzato è un esempio di sottoinsieme di misura di Lebesgue positiva privo di punti interni.

**Definizione 3.15** Siano $x, y \in [0,1)$. Poniamo

$$x \dot{+} y = \begin{cases} x+y & \text{se } x+y<1, \\ x+y-1 & \text{se } x+y \geq 1. \end{cases}$$

Siano $E \subseteq [0,1)$, $y \in [0,1)$. Poniamo

$$E \dot{+} y := \left\{ x \dot{+} y \mid x \in E \right\}.$$

**Definizione 3.16** Siano $E \subseteq \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. Poniamo

$$E + y := \{x + y \mid x \in E\}, \quad E - y := \{x - y \mid x \in E\}.$$

**Osservazione 3.17** Siano $E \subseteq [0,1)$, $y \in [0,1)$. Poniamo

$$E_1 := (E+y) \cap [0,1), \quad E_2 := (E+y) \setminus [0,1).$$

Allora si ha

$$E + y = E_1 \cup E_2, \quad \text{con} \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

e

$$E \dot{+} y = E_1 \cup (E_2 - 1), \quad \text{con} \quad E_1 \cap (E_2 - 1) = \emptyset.$$

Inoltre poiché $E \subseteq [0,1)$ si ha $E + y \subseteq [y, y+1)$. Quindi

$$E_1 = \left(E \dot{+} y\right) \cap [y,1), \quad E_2 - 1 = \left(E \dot{+} y\right) \cap [0,y)$$

**Lemma 3.18** Siano $E \subseteq [0,1)$, $y \in [0,1)$. Allora

(i) $\lambda^* \left(E \dot{+} y\right) = \lambda^*(E)$;

(ii) $E \dot{+} y \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ se e solo se $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Tenendo conto dell'additività e dell'invarianza per traslazioni di $\lambda^*$ si ha

$$\begin{aligned} \lambda^*\left(E \dot{+} y\right) &= \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2 - 1) = \\ &= \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) = \\ &= \lambda^*(E+y) = \lambda^*(E). \end{aligned}$$

$(ii)$ Sia $E \dot{+} y \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Allora

$$E_1 = \left(E \dot{+} y\right) \cap [y,1) \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$$

e

$$E_2 - 1 = \left(E \dot{+} y\right) \cap [0,y) \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$$

Da quest'ultima segue

$$E_2 = (E_2 - 1) + 1 \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Quindi

$$E + y = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{R}),$$

da cui segue

$$E = (E+y) - y \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Sia $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Allora $E + y \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Quindi

$$E_1 = (E+y) \cap [0,1) \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$$

e

$$E_2 = (E+y) \setminus [0,1) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Da quest'ultima segue

$$E_2 - 1 \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Allora

$$E \dot{+} y = E_1 \cup (E_2 - 1) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}). \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.19** L'inclusione

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$$

è stretta, cioè esistono sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ non misurabili secondo Lebesgue.

*Dimostrazione.* Definiamo la relazione $\sim$ sull'insieme $[0,1)$ nel seguente modo. Per ogni $x, y \in [0,1)$ poniamo

$$x \sim y \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad x - y \in \mathbf{Q}.$$

Evidentemente $\sim$ è una relazione di equivalenza. Quindi se per ogni $\alpha \in [0,1)$ poniamo

$$E_\alpha := \{y \in [0,1) \mid y - \alpha \in \mathbf{Q}\},$$

si ha

$$[0,1) = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} E_\alpha,$$

dove l'unione è disgiunta.
Per l'assioma della scelta esiste $V \subseteq [0,1)$ tale che per ogni $\alpha \in [0,1)$ risulta

$$V \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}.$$

Sia $\{r_n\}$ una numerazione di $\mathbf{Q} \cap [0,1)$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$V_n := V \dot{+} r_n.$$

Mostriamo che

$$[0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

Evidentemente si ha

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq [0,1).$$

Mostriamo che vale l'inclusione inversa

$$[0,1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Sia $x \in [0,1)$. Sia $\alpha \in [0,1)$ tale che $x \in E_\alpha$. Allora $x - x_\alpha \in \mathbf{Q}$.
Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che $x = x_\alpha \dot{+} r_n$. Allora $x \in V_n$. Quindi

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Mostriamo che l'unione

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

è disgiunta, ovvero che per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ con $n \neq m$ risulta

$$V_n \cap V_m = \emptyset.$$

Siano $n, m \in \mathbf{N}$ con $n \neq m$. Supponiamo per assurdo che esista $y \in V_n \cap V_m$.
Allora esistono $\alpha, \beta \in [0,1)$ tali che

$$y = x_\alpha \dot{+} r_n = x_\beta \dot{+} r_m.$$

In particolare si ha

$$x_\alpha - x_\beta \in \mathbf{Q}.$$

Quindi

$$x_\beta \in V \cap E_\alpha.$$

Ma poiché

$$V \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}$$

si ha

$$x_\alpha = x_\beta.$$

Allora

$$r_n = r_m,$$

da cui segue

$$n = m,$$

contro l'ipotesi.
Mostriamo che

$$V \notin \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Supponiamo per assurdo che

$$V \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Allora, per il lemma precedente, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $V_n \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e risulta

$$\lambda(V_n) = \lambda(V).$$

Per quanto visto in precedenza e per la $\sigma$-additività di $\lambda$ si ha

$$\lambda([0,1)) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(V_n).$$

Ma

$$\lambda([0,1)) = 1,$$

mentre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda(V) = 0, \\ \infty & \text{se } \lambda(V) > 0. \end{cases}$$

Quindi si ha l'assurdo. ■

**Lemma 3.20** Sia $V \notin \mathcal{L}(\mathbf{R})$ l'insieme definito nella dimostrazione del teorema precedente. Allora per ogni $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $E \subseteq V$ risulta $\lambda(E) = 0$.

*Dimostrazione.* Sia $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $E \subseteq V$. Sia $\{r_n\}$ una numerazione di $\mathbf{Q} \cap [0,1)$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$V_n := V \dot{+} r_n, \quad E_n := E \dot{+} r_n.$$

Poiché $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ per il lemma precedente per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$E_n \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$$

e risulta

$$\lambda(E_n) = \lambda(E).$$

Poiché $E \subseteq V$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$E_n \subseteq V_n.$$

Allora, poiché gli insiemi $V_n$ sono distinti, anche gli insiemi $E_n$ lo sono. Quindi, tenendo conto della $\sigma$-additività di $\lambda$ si ha

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda(E) = 0, \\ \infty & \text{se } \lambda(E) > 0. \end{cases}$$

D'altra parte, poiché

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [0,1),$$

si deve avere

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq 1.$$

Quindi necessariamente

$$\lambda(E) = 0. \quad ■$$

**Proposizione 3.21** Sia $E \subseteq [0,1)$ tale che $\lambda^*(E) > 0$ Allora esiste un sottoinsieme $F \subseteq E$ non misurabile secondo Lebesgue.

*Dimostrazione.* Sia $V \notin \mathcal{L}(\mathbf{R})$ l'insieme definito nella dimostrazione del teorema precedente. Sia $\{r_n\}$ una numerazione di $\mathbf{Q} \cap [0,1)$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$V_n := V \dot{+} r_n, \quad E_n := E \cap V_n.$$

Poiché

$$[0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

si ha

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Allora, per la $\sigma$-subadditività di $\lambda^*$, si ha

$$0 < \lambda^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n).$$

Supponiamo per assurdo che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti $E_n \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Allora la disuguaglianza precedente diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) > 0.$$

Quindi esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\lambda(E_n) > 0.$$

Poniamo

$$E := (1 - r_n) \dot{+} E_n.$$

Poiché $E_n \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ si ha

$$E \in \mathcal{L}(\mathbf{R}),$$

poiché $E_n \subseteq V_n$ si ha

$$E \subseteq V$$

e poiché $\lambda(E_n) > 0$ si ha

$$\lambda(E) > 0,$$

in contrasto con la proposizione precedente. Allora esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$F := E_n \notin \mathcal{L}(\mathbf{R}) \quad ■$$

**Corollario 3.22** Sia $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che $\lambda(E) > 0$. Allora esiste un sottoinsieme $F \subseteq E$ non misurabile secondo Lebesgue.

## 3.4 Covarianza

**Teorema 4.1** Siano $a, b \in \mathbf{R}$, con $a \neq 0$. Sia $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$Tx = ax + b.$$

Allora

(i) per ogni $E \subseteq \mathbf{R}$ risulta

$$\lambda^*(T(E)) = |a| \lambda^*(E);$$

(ii) per ogni $E \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$$

se e solo se

$$T(E) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Corollario 4.2** La misura di Lebesgue in $\mathbf{R}$ è invariante per traslazioni.

## 3.5 Misura di Lebesgue-Stieltjes

**Teorema 5.1** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monotona. Allora l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ è al più numerabile.

*Dimostrazione.* Sia ad esempio $f$ non decrescente. Sia

$$D := \left\{ s \in \mathbf{R} \mid f\left(s^-\right) < f\left(s^+\right) \right\}$$

l'insieme dei punti di discontinuità di $f$. Per ogni $s \in D$ poniamo

$$I(s) := \left(f\left(s^-\right), f\left(s^+\right)\right).$$

Allora per ogni $s, t \in D$, con $s \neq t$, si ha

$$I(s) \cap I(t) = \emptyset.$$

Per ogni $s \in D$ sia $r_s \in I(s) \cap \mathbf{Q}$ fissato. Definiamo l'applicazione $\varphi : D \to \mathbf{Q}$ nel seguente modo. Per ogni $s \in D$ poniamo

$$\varphi(s) = r_s.$$

Poiché gli intervalli $I(s)$ sono a due a due disgiunti, l'applicazione $\varphi$ è iniettiva. Quindi

$$|D| \leq |\mathbf{Q}|,$$

cioè la tesi. ■

**Definizione 5.2** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non decrescente continua da destra, cioè tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulti

$$f\left(x^+\right) = f(x).$$

Consideriamo la semialgebra

$$\mathcal{I}_0 := \{(a,b] \mid -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a,\infty) \mid -\infty < a < \infty\}$$

e l'algebra

$$\mathcal{I} := \mathcal{U}_0(\mathcal{I}_0).$$

Definiamo l'applicazione $\lambda_{0f} : \mathcal{I} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Poniamo

$$\lambda_{0f}(\emptyset) := 0.$$

Per ogni $a, b$, con

$$-\infty \leq a \leq b < \infty,$$

poniamo

$$\lambda_{0f}((a,b]) := f(b) - f(a).$$

Per ogni $a \in \mathbf{R}$ poniamo

$$\lambda_{0f}((a,\infty)) := f(\infty) - f(a).$$

Per ogni $E \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{I}_0$, siano $\{E_1, ..., E_n\} \subseteq \mathcal{I}_0$ disgiunti tali che

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Allora poniamo

$$\lambda_{0f}(E) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{0f}(E_k).$$

**Osservazione 5.3** L'applicazione $\lambda_{0f}$ è ben definita.

**Osservazione 5.4** Analogamente a quanto visto per $\lambda_0$, si dimostra che $\lambda_{0f}$ è una misura $\sigma$-finita sull'algebra $\mathcal{I}$.

**Definizione 5.5** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non decrescente continua da destra. Sia

$$\lambda_f^* := \lambda^{(\mathcal{I}, \lambda_{0f})}$$

la misura esterna generata dalla coppia $(\mathcal{I}, \lambda_{0f})$. Sia

$$\mathcal{L}_f(\mathbf{R}) := \mathcal{L}\left(\lambda_f^*\right)$$

la $\sigma$-algebra degli insiemi $\lambda_f^*$-misurabili. La misura

$$\lambda_f := \lambda_f^*\Big|_{\mathcal{L}_f(\mathbf{R})}$$

è detta <u>*misura di Lebesgue-Stieltjes*</u> relativa alla funzione $f$.

**Osservazione 5.6** Lo spazio di misura

$$(\mathbf{R}, \mathcal{L}_f(\mathbf{R}), \lambda_f)$$

è il completamento dello spazio

$$\left(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda_f\big|_{\mathcal{B}(\mathbf{R})}\right).$$

**Osservazione 5.7** Per ogni $a, b$, con

$$-\infty \leq a \leq b < \infty,$$

si ha

$$\lambda_f((a,b]) := f(b) - f(a).$$

Per ogni $a \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lambda_f((a,\infty)) := f(\infty) - f(a).$$

**Osservazione 5.8** La misura $\lambda_f$ è $\sigma$-finita.
La misura $\lambda_f$ è finita se e solo se

$$f(-\infty) < \infty, \quad f(\infty) < \infty.$$

**Esempio 5.9** La misura di Lebesgue-Stieltjes relativa alla funzione

$$f(x) = x$$

è la misura di Lebesgue stessa.

**Esempio 5.10** La misura di Lebesgue-Stieltjes relativa alla funzione di Heaviside

$$H = \chi_{[0,\infty)}$$

è la misura di Dirac concentrata in 0.

**Teorema 5.11** Sia $\mu$ una misura su $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ finita sulla famiglia dei sottoinsiemi compatti. Allora esiste una funzione $f_\mu : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ non decrescente continua da destra tale che per ogni $a, b$, con

$$-\infty < a < b < \infty,$$

risulta

$$\mu((a,b]) = f(b) - f(a).$$

*Dimostrazione.* Sia $a \in \mathbf{R}$. Definiamo $f_\mu : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$f_\mu(x) := \begin{cases} \mu((a,x]) & \text{se } x > a, \\ 0 & \text{se } x = a, \\ -\mu((x,a]) & \text{se } x < a. \end{cases}$$

Allora per ogni $a, b$, con

$$-\infty < a < b < \infty,$$

risulta

$$\mu((a,b]) = f(b) - f(a).$$

Si verifica facilmente che $f$ è non decrescente. Mostriamo che $f$ è continua da destra. Sia $x > a$ arbitrario. Poiché

$$(a,x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, x + \frac{1}{n}\right],$$

si ha

$$\begin{aligned} f_\mu(x) &= \mu((a,x]) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(a, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} f_\mu\left(x + \frac{1}{n}\right) = f\left(x^+\right). \end{aligned}$$

Se $x \leq a$ la dimostrazione è analoga. ■

## 3.6 Misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$

**Definizione 6.1** Poniamo

$$\mathcal{I}_{0n} := \left\{ \prod_{k=1}^{n} I_k \mid \{I_1, ..., I_n\} \subseteq \mathcal{I}_0 \right\}.$$

Poniamo

$$\mathcal{I}_n := \mathcal{U}(\mathcal{I}_{0n}).$$

**Osservazione 6.2** La famiglia $\mathcal{I}_{0n}$ è una semialgebra. Quindi la famiglia $\mathcal{I}_n$ è un'algebra e risulta

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{A}_0(\mathcal{I}_{0n}).$$

**Definizione 6.3** Definiamo l'applicazione $\lambda_{0n} : \mathcal{I} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Poniamo

$$\lambda_{0n}(\emptyset) := 0.$$

Per ogni $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbf{R}^n$ tali che per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ risulti

$$a_k \leq b_k,$$

poniamo

$$\lambda_{0n}\left(\prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k]\right) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Per ogni $I \in \mathcal{I}_{0n}$ non limitato, poniamo

$$\lambda_{0n}(I) := \infty.$$

Per ogni $E \in \mathcal{I}_n \backslash \mathcal{I}_{0n}$, siano $\{E_1, ..., E_m\} \subseteq \mathcal{I}_0$ disgiunti tali che

$$E = \bigcup_{k=1}^{m} E_k.$$

Allora poniamo

$$\lambda_{0n}(E) := \sum_{k=1}^{m} \lambda_{0n}(E_k).$$

**Osservazione 6.4** Le considerazioni ulteriori valgono come nel caso $n = 1$ e portano alla definizione di misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$.

**Notazione 6.5** La $\sigma$-algebra di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ si denota con $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. La misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ si denota con $\lambda_n$.

**Teorema 6.6** Sia $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ non singolare. Sia $b \in \mathbf{R}^n$. Sia $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione definita nel modo seguente. Per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$Tx := Ax + b.$$

Allora

(i) per ogni $E \subseteq \mathbf{R}^n$ risulta

$$\lambda^*(T(E)) = |\det A| \, \lambda^*(E);$$

(ii) per ogni $E \subseteq \mathbf{R}^n$ si ha

$$T(E) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$$

se e solo se

$$E \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n).$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

# Capitolo 4
# Funzioni Misurabili

## 4.1 Definizione e prime proprietà

**Definizione 1.1** Siano $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ spazi misurabili. Una funzione $f : X \longrightarrow X'$ si dice *$(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-misurabile* o semplicemente *misurabile* se per ogni $E \in \mathcal{A}'$ risulta

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

**Osservazione 1.2** Siano $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ spazi misurabili. Sia $f : X \longrightarrow X'$ costante. Allora $f$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-misurabile.

**Osservazione 1.3** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Sia $E \subseteq X$. Allora la funzione caratteristica

$$\chi_E : X \to \mathbf{R}$$

è $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-misurabile se e solo se

$$E \in \mathcal{A}.$$

**Proposizione 1.4** Siano $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$, $(X'', \mathcal{A}'')$ spazi misurabili. Siano $f : X \longrightarrow X'$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-misurabile, $g : X' \longrightarrow X''$ $(\mathcal{A}', \mathcal{A}'')$-misurabile. Allora la funzione composta $g \circ f : X \longrightarrow X''$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-misurabile.

*Dimostrazione.* Sia $E \in \mathcal{A}''$ arbitrario. Poiché $g$ è misurabile si ha

$$g^{-1}(E) \in \mathcal{A}'$$

e poiché $f$ è misurabile si ha

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}\left[g^{-1}(E)\right] \in \mathcal{A}.$$

Quindi $g \circ f$ è misurabile. ∎

**Teorema 1.5** Siano $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ due spazi misurabili. Sia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{P}(X')$ una famiglia tale che

$$\sigma_0(\mathcal{C}') = \mathcal{A}'.$$

Allora una funzione $f : X \longrightarrow X'$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-misurabile se e solo se per ogni $E \in \mathcal{C}'$ risulta

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

*Dimostrazione.* Sia $f$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-misurabile. Allora per ogni $E \in \mathcal{A}'$ risulta

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

In particolare per ogni $E \in \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{A}'$ risulta

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

Viceversa supponiamo che per ogni $E \in \mathcal{C}'$ risulti

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

Poniamo

$$\Sigma := \left\{E \subseteq X' \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\right\}.$$

Evidentemente si ha

$$\mathcal{C}' \subseteq \Sigma$$

Mostriamo che $\Sigma$ è una $\sigma$-algebra.
$(i)$ Poiché $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ si ha

$$\emptyset \in \Sigma.$$

$(ii)$ Sia $E \in \Sigma$. Allora

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}.$$

Quindi

$$f^{-1}(\mathcal{C}E) = \mathcal{C}f^{-1}(E) \in \mathcal{A},$$

cioè

$$\mathcal{C}E \in \Sigma.$$

$(iii)$ Sia $\{E_k\} \subseteq \Sigma$. Allora

$$\left\{f^{-1}(E_k)\right\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Quindi

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(E_k) \in \mathcal{A},$$

cioè

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma.$$

Poiché $\Sigma$ è una $\sigma$-algebra contenente $\mathcal{C}'$ si ha

$$\mathcal{A}' = \sigma_0(\mathcal{C}') \subseteq \Sigma.$$

Quindi per ogni $E \in \mathcal{A}'$ risulta

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A}. \quad ∎$$

**Corollario 1.6** Siano $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ due spazi misurabili. Siano $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{P}(X')$. Sia $f : X \to X'$ tale che per ogni $E \in \mathcal{C}'$ risulti

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{C}.$$

Allora $f$ è $(\sigma_0(\mathcal{C}), \sigma_0(\mathcal{C}'))$-misurabile.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\mathcal{A} := \sigma_0(\mathcal{C}), \quad \mathcal{A}' := \sigma_0(\mathcal{C}')$$

Per ogni $E \in \mathcal{C}'$ si ha

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}.$$

Quindi la tesi segue dal teorema precedente. ∎

**Definizione 1.7** Siano $(X, \mathcal{G}), (X', \mathcal{G}')$ spazi topologici. Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ le rispettive $\sigma$-algebre di Borel. Una funzione $f : X \longrightarrow X'$ si dice *misurabile secondo Borel* o *funzione di Borel* se è $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-misurabile.

**Definizione 1.8** Siano $(X, \mathcal{G}), (X', \mathcal{G}')$ spazi topologici. Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ le rispettive $\sigma$-algebre di Borel. Sia $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{B}}$ la $\sigma$-algebra di Lebesgue su $X$ ottenuta per completamento di $\mathcal{B}$ rispetto ad una misura $\sigma$-finita. Una funzione $f : X \longrightarrow X'$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* o *funzione di Lebesgue* se è $(\mathcal{L}, \mathcal{B}')$-misurabile.

**Osservazione 1.9** Siano $(X, \mathcal{G}), (X', \mathcal{G}')$ spazi topologici. Sia $f : X \longrightarrow X'$ misurabile secondo Borel. Allora $f$ è misurabile secondo Lebesgue.

**Proposizione 1.10** Siano $(X, \mathcal{G}), (X', \mathcal{G}')$ spazi topologici. Sia $f : X \longrightarrow X'$ continua. Allora $f$ è misurabile secondo Borel.

*Dimostrazione.* Poiché $f$ è continua, per ogni $E \in \mathcal{G}'$ risulta

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{G}.$$

Allora, poiché

$$\mathcal{B} = \sigma_0(\mathcal{G}), \quad \mathcal{B}' = \sigma_0(\mathcal{G}'),$$

per il corollario precedente $f$ è $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-misurabile, ovvero $f$ è misurabile secondo Borel. ■

**Osservazione 1.11** Valgono le seguenti inclusioni:

$$\{f \text{ continue}\} \subseteq \{f \text{ di Borel}\} \subseteq \{f \text{ di Lebesgue}\}.$$

Inoltre entrambe le inclusioni sono strette.

**Osservazione 1.12** Siano $(X, \mathcal{G})$, $(X', \mathcal{G}')$, $(X'', \mathcal{G}'')$ spazi topologici. Siano $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ applicazioni continue, di Borel o di Lebesgue. Allora la composizione $g \circ f : X \to X''$ è dello stesso tipo della $f$.

**Lemma 1.13** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Sia $F \subseteq X$. Allora l'inclusione

$$j_F : F \to X$$

è $(\mathcal{A} \cap F, \mathcal{A})$-misurabile.

*Dimostrazione.* Sia $E \in \mathcal{A}$ arbitrario. Allora

$$j_F^{-1}(E) = E \cap F \in \mathcal{A} \cap F. \quad ■$$

**Proposizione 1.14** Siano $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ due spazi misurabili. Sia $f : X \to X'$ una funzione $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-misurabile. Sia $F \subseteq X$. Allora la restrizione

$$f|_F : F \to X'$$

è $(\mathcal{A} \cap F, \mathcal{A}')$-misurabile.

*Dimostrazione.* Poiché

$$f|_F = f \circ j_F,$$

la tesi segue dal lemma precedente. ■

**Teorema 1.15** Siano $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ due spazi misurabili. Sia $f : X \to X'$. Sia $\{F_k\} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-misurabile;

(ii) per ogni $k \in \mathbf{N}$ la restrizione

$$f|_{F_k} : F_k \to X'$$

è $(\mathcal{A} \cap F_k, \mathcal{A}')$-misurabile.

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue dalla proposizione precedente.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $E \in \mathcal{A}'$ arbitrario. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$f|_{F_k}^{-1}(E) \in \mathcal{A} \cap F_k,$$

ovvero

$$f^{-1}(E) \cap F_k \in \mathcal{A} \cap F_k.$$

Inoltre per ogni $k \in \mathbf{N}$, poiché $F_k \in \mathcal{A}$, si ha

$$\mathcal{A} \cap F_k \subseteq \mathcal{A}.$$

Quindi per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$f^{-1}(E) \cap F_k \in \mathcal{A}.$$

Allora si ha

$$f^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cap \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left( f^{-1}(E) \cap F_k \right) \in \mathcal{A}.$$

Per l'arbitrarietà di $E \in \mathcal{A}'$ si ha la tesi. ■

## 4.2 Funzioni a valori in $\overline{\mathbf{R}}$

**Definizione 2.1** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Una funzione $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ si dice <u>*$\mathcal{A}$-misurabile*</u> o semplicemente <u>*misurabile*</u> se è $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$-misurabile.
Denotiamo con $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili, con $\mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ l'insieme della funzioni $\mathcal{A}$-misurabili non negative.

**Notazione 2.2** Sia $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ poniamo

$$\{f \geq \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty]),$$

$$\{f > \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty]),$$

$$\{f \leq \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha]),$$

$$\{f < \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) < \alpha\} = f^{-1}([-\infty, \alpha)).$$

**Teorema 2.3** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è $\mathcal{A}$-misurabile;

(ii) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta

$$\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A};$$

(iii) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta

$$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A};$$

(iv) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta

$$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A};$$

(v) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta

$$\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Poiché

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}) = \sigma_0(\{[\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbf{R}\}),$$

la funzione $f$ è $\mathcal{A}$-misurabile se e solo se per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha

$$f^{-1}([\alpha, \infty]) = \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(i) \Leftrightarrow (iv)$, $(i) \Leftrightarrow (v)$ Analoghe. ■

**Osservazione 2.4** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è $\mathcal{A}$-misurabile;

(ii) per ogni $\alpha \in \mathbf{Q}$ risulta

$$\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A};$$

(iii) per ogni $\alpha \in \mathbf{Q}$ risulta

$$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A};$$

(iv) per ogni $\alpha \in \mathbf{Q}$ risulta

$$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A};$$

(v) per ogni $\alpha \in \mathbf{Q}$ risulta

$$\{f < \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

**Notazione 2.5** Siano $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Poniamo

$$\{f = g\} := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\},$$

$$\{f \le g\} := \{x \in X \mid f(x) \le g(x)\},$$

$$\{f < g\} := \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}.$$

**Teorema 2.6** Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora:

(i) $\{f < g\} \in \mathcal{A}$;
(ii) $\{f \le g\} \in \mathcal{A}$;
(iii) $\{f = g\} \in \mathcal{A}$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Si ha

$$\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (\{f < r\} \cap \{r < g\}).$$

Per l'osservazione precedente per ogni $r \in \mathbf{Q}$ si ha

$$\{f < r\}, \{r < g\} \in \mathcal{A}.$$

Quindi

$$\{f < g\} \in \mathcal{A}.$$

$(ii)$ Si ha

$$\{f \le g\} = \complement \{g < f\} \in \mathcal{A}.$$

$(iii)$ Si ha

$$\{f = g\} = \{f \le g\} \cap \{g \le f\} \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.7** Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora:

$$\sup f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}), \quad \inf f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

*Dimostrazione.* Sia $\alpha \in \mathbf{R}$ arbitrario. Si ha

$$\{\sup f_n > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > \alpha\}.$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\{f_n > \alpha\} \in \mathcal{A},$$

si ha

$$\{\sup f_n > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Allora per l'arbitrarietà di $\alpha$ si ha

$$\sup f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

Poiché

$$\inf f_n = -\sup(-f_n),$$

si ha

$$\inf f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

**Corollario 2.8** Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora

$$\max\{f, g\} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}), \quad \min\{f, g\} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

**Teorema 2.9** Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora

$$\underline{\lim} f_n, \ \overline{\lim} f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

*Dimostrazione.* Poiché

$$\underline{\lim} f_n := \sup_{k \in \mathbf{N}} \left( \inf_{n \ge k} f_n \right), \quad \overline{\lim} f_n := \inf_{k \in \mathbf{N}} \left( \sup_{n \ge k} f_n \right),$$

l'affermazione segue dal teorema precedente. $\blacksquare$

**Teorema 2.10** Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ a valori in $\mathbf{R}$. Allora

$$f + g, \ fg \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

*Dimostrazione.* Definiamo la funzione $\varphi : X \to \mathbf{R}^2$ nel seguente modo. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$\varphi(x) := (f(x), g(x)).$$

Definiamo le funzioni $s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ poniamo

$$s(a, b) := a + b, \quad p(a, b) := ab.$$

Allora si ha

$$f + g = s \circ \varphi, \quad fg = p \circ \varphi.$$

Le funzioni $s$ e $p$ sono continue, quindi $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^2), \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-misurabili.
Mostriamo che la funzione $\varphi$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2))$-misurabile.
Poiché $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ è generata dagli aperti di $\mathbf{R}^2$ e ogni aperto di $\mathbf{R}^2$ è unione numerabile di rettangoli aperti del tipo

$$(a, b) \times (c, d)$$

basta mostrare per ogni $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ con $a < b$ e $c < d$ si ha

$$\varphi^{-1}((a, b) \times (c, d)) \in \mathcal{A}.$$

Siano per ogni $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ con $a < b$ e $c < d$. Allora

$$\varphi^{-1}((a, b) \times (c, d)) = f^{-1}((a, b)) \cap g^{-1}((c, d)).$$

Poiché $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha

$$f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}, \ g^{-1}((c, d)) \in \mathcal{A}.$$

Quindi

$$\varphi^{-1}((a, b) \times (c, d)) \in \mathcal{A}.$$

Allora le funzioni $f + g$ e $fg$ sono $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-misurabili. $\blacksquare$

**Definizione 2.11** Sia $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. La <u>parte positiva</u> di $f$ è la funzione $f_+ : X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ definita da

$$f_+ := \max\{f, 0\}.$$

La <u>parte negativa</u> di $f$ è la funzione $f_- : X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ definita da

$$f_- := \max\{-f, 0\}.$$

**Osservazione 2.12** Sia $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Allora si ha

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-.$$

**Corollario 2.13** Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora

$$f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

**Corollario 2.14**

(i) Sia $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Allora $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ se e solo se

$$f_+, f_- \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}).$$

(ii) Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora si ha

$$|f| \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}).$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora

$$f_+, f_- \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}).$$

Viceversa sia $f_+, f_- \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Allora

$$f = f_+ - f_- \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

$(ii)$ Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora

$$|f| = f_+ + f_- \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

**Osservazione 2.15** Sia $f : X \to \mathbf{R}$. Se $|f| \in \mathcal{M}_+ (X, \mathcal{A})$ non si può concludere in generale che $f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$.
Ad esempio sia $E \notin \mathcal{A}$ e sia

$$f = \chi_E - \chi_{CE}.$$

Allora

$$|f| \equiv 1 \in \mathcal{M}_+ (X, \mathcal{A}),$$

ma

$$f \notin \mathcal{M} (X, \mathcal{A}).$$

**Teorema 2.16** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura completo. Sia $f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$. Sia $g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ tale che

$$f = g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$g \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A}).$$

*Dimostrazione.* Sia

$$N := \{f \neq g\}.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$. Sia $\alpha \in \mathbf{R}$ arbitrario. Si ha

$$\begin{aligned} \{g > \alpha\} &= (\{g > \alpha\} \cap N) \cup (\{g > \alpha\} \cap CN) = \\ &= (\{g > \alpha\} \cap N) \cup (\{f > \alpha\} \cap CN). \end{aligned}$$

Poiché $f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ si ha

$$\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Poiché $N \in \mathcal{A}$ si ha

$$\{f > \alpha\} \cap CN \in \mathcal{A}.$$

Inoltre si ha

$$\{g > \alpha\} \cap N \subseteq N,$$

Allora, poiché $\mu$ è una misura completa e $N \in \mathcal{N}_\mu$, si ha

$$\{g > \alpha\} \cap N \in \mathcal{A}.$$

Quindi

$$\{g > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Per l'arbitrarietà di $\alpha$ si ha

$$g \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.17** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ una funzione definita q.o. in $X$. Sia $N \in \mathcal{N}_\mu$ l'insieme in cui $f$ non è definita. La funzione $f$ si dice <u>*$\mathcal{A}$-misurabile*</u> o semplicemente <u>*misurabile*</u> se

$$f|_{CN} \in \mathcal{M} (CN, \mathcal{A} \cap CN).$$

Denotiamo ancora con $\mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni definite q.o. in $X$ $\mathcal{A}$-misurabili e con $\mathcal{M}_+ (X, \mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni definite q.o. in $X$ $\mathcal{A}$-misurabili e non negative q.o. in $X$.

**Teorema 2.18** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura completo. Sia $f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ definita q.o. in $X$. Sia $g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ definita q.o. in $X$ tale che

$$f = g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$g \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A}).$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$N_1 := \{x \in X \mid f \text{ non è definita in } x\}, \quad N_2 := \{f \neq g\}.$$

Allora $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. Poniamo

$$N := N_1 \cup N_2.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$ e risulta

$$CN = CN_1 \cap CN_2.$$

Poiché $f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ si ha

$$f|_{CN} \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A}).$$

Allora

$$g|_{CN} = f|_{CN} \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A}),$$

quindi

$$g \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A}) \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.19** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_n\} \subseteq \overline{\mathbf{R}}^X$. Si dice che la successione <u>*converge q.o.*</u> in $X$ se

$$C\left\{x \in X \mid \text{esiste } \lim_{n \to \infty} f_n(x)\right\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

Sia $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$, si dice che $\{f_n\}$ <u>*converge*</u> ad $f$ <u>*q.o. in X*</u> se

$$C\left\{x \in X \mid \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)\right\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

**Teorema 2.20** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_n\} \subseteq \overline{\mathbf{R}}^X$ una successione convergente q.o. in $X$. Allora esiste $f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ tale che $f_n$ converge ad $f$ q.o. in $X$.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$N := C\left\{x \in X \mid \text{esiste } \lim_{n \to \infty} f_n(x)\right\}.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$. Definiamo la funzione $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n \to \infty} f_n(x) & \text{se } x \in CN \\ 0 & \text{se } x \in N. \end{cases}$$

Allora $f_n$ converge ad $f$ q.o. in $X$.
Mostriamo che $f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$.
Poiché $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ si ha

$$\{f_n|_{CN}\} \subseteq \mathcal{M} (CN, \mathcal{A} \cap CN).$$

Allora, per il teorema 2.9 si ha

$$f|_{CN} \in \mathcal{M} (CN, \mathcal{A} \cap CN).$$

D'altra parte

$$f|_N \equiv 0 \in \mathcal{M} (N, \mathcal{A} \cap N).$$

Allora per il teorema 1.15 si ha

$$f \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

**Osservazione 2.21** Il limite di una successione convergente q.o. è unico nel senso delle funzioni definite q.o., ovvero se

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f_1 \quad \text{q.o. in } X \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} f_n = f_2 \quad \text{q.o. in } X$$

allora

$$f_1 = f_2 \quad \text{q.o. in } X.$$

**Teorema 2.22** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ il suo completamento. Sia $f \in \mathcal{M} (\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$. Allora esiste $g \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ tale che

$$f = g \quad \overline{\mu}\text{-q.o. in } X.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $q \in \mathbf{Q}$ poniamo

$$F_q := \{f < q\}.$$

Poiché $f \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}\right)$ per ogni $q \in \mathbf{Q}$ si ha

$$F_q \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Per ogni $q \in \mathbf{Q}$ siano $E_q \in \mathcal{A}$, $T_q \in \mathcal{T}_\mu$ tali che

$$F_q = E_q \cup T_q.$$

Poniamo

$$T := \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} T_q.$$

Allora $T \in \mathcal{T}_\mu$. Sia $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che

$$T \subseteq N.$$

Poniamo

$$G := \complement N, \quad g := f\chi_G.$$

Evidentemente

$$g = f \quad \overline{\mu}\text{-q.o. in } X.$$

Inoltre per ogni $q \in \mathbf{Q}$ si ha

$$\begin{aligned}\{g|_G < q\} &= \{f|_G < q\} = F_q \cap G = \\ &= (E_q \cap G) \cup (T_q \cap G) = \\ &= E_q \cap G \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Quindi

$$g|_G \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

Allora

$$g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

## 4.3 Funzioni semplici

**Definizione 3.1** Una funzione $s : X \to \mathbf{R}$ si dice <u>semplice</u> se il suo codominio è un insieme finito

$$s(X) = \{c_1, ..., c_n\}.$$

**Proposizione 3.2** Sia $s : X \to \mathbf{R}$ una funzione semplice. Allora esistono e sono unici $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ distinti ed $E_1, ..., E_n \subseteq X$ disgiunti, con

$$X = \bigcup_{k=1}^n E_k,$$

tali che risulti

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$s(X) = \{c_1, ..., c_n\}.$$

Per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ poniamo

$$E_k := \{s = c_k\}.$$

Allora $E_1, ..., E_n$ sono disgiunti, si ha

$$X = \bigcup_{k=1}^n E_k,$$

e risulta

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}.$$

Siano $d_1, ..., d_m$ distinti ed $F_1, ..., F_m \subseteq X$ disgiunti, con

$$X = \bigcup_{l=1}^m F_l,$$

tali che risulti

$$s = \sum_{l=1}^m d_l \chi_{F_l}.$$

Poiché

$$\sum_{k=1}^n \chi_{E_k} = 1, \quad \sum_{l=1}^m \chi_{F_l} = 1,$$

si ha

$$s = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k \chi_{E_k} \chi_{F_l} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m d_k \chi_{E_k} \chi_{F_l},$$

da cui segue

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (c_k - d_l) \chi_{E_k \cap F_l} = 0.$$

Poichè gli insiemi $\{E_k \cap F_l\}_{k \in \{1,...,n\},\, l \in \{1,...,m\}}$ sono disgiunti e poiché risulta

$$X = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m E_k \cap F_l,$$

per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ esiste un unico $l_k \in \{1, ..., m\}$ tale che

$$c_k = d_{l_k}.$$

e per ogni $l \in \{1, ..., m\}$ esiste un unico $k_l \in \{1, ..., n\}$ tale che

$$c_{k_l} = d_l.$$

Quindi

$$n = m.$$

e per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ risulta

$$c_k = d_{l_k}$$

e

$$E_k = \{s = c_k\} = \{s = d_{l_k}\} = F_{l_k}. \quad \blacksquare$$

**Definizione 3.3** Sia $s : X \to \mathbf{R}$ una funzione semplice. Siano $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$ distinti ed $E_1, ..., E_n \subseteq X$ disgiunti, con

$$X = \bigcup_{k=1}^n E_k,$$

tali che risulti

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}.$$

La precedente espressione è detta <u>*forma canonica*</u> di $s$.

**Notazione 3.4** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Denotiamo con $\mathcal{S}(X, \mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni semplici $\mathcal{A}$-misurabili. Denotiamo con $\mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni semplici $\mathcal{A}$-misurabili non negative.

**Osservazione 3.5** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Sia $s : X \to \mathbf{R}$ una funzione semplice. Sia

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$$

la forma canonica di $s$. Allora $s \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A})$ se e solo se per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ risulta

$$E_k \in \mathcal{A}.$$

**Teorema 3.6** Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Sia $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$. Allora esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tale che

$$\lim_{n \to \infty} s_n = f.$$

Inoltre:

(i) se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, allora
$$\{s_n\} \subseteq \mathcal{S}(X, \mathcal{A});$$
(ii) se $f \geq 0$, allora $\{s_n\}$ è non decrescente e per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$0 \leq s_n \leq f.$$
(iii) se $f$ è limitata la convergenza è uniforme.

Dimostrazione. $(a)$ Supponiamo $f$ limitata e non negativa.
Sia $M > 0$ tale che per ogni $x \in X$ si ha
$$f(x) \leq M.$$
Per semplicità supponiamo $M = 1$.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Per ogni $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ poniamo
$$E_k^{(n)} := f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}.$$
Per ogni $k, l \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$, con $k \neq l$, si ha
$$E_k^{(n)} \cap E_l^{(n)} = \emptyset.$$
Inoltre si ha
$$X = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} E_k^{(n)}.$$
Se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ per ogni $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ si ha
$$E_k^{(n)} \in \mathcal{A}.$$
Definiamo la funzione semplice
$$s_n := \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_k^{(n)}}.$$
Allora se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha
$$s_n \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}).$$
Inoltre per ogni $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ e per ogni $x \in E_k^{(n)}$ si ha
$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x).$$
Quindi
$$s_n \leq f.$$
Mostriamo che $\{s_n\}$ è non decrescente.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Per ogni $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$, poiché
$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) = \\ = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right),$$
si ha
$$E_k^{(n)} = E_{2k}^{(n+1)} \cup E_{2k+1}^{(n+1)}$$
Sia $x \in X$. Sia $k \in \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$ tale che
$$x \in E_k^{(n)}.$$
Allora $x \in E_{2k}^{(n+1)}$ oppure $x \in E_{2k+1}^{(n+1)}$.
Se $x \in E_{2k}^{(n+1)}$ si ha
$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x).$$
Altrimenti se $x \in E_{2k+1}^{(n+1)}$ si ha
$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq \frac{k+1/2}{2^n} = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x).$$
Mostriamo che
$$\lim_{n\to\infty} s_n = f$$
uniformemente in $X$.

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$f - \frac{1}{2^n} \leq s_n \leq f.$$
Quindi
$$\lim_{n\to\infty} s_n = f$$
uniformemente in $X$.
$(b)$ Supponiamo $f$ non negativa.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Poniamo
$$E_I^{(n)} := \{x \in X \mid f(x) \geq n\}, \quad E_{II}^{(n)} := \{x \in X \mid f(x) < n\}.$$
Si ha
$$f|_{E_{II}^{(n)}} < n.$$
Per ogni $k \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$ poniamo
$$E_k^{(n)} := f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}.$$
Per ogni $k, l \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$, con $k \neq l$, si ha
$$E_k^{(n)} \cap E_l^{(n)} = \emptyset.$$
Inoltre si ha
$$E_{II}^{(n)} = \bigcup_{k=0}^{n2^n-1} E_k^{(n)}.$$
Se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ per ogni $k \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$ si ha
$$E_k^{(n)} \in \mathcal{A}.$$
Definiamo la funzione semplice
$$s_n := n\chi_{E_I^{(n)}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_k^{(n)}}$$
Allora se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha
$$s_n \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}).$$
Inoltre per ogni $x \in E_I^{(n)}$ si ha
$$s_n(x) = n \leq f(x)$$
e per ogni $k \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$ e per ogni $x \in E_k^{(n)}$ si ha
$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq f(x).$$
Quindi
$$s_n \leq f.$$
Mostriamo che $\{s_n\}$ è non decrescente. Sia $n \in \mathbf{N}$.
Sia $x \in X$. Allora $x \in E_I^{(n)}$ oppure $x \in E_{II}^{(n)}$.
Se $x \in E_I^{(n)}$ si ha
$$s_n(x) = n \leq s_{n+1}(x).$$
Altrimenti se $x \in E_{II}^{(n)}$ sia $k \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$ tale che
$$x \in E_k^{(n)}.$$
Per ogni $k \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$ si ha
$$E_k^{(n)} = E_{2k}^{(n+1)} \cup E_{2k+1}^{(n+1)}.$$
Allora $x \in E_{2k}^{(n+1)}$ oppure $x \in E_{2k+1}^{(n+1)}$.
Se $x \in E_{2k}^{(n+1)}$ si ha
$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x).$$
Altrimenti se $x \in E_{2k+1}^{(n+1)}$ si ha
$$s_n(x) = \frac{k}{2^n} \leq \frac{k+1/2}{2^n} = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x).$$
Sia $x \in X$ arbitrario. Mostriamo che
$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

Sia $f(x) = \infty$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha
$$f(x) > n,$$
ovvero
$$x \in E_I^{(n)},$$
quindi
$$s_n(x) = n.$$
Allora
$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} n = \infty = f(x).$$
Sia $f(x) < \infty$.
Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$, con
$$n > f(x),$$
si ha
$$x \in E_{II}^{(n)}.$$
Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$, con
$$n > f(x),$$
si ha
$$f(x) - \frac{1}{2^n} \le s_n(x) \le f(x).$$
Allora
$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$$
uniformemente in $X$.
$(c)$ Sia $f$ arbitraria. Poniamo
$$f_+ := \max\{f, 0\}, \quad f_- := \max\{-f, 0\}.$$
Allora $f_+$ e $f_-$ sono non negative e risulta
$$f = f_+ - f_-.$$
Per il punto $(b)$ esistono due successioni $\{s_n\}, \{t_n\}$ non decrescenti di funzioni semplici tali che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti
$$0 \le s_n \le f_+, \quad 0 \le t_n \le f_-$$
e tali che
$$\lim_{n\to\infty} s_n = f_+, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = f_-.$$
Inoltre se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha
$$f_\pm \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$$
quindi
$$\{s_n\}, \{t_n\} \subseteq \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A}).$$
Per ogni $n \in \mathbf{N}$ definiamo la funzione semplice
$$\sigma_n := s_n - t_n.$$
Allora
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = f.$$
Inoltre se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha
$$\{\sigma_n\} \subseteq \mathcal{S}(X, \mathcal{A}). \quad \blacksquare$$

## 4.4 Funzioni essenzialmente limitate

**Definizione 4.1** Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Si dice *estremo superiore essenziale* di $f$ la quantità
$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf_{N\in\mathcal{N}_\mu} \sup_{x\in CN} f(x).$$
Si dice *estremo inferiore essenziale* di $f$ la quantità
$$\operatorname{ess\,inf} f := \sup_{N\in\mathcal{N}_\mu} \inf_{x\in CN} f(x).$$

**Osservazione 4.2** Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora
$$\operatorname{ess\,inf} f = -\operatorname{ess\,sup}(-f).$$

**Proposizione 4.3** Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora esiste $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che
$$\operatorname{ess\,sup} f = \sup_{x\in CN} f(x).$$

*Dimostrazione.* Se $\operatorname{ess\,sup} f = \infty$, per ogni $N \in \mathcal{N}_\mu$ si ha
$$\sup_{x\in CN} f(x) = \infty = \operatorname{ess\,sup} f.$$
Sia $\operatorname{ess\,sup} f < \infty$. Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ esiste $N_k \in \mathcal{N}_\mu$ tale che
$$\sup_{x\in CN_k} f(x) < \operatorname{ess\,sup} f + \frac{1}{k}.$$
Poniamo
$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k.$$
Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha
$$CN = \bigcap_{k=1}^{\infty} CN_k \subseteq CN_k.$$
Quindi per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha
$$\operatorname{ess\,sup} f \le \sup_{x\in CN} f(x) \le \sup_{x\in CN_k} f(x) < \operatorname{ess\,sup} f + \frac{1}{k}.$$
Per l'arbitrarietà di $k$ si ha
$$\operatorname{ess\,sup} f = \sup_{x\in CN} f(x). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 4.4** Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora
$$f \le \operatorname{ess\,sup} f \quad \text{q.o. in } X.$$

*Dimostrazione.* Sia $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che
$$\operatorname{ess\,sup} f = \sup_{x\in CN} f(x).$$
Allora per ogni $x \in CN$ si ha
$$f(x) \le \operatorname{ess\,sup} f.$$
Quindi
$$CN \subseteq \{f \le \operatorname{ess\,sup} f\}$$
da cui segue
$$\{f > \operatorname{ess\,sup} f\} \subseteq N.$$
Poiché $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha
$$\{f > \operatorname{ess\,sup} f\} \in \mathcal{A}.$$
Allora, per la monotonia di $\mu$ si ha
$$\{f > \operatorname{ess\,sup} f\} \in \mathcal{N}_\mu$$
cioè la tesi. $\blacksquare$

**Proposizione 4.5**

(i) Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $k \ge 0$. Allora
$$\operatorname{ess\,sup}(kf) = k \operatorname{ess\,sup} f.$$

(ii) Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora
$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \le \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Proposizione 4.6** Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$.

(i) Se $f \leq g$ q.o. in $X$ allora

$$\text{ess sup } f \leq \text{ess sup } g.$$

(ii) Se $f = g$ q.o. in $X$ allora

$$\text{ess sup } f = \text{ess sup } g.$$

(iii) Se $g \geq 0$ q.o. in $X$ allora

$$fg \leq (\text{ess sup } f)\, g \quad \text{q.o. in } X.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Proposizione 4.7** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n), \lambda_n)$ e $f : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ continua. Allora

$$\text{ess sup } f = \sup f.$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che vale la disuguaglianza

$$\text{ess sup } f \leq \sup f.$$

Poiché $\emptyset \in \mathcal{N}_{\lambda_n}$ si ha

$$\text{ess sup } f \leq \sup_{x \in C\emptyset} f = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} f = \sup f.$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza opposta

$$\sup f \leq \text{ess sup } f.$$

Se $\text{ess sup } f = \infty$ è evidente.
Sia $\text{ess sup } f < \infty$. Poniamo

$$E := \{f > \text{ess sup } f\} = f^{-1}((\text{ess sup } f, \infty)).$$

Mostriamo che

$$E = \emptyset.$$

Supponiamo per assurdo che

$$E \neq \emptyset.$$

Poiché $f$ è continua $E$ è aperto, quindi

$$\lambda_n(E) \neq 0.$$

D'altra parte, poiché

$$f \leq \text{ess sup } f \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^n,$$

si ha

$$\lambda_n(E) = 0,$$

da cui l'assurdo. Quindi

$$E = \emptyset.$$

Allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$f(x) \leq \text{ess sup } f.$$

Qundi

$$\sup f \leq \text{ess sup } f. \quad ■$$

**Definizione 4.8** Una funzione $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si dice <u>*essenzialmente limitata*</u> in $X$ se

$$\text{ess sup } |f| < \infty.$$

L'insieme delle funzioni essenzialmente limitate in $X$ è denotato con $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ oppure con $L^\infty(X)$ o con $L^\infty$.

**Osservazione 4.9** Una funzione essenzialmente limitata è finita quasi ovunque. Infatti risulta

$$|f| \leq \text{ess sup } |f| < \infty \quad \text{q.o. in } X.$$

**Proposizione 4.10** L'insieme $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio vettoriale.

*Dimostrazione.* Siano $f, g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\text{ess sup } |f + \lambda g| \leq \text{ess sup } |f| + |\lambda| \text{ ess sup } |g| < \infty.$$

Quindi

$$f + \lambda g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu). \quad ■$$

## 4.5 Funzione di Lebesgue-Vitali

**Definizione 5.1** Utilizzando le stesse notazioni adottate nella definizione dell'insieme di Cantor, per ogni $n \in \mathbf{N}$ definiamo la funzione $L_n : [0,1] \to [0,1]$ nel seguente modo:

$$L_n(0) := 0,$$

$$L_n := \text{funzione lineare con coefficiente angolare } \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \quad \text{in } K_n,$$

$$L_n := \text{costante} \quad \text{in } [0,1] \setminus K_n.$$

Poiché $\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ si ha $L_n(1) = 1$.

**Osservazione 5.2** Siano $n, m \in \mathbf{N}$ tali che $m > n$. Allora per ogni $x \in [0,1] \setminus K_n$ risulta

$$L_m(x) = L_n(x).$$

**Lemma 5.3** Sia $n \in \mathbf{N}$. Allora

$$\sup_{x \in [0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

*Dimostrazione.* Per l'osservazione precedente, si ha

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0,1]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| &= \sup_{x \in K_n} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = \\
&= \sup_{x \in [0, 1/3^n]} |L_{n+1}(x) - L_n(x)| = \\
&= \sup_{x \in [0, 1/3^n]} \left| \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} x - \left(\frac{3}{2}\right)^n x \right| = \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2} - 1\right) \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^{n+1}}. \quad ■
\end{aligned}$$

**Lemma 5.4** Siano $n, m \in \mathbf{N}$ tali che $m > n$. Allora

$$\sup_{x \in [0,1]} |L_n(x) - L_m(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|L_n(x) - L_m(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |L_{k+1}(x) - L_k(x)|.$$

Allora per il lemma precedente si ha

$$\sup_{x \in [0,1]} |L_n(x) - L_m(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^n}. \quad ■$$

**Proposizione 5.5** Per ogni $x \in [0,1]$ la successione $\{L_n(x)\}$ è di Cauchy, uniformemente rispetto ad $x$.

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{1}{2^{\overline{n}}} < \varepsilon.$$

Siano $n, m > \overline{n}$, con, ad esempio, $m > n$. Allora

$$\sup_{x \in [0,1]} |L_n(x) - L_m(x)| \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{\overline{n}}} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Corollario 5.6** Per ogni $x \in [0,1]$ la successione $\{L_n(x)\}$ è convergente, uniformemente rispetto ad $x$.

*Dimostrazione.* Segue dalla proposizione precedente, perché $\mathbf{R}$ è completo. $\blacksquare$

**Definizione 5.7** La <u>*funzione di Lebesgue-Vitali*</u> è la funzione

$$L : [0,1] \to [0,1]$$

definita nel modo seguente. Per ogni $x \in [0,1]$ poniamo

$$L(x) := \lim_{n\to\infty} L_n(x).$$

**Proposizione 5.8** La funzione di Lebesgue-Vitali è continua.

*Dimostrazione.* La funzione di Lebesgue-Vitali è limite uniforme di funzioni continue. Quindi è continua. $\blacksquare$

**Corollario 5.9** La funzione di Lebesgue-Vitali è misurabile secondo Borel e secondo Lebesgue.

**Osservazione 5.10** La funzione di Lebesgue-Vitali è non decrescente, essendo limite di funzioni non decrescenti.

**Lemma 5.11** Sia $K$ l'insieme di Cantor. Sia $x \in K$. Sia

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_k}{3^k},$$

con $\{\varepsilon_k\} \subseteq \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, lo sviluppo ternario di $x$. Allora

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$y := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

$(a)$ Supponiamo che esista $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $k > \overline{n}$ risulti

$$\varepsilon_k = 0.$$

Allora

$$x = \sum_{k=1}^{\overline{n}} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}, \quad y = \sum_{k=1}^{\overline{n}} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

In particolare $x \in K^{(1)}$ ed è l'estremo inferiore dell'intervallo $J_{\overline{n},\overline{k}}$, dove

$$\overline{k} := \left(\sum_{k=1}^{\overline{n}} \varepsilon_k 2^{\overline{n}-k}\right) + 1.$$

Allora $L_{\overline{n}}(x)$ è l'estremo inferiore dell'intervallo

$$L_{\overline{n}}\left(J_{\overline{n},\overline{k}}\right) = \left[\frac{\overline{k}-1}{2^{\overline{n}}}, \frac{\overline{k}}{2^{\overline{n}}}\right],$$

cioè

$$L_{\overline{n}}(x) = \frac{\overline{k}-1}{2^{\overline{n}}} = \frac{1}{2^{\overline{n}}}\sum_{k=1}^{\overline{n}} \varepsilon_k 2^{\overline{n}-k} = \sum_{k=1}^{\overline{n}} \frac{\varepsilon_k}{2^k} = y.$$

Inoltre, per ogni $n > \overline{n}$ risulta

$$L_n(x) = L_{\overline{n}}(x) = y.$$

Allora

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x) = y.$$

$(b)$ Nel caso generale per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}, \quad y_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

Allora si ha

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Inoltre per quanto visto nel punto $(a)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$L(x_n) = y_n.$$

Allora, tenendo conto della continuità di $L$ si ha

$$L(x) = L\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} L(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y. \quad \blacksquare$$

**Teorema 5.12** La funzione di Lebesgue-Vitali applica l'insieme di Cantor sull'intervallo $[0,1]$, ovvero

$$L(K) = [0,1].$$

*Dimostrazione.* Ovviamente si ha

$$L(K) \subseteq [0,1].$$

Mostriamo che vale l'inclusione opposta

$$[0,1] \subseteq L(K).$$

Sia $y \in [0,1]$. Sia

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k},$$

con $\{\varepsilon_k\} \subseteq \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, lo sviluppo binario di $y$. Poniamo

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}.$$

Allora $x \in K$ e per il lemma precedente si ha

$$L(x) = y.$$

Quindi $y \in L(K)$. $\blacksquare$

**Osservazione 5.13** La funzione di Lebesgue-Vitali trasforma un insieme di misura di Lebesgue nulla in un insieme di misura di Lebesgue positiva.

**Osservazione 5.14** La controimmagine tramite una funzione continua di di un insieme misurabile secondo Lebesgue non è in generale misurabile secondo Lebesgue, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 5.15** Definiamo l'applicazione $h : [0,1] \to [0,1]$ nel seguente modo. Per ogni $x \in [0,1]$ poniamo

$$h(x) := \frac{x + L(x)}{2}.$$

Si verifica che la funzione $h$ è continua, strettamente crescente e suriettiva. Quindi $h$ è un omeomorfismo. Allora la funzione

$$f := h^{-1}$$

è continua. Inoltre si dimostra (non lo vediamo) che

$$\lambda\left(h\left([0,1]\setminus K\right)\right)=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}=\frac{1}{2}.$$

Poiché $h$ è biunivoca si ha

$$\lambda\left(h\left(K\right)\right)=\lambda\left([0,1]\setminus h\left([0,1]\setminus K\right)\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Allora esiste un sottoinsieme $F\subseteq h\left(K\right)$ tale che

$$F\notin\mathcal{L}\left(\mathbf{R}\right).$$

Poniamo

$$E:=h^{-1}\left(F\right)=f\left(F\right).$$

Poiché $F\subseteq h\left(K\right)$ si ha

$$E\subseteq K.$$

Allora, poiché la misura di Lebesgue è completa e risulta $\lambda\left(K\right)=0$ si ha

$$E\in\mathcal{L}\left(\mathbf{R}\right).$$

Quindi si ha

$$F=f^{-1}\left(E\right),$$

con $f$ continua, $E$ misurabile secondo Lebesgue, ma $F$ non misurabile secondo Lebesgue.

**Teorema 5.16** L'inclusione

$$\mathcal{B}\left(\mathbf{R}\right)\subseteq\mathcal{L}\left(R\right)$$

è stretta, cioè esistono sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue ma non secondo Borel.

*Dimostrazione.* Mantenendo le notazioni dell'osservazione precedente si ha

$$E\in\mathcal{L}\left(\mathbf{R}\right),\quad F\notin\mathcal{L}\left(\mathbf{R}\right).$$

Se fosse

$$E\in\mathcal{B}\left(\mathbf{R}\right)$$

poiché $f$ è continua, si avrebbe

$$F=f^{-1}\left(E\right)\in\mathcal{L}\left(\mathbf{R}\right).$$

Quindi

$$E\notin\mathcal{B}\left(\mathbf{R}\right).\ \blacksquare$$

**Teorema 5.17** Lo spazio di misura $\left(\mathbf{R},\mathcal{B}\left(\mathbf{R}\right),\lambda\right)$ non è completo.

*Dimostrazione.* L'insieme di Cantor è un insieme di Borel e risulta

$$\lambda\left(K\right)=0.$$

D'altra parte, mantenendo le notazioni dell'osservazione precedente, si ha

$$E\subseteq K$$

e, per quanto visto nella dimostrazione del teorema precedente

$$E\notin\mathcal{B}\left(\mathbf{R}\right).$$

Quindi si ha la tesi. $\blacksquare$

# Capitolo 5
# Integrale di Lebesgue

## 5.1 Integrale di funzioni semplici non negative

**Definizione 1.1** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$. Sia

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

la forma canonica di $s$. Allora l'*integrale di Lebesgue* della funzione $s$ (rispetto alla misura $\mu$) è

$$\int_X s \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k).$$

**Osservazione 1.2** Il secondo membro della definizione di $\int_X s \, d\mu$ ha senso grazie alla definizione

$$0 \cdot \infty := 0.$$

**Proposizione 1.3** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$, $E \in \mathcal{A}$. Allora

$$s\chi_E \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A}).$$

*Dimostraizone.* Si ha

$$s\chi_E = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k} \chi_E = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k \cap E} + 0 \cdot \chi_{\complement E}. \quad \blacksquare$$

**Definizione 1.4** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$. Sia

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

la forma canonica di $s$. Sia $E \in \mathcal{A}$. Allora l'*integrale di Lebesgue esteso ad $E$* della funzione $s$ (rispetto alla misura $\mu$) è

$$\int_E s \, d\mu := \int_X s\chi_E \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k \cap E).$$

**Osservazione 1.5** Per ogni $E \in \mathcal{A}$ si ha

$$\int_E d\mu = \mu(E).$$

**Proposizione 1.6** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$. Allora per ogni $N \in \mathcal{N}_\mu$ risulta

$$\int_N s \, d\mu = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

la forma canonica di $s$. Allora

$$\int_N s \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k \cap N).$$

Per ogni $k \in \{1, ..., n\}$, poiché $E_k \cap N \in \mathcal{A}$ e $E_k \cap N \subseteq N$, con $\mu(N) = 0$, per monotonia di $\mu$ si ha

$$\mu(E_k \cap N) = 0.$$

Allora

$$\int_N s \, d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 1.7** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.

(i) *(Omogeneità)*
Sia $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$, $c > 0$. Allora $cs \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$ e risulta

$$\int_X cs \, d\mu = c \int_X s \, d\mu.$$

(ii) *(Linearità)*
Siano $s, t \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$. Allora $s + t \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$ e risulta

$$\int_X (s+t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu.$$

(iii) *(Monotonia rispetto alla funzione integranda)*
Siano $s, t \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$ tali che $s \leq t$ in $X$. Allora

$$\int_X s \, d\mu \leq \int_X t \, d\mu.$$

(iv) *(Monotonia rispetto all'insieme di integrazione)*
Siano $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$, $E, F \in \mathcal{A}$ tali che $E \subseteq F$. Allora

$$\int_E s \, d\mu \leq \int_F s \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

la forma canonica di $s$. Allora

$$cs = \sum_{k=1}^{n} cc_k \chi_{E_k}$$

è la forma canonica di $cs$ e si ha

$$\int_X cs \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} cc_k \mu(E_k) = c \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k) = c \int_X s \, d\mu.$$

$(ii)$ Siano

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}, \quad t = \sum_{l=1}^{m} d_l \chi_{F_l}$$

le forme canoniche di $s$ e $t$.
Per ogni $k = 1, ..., n$ si ha

$$E_k = E_k \cap X = E_k \cap \left( \bigcup_{l=1}^{m} F_l \right) = \bigcup_{l=1}^{m} E_k \cap F_l,$$

dove l'unione è disgiunta. Quindi

$$\chi_{E_k} = \sum_{l=1}^{m} \chi_{E_k \cap F_l}$$

e

$$s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_k \chi_{E_k \cap F_l}.$$

Analogamente

$$t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} d_l \chi_{E_k \cap F_l}.$$

Quindi

$$s + t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (c_k + d_l) \chi_{E_k \cap F_l}.$$

Allora, tenendo conto dell'additività di $\mu$, si ha

$$\int_X (s+t)\, d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} (c_k + d_l)\, \mu (E_k \cap F_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l=1}^{m} \mu (E_k \cap F_l) + \sum_{l=1}^{m} d_l \sum_{k=1}^{n} \mu (E_k \cap F_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \mu (E_k) + \sum_{l=1}^{m} d_l \mu (F_l) = \int_X s\, d\mu + \int_X t\, d\mu.$$

$(iii)$ Si ha

$$t = (t-s) + s, \quad \text{con } t-s, s \in \mathcal{S}_+ (X, \mathcal{A}).$$

Allora, per il punto $(i)$ si ha

$$\int_X t\, d\mu = \int_X (t-s)\, d\mu + \int_X s\, d\mu.$$

Quindi

$$\int_X t\, d\mu - \int_X s\, d\mu = \int_X (t-s)\, d\mu \geq 0$$

cioè

$$\int_X s\, d\mu \leq \int_X t\, d\mu.$$

$(iv)$ Si ha $\chi_E \leq \chi_F$ e quindi $s\chi_E \leq s\chi_F$. Allora per il punto $(iii)$, si ha

$$\int_E s\, d\mu = \int_X s\chi_E\, d\mu \leq \int_X s\chi_F\, d\mu = \int_F s\, d\mu. \quad \blacksquare$$

**Definizione 1.8** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $s \in \mathcal{S}_+ (X, \mathcal{A})$. Definiamo l'applicazione $\varphi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Per ogni $E \in \mathcal{A}$ poniamo

$$\varphi (E) := \int_E s\, d\mu.$$

**Proposizione 1.9** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $s \in \mathcal{S}_+ (X, \mathcal{A})$. Allora l'applicazione $\varphi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è una misura su $\mathcal{A}$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Poiché $\mu (\emptyset) = 0$ si ha

$$\varphi (\emptyset) = \int_\emptyset s\, d\mu = 0.$$

$(ii)$ Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{A}$ una successione disgiunta. Poniamo

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Dobbiamo mostrare che

$$\varphi (E) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi (E_k)$$

ovvero che

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} s\, d\mu.$$

Sia

$$s = \sum_{l=1}^{m} d_l \chi_{F_l}$$

la forma canonica di $s$. Allora

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{l=1}^{m} d_l \mu (F_l \cap E).$$

Per ogni $l = 1, \ldots, m$ si ha

$$F_l \cap E = F_l \cap \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_l \cap E_k,$$

dove l'unione è disgiunta. Quindi per la $\sigma$-additività di $\mu$ si ha

$$\mu (F_l \cap E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu (F_l \cap E_k).$$

Allora

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{l=1}^{m} d_l \sum_{k=1}^{\infty} \mu (F_l \cap E_k) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} d_l \mu (F_l \cap E_k).$$

Poiché la serie è a termini positivi, posso scambiare l'ordine delle due somme. Allora

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m} d_l \mu (F_l \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} s\, d\mu. \quad \blacksquare$$

**Definizione 1.10** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $s \in \mathcal{S}_+ (X, \mathcal{A})$. Allora la misura $\varphi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è detta <u>*misura di densità s*</u> rispetto alla misura $\mu$.

**Teorema 1.11** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{s_n\} \subseteq \mathcal{S}_+ (X, \mathcal{A})$ una successione non decrescente. Sia $s \in \mathcal{S}_+ (X, \mathcal{A})$ tale che

$$s \leq \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Allora

$$\int_X s\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon \in (0,1)$ arbitrario. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$E_n := \{(1-\varepsilon)\, s \leq s_n\}.$$

$(a)$ Mostriamo che $\{E_n\} \subseteq \mathcal{A}$.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Poiché $s \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ si ha $(1-\varepsilon)\, s \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$. Allora, poiché $s_n \in \mathcal{M} (X, \mathcal{A})$ si ha $E_n \in \mathcal{A}$.
$(b)$ Mostriamo che la successione $\{E_n\}$ è non decrescente.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Sia $x \in E_n$. Allora

$$(1-\varepsilon)\, s(x) \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x).$$

Quindi $x \in E_{n+1}$.
$(c)$ Mostriamo che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Ovviamente $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq X$. Mostriamo che vale $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Sia $x \in X$. Poniamo

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Per ipotesi si ha

$$s(x) \leq f(x).$$

Se $f(x) = \infty$ si ha

$$s_n(x) \geq (1-\varepsilon)\, s(x)$$

per $n$ abbastanza grande.
Se $f(x) < \infty$ si ha

$$s_n(x) > (1-\varepsilon)\, f(x) \geq (1-\varepsilon)\, s(x)$$

per $n$ abbastanza grande.
In ogni caso esiste un $n \in \mathbf{N}$ tale che $x \in E_n$. Quindi

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Sia $\varphi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ la misura di densità $s$ rispetto alla misura $\mu$. Allora si ha

$$\varphi (X) = \varphi \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n\to\infty} \varphi (E_n)$$

ovvero

$$\int_X s\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s\, d\mu.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$(1-\varepsilon)\int_{E_n} s\,d\mu \leq \int_{E_n} s_n\,d\mu \leq \int_X s_n\,d\mu.$$

Allora

$$(1-\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} s\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu$$

ovvero

$$(1-\varepsilon)\int_X s\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu.$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon$ segue la tesi. ■

## 5.2 Integrale di funzioni non negative

**Notazione 2.1** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Poniamo

$$\mathcal{S}_f := \{s \in \mathcal{S}_+(X,\mathcal{A}) \mid s \leq f\}.$$

**Definizione 2.2** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Si dice *integrale di Lebesgue* della funzione $f$ (rispetto alla misura $\mu$) la quantità:

$$\int_X f\,d\mu := \sup_{s\in\mathcal{S}_f}\int_X s\,d\mu,$$

**Osservazione 2.3** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Siano $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, $E \in \mathcal{A}$. Allora

$$f\chi_E \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A}).$$

**Definizione 2.4** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Siano $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, $E \in \mathcal{A}$. Allora l'*integrale di Lebesgue esteso ad $E$* della funzione $f$ (rispetto alla misura $\mu$) è

$$\int_E f\,d\mu := \int_X f\chi_E\,d\mu.$$

**Proposizione 2.5** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Siano $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Sia $\{s_n\} \subseteq \mathcal{S}_+(X,\mathcal{A})$ una successione non decrescente tale che

$$f = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Allora si ha

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per il teorema 1.11 per ogni $s \in \mathcal{S}_f$ si ha

$$\int_X s\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu.$$

Allora

$$\int_X f\,d\mu := \sup_{s\in\mathcal{S}_f}\int_X s\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu.$$

Poiché $\{s_n\} \subseteq \mathcal{S}_f$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\int_X s_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu. \quad ■$$

**Proposizione 2.6** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora per ogni $N \in \mathcal{N}_\mu$ risulta

$$\int_N f\,d\mu = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $N \in \mathcal{N}_\mu$. Per ogni $s \in \mathcal{S}_f$ risulta

$$\int_N s\,d\mu = 0.$$

Allora

$$\int_N f\,d\mu = \sup_{s\in\mathcal{S}_f}\int_N s\,d\mu = 0. \quad ■$$

**Teorema 2.7** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura.

(i) *(Omogeneità)*
Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, $c > 0$. Allora

$$\int_X cf\,d\mu = c\int_X f\,d\mu.$$

(ii) *(Linearità)*
Siano $f,g \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

(iii) *(Monotonia rispetto alla funzione integranda)*
Siano $f,g \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ tali che $f \leq g$ in $X$. Allora

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu.$$

(iv) *(Monotonia rispetto all'insieme di integrazione)*
Siano $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$, $E,F \in \mathcal{A}$ tali che $E \subseteq F$. Allora

$$\int_E f\,d\mu \leq \int_F f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Si ha

$$\begin{aligned} s \in \mathcal{S}_{cf} \quad &\Leftrightarrow \quad s \in \mathcal{S}_+(X,\mathcal{A}), \quad s \leq cf \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad s = ct, \quad t \in \mathcal{S}_+(X,\mathcal{A}), \quad t \leq f \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad s = ct, \quad t \in \mathcal{S}_f. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_X cf\,d\mu &= \sup_{s\in\mathcal{S}_{cf}}\int_X s\,d\mu = \sup_{t\in\mathcal{S}_f}\int_X ct\,d\mu = \\ &= c\sup_{t\in\mathcal{S}_f}\int_X t\,d\mu = c\int_X f\,d\mu. \end{aligned}$$

$(ii)$ Siano $\{s_n\},\{t_n\} \subseteq \mathcal{S}_+(X,\mathcal{A})$ successioni non decrescenti tali che

$$f = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad g = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

Allora, posto per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\sigma_n := s_n + t_n,$$

la successione $\{\sigma_n\} \subseteq \mathcal{S}_+(X,\mathcal{A})$ è non decrescente e tale che

$$f + g = \lim_{n\to\infty}\sigma_n.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X \sigma_n\,d\mu = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,d\mu = \\ &= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu. \end{aligned}$$

$(iii)$ Si ha $\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{S}_g$. Infatti se $s \in \mathcal{S}_f$ si ha

$$s \in \mathcal{S}_f, \quad s \leq f \leq g$$

quindi $s \in \mathcal{S}_g$. Allora

$$\int_X f\,d\mu = \sup_{s\in\mathcal{S}_f} \int_X s\,d\mu \leq \sup_{s\in\mathcal{S}_g} \int_X s\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

$(iv)$ Si ha $\chi_E \leq \chi_F$ e quindi $f\chi_E \leq f\chi_F$. Allora per il punto $(iii)$ si ha

$$\int_E f\,d\mu = \int_X s\chi_E\,d\mu \leq \int_X s\chi_F\,d\mu = \int_F s\,d\mu. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 2.8** *(Disuguaglianza di Chebychev)* Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora per ogni $c > 0$ si ha

$$\mu(\{f \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\int_{\{f\geq c\}} f\,d\mu \leq \frac{1}{c}\int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in \{f \geq c\}$ si ha $c \leq f(x)$. Quindi

$$c\chi_{\{f\geq c\}} \leq f\chi_{\{f\geq c\}}.$$

Allora

$$\int_X c\chi_{\{f\geq c\}}\,d\mu \leq \int_X f\chi_{\{f\geq c\}}\,d\mu$$

ovvero

$$c\mu(\{f \geq c\}) \leq \int_{\{f\geq c\}} f\,d\mu \quad \blacksquare$$

**Proposizione 2.9** Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ tale che

$$\int_X f\,d\mu < \infty.$$

Allora $f$ è finita q.o. in $X$, ovvero

$$\mu(\{f = \infty\}) = 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$E_n := \{f > n\}.$$

Si ha

$$\{f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Per la disuguaglianza di Chebychev per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu(E_n) \leq \frac{1}{n}\int_X f\,d\mu.$$

In particolare

$$\mu(E_1) \leq \int_X f\,d\mu < \infty.$$

Poiché $\{E_n\}$ è una successione non crescente e risulta

$$\mu(E_1) < \infty,$$

si ha

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_X f\,d\mu = 0.$$

Allora

$$\mu(\{f = \infty\}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 2.10** Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ tale che

$$\int_X f\,d\mu = 0.$$

Allora $f = 0$ q.o. in $X$, ovvero

$$\mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$E_n := \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Si ha

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Per la disuguaglianza di Chebychev per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu(E_n) \leq n\int_X f\,d\mu = 0.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu(E_n) = 0.$$

Poiché $\{E_n\}$ è una successione non decrescente si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0,$$

ovvero

$$\mu(\{f \neq \infty\}) = 0. \quad \blacksquare$$

## 5.3 Teorema di convergenza monotona

**Teorema 3.1** *(Teorema di Convergenza Monotona di Beppo Levi)* Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ una successione non decrescente. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f_n \leq f_{n+1} \leq f$$

quindi

$$\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f_{n+1}\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu.$$

Allora la successione $\left\{\int_X f_n\,d\mu\right\}$ è non decrescente e limitata, quindi ammette limite e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu.$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza opposta:

$$\int_X f\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Siano $\varepsilon \in (0,1)$ e $s \in \mathcal{S}_f$ arbitrari. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, poniamo

$$E_n := \{(1-\varepsilon)s \leq f_n\}.$$

In modo analogo a quanto visto nella dimostrazione del teorema 1.11, si dimostrano le seguenti proprietà.

$(a)$ $\{E_n\} \subseteq \mathcal{A}$.

$(b)$ La successione $\{E_n\}$ è non decrescente.

$(c)$ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Sia $\varphi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ la misura di densità $s$ rispetto alla misura $\mu$. Allora

$$\varphi(X) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n)$$

ovvero

$$\int_X s\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s\,d\mu.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$(1-\varepsilon)\int_{E_n} s\,d\mu \le \int_{E_n} f_n\,d\mu \le \int_X f_n\,d\mu$$

quindi

$$(1-\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} s\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

Quindi

$$(1-\varepsilon)\int_X s\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

Data l'arbitrarietà di $s \in \mathcal{S}_f$ si ha

$$(1-\varepsilon)\int_X f\,d\mu = (1-\varepsilon)\sup_{s\in\mathcal{S}_f}\int_X s\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\int_X f\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu. \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.2** *(Lemma di Fatou)* Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora

$$\underline{\lim}\int_X f_n\,d\mu \ge \int_X (\underline{\lim} f_n)\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$g_k := \inf_{n\ge k} f_n.$$

Poiché la successione $\{g_k\}$ è non decrescente, si ha

$$\underline{\lim} f_n = \sup_{k\in\mathbf{N}}\inf_{n\ge k} f_n = \sup_{k\in\mathbf{N}} g_k = \lim_{k\to\infty} g_k.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $f_n \ge g_n$ quindi

$$\int_X f_n\,d\mu \ge \int_X g_n\,d\mu.$$

Allora

$$\underline{\lim}\int_X f_n\,d\mu \ge \underline{\lim}\int_X g_k\,d\mu.$$

Poiché la successione $\left\{\int_X g_k\,d\mu\right\}$ è non decrescente, ammette limite e si ha

$$\underline{\lim}\int_X g_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu.$$

Per il teorema di Beppo-Levi si ha

$$\lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu = \int_X\left(\lim_{k\to\infty} g_k\right)d\mu.$$

Allora

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\int_X f_n\,d\mu &\ge \underline{\lim}\int_X g_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,d\mu = \\ &= \int_X\left(\lim_{k\to\infty} g_k\right)d\mu = \int_X(\underline{\lim} f_n)\,d\mu. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Osservazione 3.3** La disuguaglianza nel Lemma di Fatou può essere stretta, come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 3.4** Sia $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbf{N},\mathcal{P}(\mathbf{N}),\mu^\#)$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n = \chi_{\{n\}}$.
Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\int_{\mathbf{N}} f_n\,d\mu^\# = 1,$$

quindi

$$\underline{\lim}\int_{\mathbf{N}} f_n\,d\mu^\# = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{N}} f_n\,d\mu^\# = 1.$$

D'altra parte si ha

$$\underline{\lim} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

quindi

$$\int_{\mathbf{N}} (\underline{\lim} f_n)\,d\mu = 0.$$

**Teorema 3.5** Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $p \in \mathbf{N}$ poniamo

$$\sigma_p := \sum_{n=1}^{p} f_n.$$

Poiché la successione $\{\sigma_p\}$ è non decrescente, tenendo conto del teorema di Beppo-Levi, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu &= \\ &= \lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}\int_X f_n\,d\mu = \lim_{p\to\infty}\int_X\left(\sum_{n=1}^{p} f_n\right)d\mu = \\ &= \lim_{p\to\infty}\int_X \sigma_p\,d\mu = \int_X\left(\lim_{p\to\infty}\sigma_p\right)d\mu = \\ &= \int_X\left[\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} f_n\right)\right]d\mu = \int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)d\mu. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Definizione 3.6** Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Definiamo l'applicazione $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Per ogni $E \in \mathcal{A}$ poniamo

$$\nu(E) := \int_E f\,d\mu.$$

**Proposizione 3.7** Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora l'applicazione $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è una misura su $\mathcal{A}$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Poiché $\mu(\emptyset) = 0$ si ha

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f\,d\mu = 0.$$

$(ii)$ Sia $\{E_k\} \subseteq \mathcal{A}$ una successione disgiunta. Poniamo

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Dobbiamo mostrare che

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(E_k)$$

ovvero che

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f\,d\mu.$$

Si ha

$$\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}.$$

Allora, tenendo conto del teorema precedente, si ha

$$\begin{aligned}\int_E f\,d\mu &= \int_X f\chi_E\,d\mu = \int_X f\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}\right)d\mu = \\ &= \int_X\left(\sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k}\right)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_X f\chi_{E_k}\,d\mu =\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \, d\mu. \quad \blacksquare$$

**Definizione 3.8** Sia $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. La misura $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è detta *misura di densità* $f$ rispetto alla misura $\mu$.

**Proposizione 3.9** Sia $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Sia $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ la misura di densità $f$ rispetto alla misura $\mu$. Allora per ogni $g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ risulta

$$\int_X g \, d\nu = \int_X g f \, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $s \in \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$. Allora

$$\int_X s \, d\nu = \int_X s f \, d\mu.$$

Infatti, se

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$$

è la forma canonica di $s$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_X s \, d\nu &= \sum_{k=1}^{n} c_k \nu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{E_k} f \, d\mu = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_X c_k f \chi_{E_k} \, d\mu = \int_X \left( \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k} \right) f \, d\mu = \\
&= \int_X s f \, d\mu.
\end{aligned}$$

Sia $g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Sia $\{s_n\} \subseteq \mathcal{S}_+(X, \mathcal{A})$ una successione non decrescente tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = g.$$

Allora, tenendo conto del teorema di Beppo-Levi, si ha

$$\begin{aligned}
\int_X g \, d\nu &= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n f \, d\mu = \\
&= \int_X \left( \lim_{n\to\infty} s_n f \right) d\mu = \int \left( \lim_{n\to\infty} s_n \right) f \, d\mu = \\
&= \int_X g f \, d\mu. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Proposizione 3.10** *(Assoluta continuità di $\nu$ rispetto a $\mu$)* Sia $f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ tale che

$$\int_X f \, d\mu < \infty.$$

Sia $\nu$ la misura di densità $f$ rispetto alla misura $\mu$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \delta$ risulta

$$\nu(E) < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$F_n := \{f < n\}.$$

Ovviamente si ha

$$X = \{f = \infty\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad \text{con} \quad \{f = \infty\} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

Allora per l'additività di $\nu$ si ha

$$\nu(X) = \nu(\{f = \infty\}) + \nu\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right).$$

Poiché

$$\int_X f \, d\mu < \infty$$

per proposizione 2.9 si ha

$$\mu(\{f = \infty\}) = 0.$$

Allora

$$\nu(\{f = \infty\}) = \int_{\{f=\infty\}} f \, d\mu = 0.$$

Inoltre, poiché la successione $\{F_n\}$ è non decrescente si ha

$$\nu\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n).$$

Allora

$$\nu(X) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n)$$

ovvero

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} f \, d\mu.$$

Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\int_X f \, d\mu - \int_{F_n} f \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

ovvero tale che

$$\int_{CF_n} f \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Sia $E \in \mathcal{A}$ tale che

$$\mu(E) < \delta.$$

Allora

$$\nu(E) = \nu(E \cap CF_n) + \nu(E \cap F_n) = \int_{E \cap CF_n} f \, d\mu + \int_{E \cap F_n} f \, d\mu.$$

Primo addendo:

$$\int_{E \cap CF_n} f \, d\mu \leq \int_{CF_n} f \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Secondo addendo:

$$\int_{E \cap F_n} f \, d\mu < \int_{E \cap F_n} n \, d\mu = n\mu(E \cap F_n) \leq n\mu(E) < n\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora

$$\nu(E) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 5.4 Insiemi di misura nulla

**Teorema 4.1** Siano $f, g \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ tali che

$$f = g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$N := \{f \neq g\}.$$

Per ipotesi $N \in \mathcal{N}_\mu$. Quindi si ha

$$\int_N f \, d\mu = 0, \quad \int_N g \, d\mu = 0.$$

Allora, poiché

$$CN = \{f = g\},$$

si ha

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \int_{CN} f\,d\mu + \int_N f\,d\mu = \int_{CN} f\,d\mu = \\ &= \int_{CN} g\,d\mu = \int_{CN} g\,d\mu + \int_N g\,d\mu = \int_X g\,d\mu. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Corollario 4.2** Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $\int_X f\,d\mu = 0$;

(ii) $f = 0$ q.o. in $X$.

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Già dimostrato.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Segue dal teorema precedente. $\blacksquare$

**Osservazione 4.3** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. L'uguaglianza quasi ovunque di funzioni $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ è una relazione di equivalenza nello spazio $\mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Per il teorema precedente, l'integrale ha valore costante su ogni classe di equivalenza.

**Definizione 4.4** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ definita quasi ovunque. Sia $N \in \mathcal{N}_\mu$ il sottoinsieme di $X$ in cui $f$ non è definita. L'*integrale di Lebesgue* di $f$ è la quantità

$$\int_X f\,d\mu := \int_{CN} f\,d\mu.$$

**Teorema 4.5** Siano $f_n \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ definite q.o. tali che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$f_n \le f_{n+1} \quad \text{q.o. in } X.$$

Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ definita q.o. tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ siano $N_n^{(0)},\ N_n^{(1)} \in \mathcal{N}_\mu$ tali che

$(a)$ la funzione $f_n$ è definita in $CN_n^{(0)}$;

$(b)$ risulta $f_n \le f_{n+1}$ in $CN_n^{(1)}$.

Siano $N_0^{(0)},\ N_0^{(1)} \in \mathcal{N}_\mu$ tali che

$(a)$ la funzione $f$ è definita in $CN_0^{(0)}$;

$(b)$ risulta $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $CN_0^{(1)}$.

Poniamo

$$N := \bigcup_{k=0,1}\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} N_n^{(k)}\right].$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$ e nell'insieme $CN$ sono verificate le ipotesi del teorema di convergenza monotona. Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{CN} f_n\,d\mu = \int_{CN} f\,d\mu,$$

da cui segue la tesi. $\blacksquare$

**Proposizione 4.6** Siano $f_n \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ definite q.o. tali che

$$\int_X f_1\,d\mu < \infty$$

e tali che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$f_n \ge f_{n+1} \quad \text{q.o. in } X.$$

Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ definita q.o. tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Sia $n \in \mathbf{N}$. Poiché

$$f_n < f_1 \quad \text{q.o. in } X,$$

si ha

$$\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f_1\,d\mu < \infty,$$

quindi $f_n$ è finita q.o. in $X$. Allora la funzione

$$g_n := f_1 - f_n$$

è definita e non negativa q.o. in $X$. Poiché

$$f_1 = g_n + f_n$$

si ha

$$\int_X f_1\,d\mu = \int_X g_n\,d\mu + \int_X f_n\,d\mu,$$

da cui segue

$$\int_X g_n\,d\mu = \int_X f_1\,d\mu - \int_X f_n\,d\mu.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$g_n \le g_{n+1} \quad \text{q.o. in } X.$$

Inoltre risulta

$$\lim_{n\to\infty} g_n = f_1 - f \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora per il teorema precedente si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu = \int_X f_1\,d\mu - \int_X f\,d\mu.$$

Quindi

$$\int_X f_1\,d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f_1\,d\mu - \int_X f\,d\mu.$$

Poiché

$$\int_X f_1\,d\mu < \infty,$$

si ha la tesi. $\blacksquare$

**Osservazione 4.7** L'ipotesi $(i)$ della proposizione precedente non può essere omessa, come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 4.8** Sia $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbf{N},\mathcal{P}(\mathbf{N}),\mu^{\#})$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $f_n = \chi_{[n,\infty)}$. Sia $f \equiv 0$.
Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$f_n \ge f_{n+1}.$$

Inoltre risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

D'altra parte per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\int_{\mathbf{N}} f_n\,d\mu^{\#} = \infty,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{N}} f_n\,d\mu^{\#} = \infty,$$

mentre

$$\int_{\mathbf{N}} f\,d\mu^{\#} = 0.$$

**Teorema 4.9** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Sia $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ il suo completamento. Sia $f \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Allora

$$\int_X f\,d\overline{\mu} = \int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Sia $\{t_n\} \subseteq \mathcal{S}_+\left(X,\overline{\mathcal{A}}\right)$ una successione non decrescente tale che

$$\lim_{n\to\infty} t_n = f.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ siano $c_1^n,\dots,c_{k_n}^n > 0$ distinti, $F_1^n,\dots,F_{k_n}^n \in \overline{\mathcal{A}}$ disgiunti tali che

$$t_n = \sum_{k=1}^{k_n} c_k^n \chi_{F_k^n}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \{1,\dots,k_n\}$ siano $E_k^n \in \mathcal{A}$, $T_k^n \in \mathcal{T}_\mu$ tali che

$$F_k^n = E_k^n \cup T_k^n.$$

Poniamo

$$T := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{n_k} T_k^n.$$

Allora $T \in \mathcal{T}_\mu$, cioè esiste $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che

$$T \subseteq N.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$s_n := \sum_{k=1}^{k_n} c_k^n \chi_{E_k^n}.$$

Allora si ha $\{s_n\} \subseteq \mathcal{S}_+(X,\mathcal{A})$. Inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in CN$ si ha

$$s_n(x) = t_n(x).$$

Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$s_n = t_n \quad \mu\text{-q.o. in } X.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$s_n \le s_{n+1} \quad \mu\text{-q.o. in } X$$

e risulta

$$\lim_{n\to\infty} s_n = f \quad \mu\text{-q.o. in } X.$$

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \{1,\dots,k_n\}$ si ha

$$\overline{\mu}(F_k^n) = \mu(E_k^n),$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_X t_n\,d\overline{\mu} = \sum_{k=1}^{k_n} c_k^n \overline{\mu}(F_k^n) = \sum_{k=1}^{k_n} c_k^n \mu(E_k^n) = \int_X s_n\,d\mu.$$

Allora si ha

$$\int_X f\,d\overline{\mu} = \lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,d\overline{\mu} = \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu. \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.10** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Sia $(X,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu})$ il suo completamento. Sia $f \in \mathcal{M}_+\left(X,\overline{\mathcal{A}}\right)$. Allora esiste $g \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ tale che

$$\int_X f\,d\overline{\mu} = \int_X g\,d\overline{\mu} = \int_X g\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Sia $g \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$ tale che

$$g = f \qquad \overline{\mu}\text{-q.o. in } X.$$

Allora si ha

$$\int_X f\,d\overline{\mu} = \int_X g\,d\overline{\mu}.$$

Inoltre per il teorema precedente si ha

$$\int_X g\,d\overline{\mu} = \int_X g\,d\mu. \quad \blacksquare$$

## 5.5 Funzioni integrabili

**Definizione 5.1** Una funzione $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$ si dice <u>integrabile</u> su $X$ (rispetto alla misura $\mu$) se

$$\int_X f_+\,d\mu < \infty, \qquad \int_X f_-\,d\mu < \infty.$$

L'insieme delle funzioni integrabili su $X$ viene indicato con $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ oppure con $L^1(X)$ o con $L^1$.

**Definizione 5.2** Sia $f \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$. Si dice <u>integrale di Lebesgue</u> di $f$ la quantità

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu.$$

Sia $E \in \mathcal{A}$. Si dice <u>integrale di Lebesgue esteso ad $E$</u> di $f$ la quantità

$$\int_E f\,d\mu := \int_X f\chi_E\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu.$$

**Osservazione 5.3** Poiché $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$ si ha $f_\pm \in \mathcal{M}_+(X,\mathcal{A})$. Quindi gli integrali che compaiono nella definizione di $\int_X f\,d\mu$ sono ben definiti. Inoltre poiché tali integrali sono finiti, ha senso considerare la sottrazione.

**Proposizione 5.4** Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$;
(ii) $f_\pm \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$;
(iii) $|f| \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$.

*Dimostrazione.* $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Immediata.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Poiché $|f| = f_+ + f_-$, si ha

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu < \infty.$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Poiché $f_\pm \le |f|$ si ha

$$\int_X f_\pm\,d\mu < \int_X |f|\,d\mu < \infty. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 5.5** Sia $f \in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$. Allora

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,d\mu\right| &= \left|\int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu\right| \le \\ &\le \int_X f_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Proposizione 5.6** L'insieme $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ è uno spazio vettoriale.

*Dimostrazione.* Siano $f, g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Poiché $f_+, f_-, g_+, g_- \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, per la proposizione 2.9 $f_+, f_-, g_+, g_-$ sono finite q.o., ~~quindi~~ anche $f$ e $g$ sono finite q.o. Allora la funzione $f + \lambda g$ è definita q.o.
Poiché $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha

$$f + \lambda g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}).$$

Inoltre si ha

$$\int_X |f + \lambda g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu + \lambda \int_X |g| \, d\mu < \infty.$$

Quindi

$$f + \lambda g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu). \quad \blacksquare$$

**Teorema 5.7**

(i) Siano $f, g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Allora

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

(ii) Siano $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\int_X (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Consideriamo la funzione definita q.o. $h := f + g$. Si ha

$$h_+ - h_- = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) \quad \text{q.o. in } X,$$

da cui segue

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$\int_X h_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu + \int_X g_- \, d\mu =$$
$$= \int_X h_- \, d\mu + \int_X f_+ \, d\mu + \int_X g_+ \, d\mu.$$

Poiché tutti i termini sono finiti, si ha

$$\int_X h_+ \, d\mu - \int_X h_- \, d\mu =$$
$$= \left( \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \right) + \left( \int_X g_+ \, d\mu - \int_X g_- \, d\mu \right),$$

cioè la tesi.
$(ii)$ Si ha

$$(\lambda f)_\pm = \begin{cases} \lambda f_\pm & \text{se } \lambda \geq 0, \\ -\lambda f_\mp & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Se $\lambda \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_X (\lambda f) \, d\mu &= \int_X (\lambda f)_+ \, d\mu - \int_X (\lambda f)_- \, d\mu = \\ &= \lambda \int_X f_+ \, d\mu - \lambda \int_X f_- \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

Se $\lambda < 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_X (\lambda f) \, d\mu &= \int_X (\lambda f)_+ \, d\mu - \int_X (\lambda f)_- \, d\mu = \\ &= -\lambda \int_X f_- \, d\mu + \lambda \int_X f_+ \, d\mu = \\ &= \lambda \left( \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \right) = \lambda \int_X f \, d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Osservazione 5.8** Se $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ è tale che

$$\int_X f \, d\mu = 0,$$

non necessariamente risulta

$$f = 0 \quad \text{q.o. in } X.$$

**Proposizione 5.9** Sia $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}$ risulti

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

Allora $f = 0$ q.o. in $X$.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$E_+ := \{f \geq 0\}, \quad E_- := \{f < 0\}.$$

Poiché $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha $E_+, E_- \in \mathcal{A}$.
Per ipotesi

$$\int_{E_+} f \, d\mu = 0, \quad \int_{E_-} f \, d\mu = 0$$

da cui seguono rispettivamente $f = 0$ q.o. in $E_+$, $f = 0$ q.o. in $E_-$. Allora $f = 0$ q.o. in $X$. $\blacksquare$

**Teorema 5.10** Siano $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ tali che

$$f = g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e risulta:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* Si ha $f_+ = g_+$, $f_- = g_-$ q.o. in $X$. Quindi

$$\int_X g_+ \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu < \infty, \quad \int_X g_- \, d\mu = \int_X f_- \, d\mu < \infty$$

cioè $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \int_X g \, d\mu &= \int_X g_+ \, d\mu - \int_X g_- \, d\mu = \\ &= \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu = \int_X f \, d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 5.11** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ il suo completamento. Sia $f \in L^1(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$. Allora esiste $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

$$\int_X f \, d\overline{\mu} = \int_X g \, d\overline{\mu} = \int_X g \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* Poiché $f \in L^1\left(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}\right)$ si ha

$$f_+, f_- \in L^1\left(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}\right).$$

In particolare

$$f_+, f_- \in \mathcal{M}_+\left(X, \overline{\mathcal{A}}\right).$$

Quindi, per il teorema 4.10 esistono $g_+, g_- \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$ tali che

$$\int_X f_+ \, d\overline{\mu} = \int_X g_+ \, d\overline{\mu} = \int_X g_+ \, d\mu,$$

$$\int_X f_- \, d\overline{\mu} = \int_X g_- \, d\overline{\mu} = \int_X g_- \, d\mu.$$

Allora, poiché

$$\int_X f_+ \, d\overline{\mu} < \infty, \quad \int_X f_- \, d\overline{\mu} < \infty,$$

si ha

$$\int_X g_+ \, d\mu < \infty, \quad \int_X g_+ \, d\mu < \infty,$$

cioè
$$g_+, g_- \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$
Allora, se poniamo
$$g := g_+ - g_-,$$
si ha
$$g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$$
e risulta
$$\begin{aligned}\int_X g\,d\mu &= \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu = \\ &= \int_X g_+\,d\overline{\mu} - \int_X g_-\,d\overline{\mu} = \int_X g\,d\overline{\mu},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\int_X g\,d\mu &= \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu = \\ &= \int_X f_+\,d\overline{\mu} - \int_X f_-\,d\overline{\mu} = \int_X f\,d\overline{\mu}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

## 5.6 Teorema di convergenza dominata

**Teorema 6.1** *(Teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue)* Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ tali che
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{q.o. in } X.$$
Supponiamo verificata la seguente *condizione di Lebesgue*:

esiste $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$|f_n| \le g \quad \text{q.o. in } X.$$
Allora $\{f_n\} \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e risulta:
$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$
In particolare
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha
$$\int_X |f_n|\,d\mu \le \int_X g\,d\mu < \infty.$$
Inoltre, essendo $|f| \le g$ q.o. in $X$ si ha
$$\int_X |f|\,d\mu \le \int_X g\,d\mu < \infty.$$
Quindi
$$\{f_n\} \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu), \ f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$
Inoltre le funzioni $f_n$, $f$ sono finite q.o. in $X$. Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ è definita q.o. in $X$ la funzione
$$g_n := 2g - |f_n - f|.$$
Si ha $\{g_n\} \subseteq \mathcal{M}_+(X, \mathcal{A})$. Inoltre, poiché
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{q.o. in } X,$$
si ha
$$\lim_{n\to\infty} g_n = 2g \quad \text{q.o. in } X.$$
Allora, tenendo conto del Lemma di Fatou, si ha
$$\begin{aligned}\overline{\lim} \int_X |f_n - f|\,d\mu &= \int_X 2g\,d\mu - \underline{\lim} \int_X g_n\,d\mu \le \\ &\le \int_X 2g\,d\mu - \int_X \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) = \\ &= \int_X 2g\,d\mu - \int_X 2g\,d\mu = 0.\end{aligned}$$
Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = \overline{\lim} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$
Infine si ha
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu - \int_X f\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f)\,d\mu \le \\ &\le \lim_{n\to\infty} \left| \int_X (f_n - f)\,d\mu \right| \le \\ &\le \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0\end{aligned}$$
da cui segue
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu. \quad \blacksquare$$

**Corollario 6.2** Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ tali che
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{q.o. in } X.$$
Supponiamo verificata la seguente condizione:

esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$|f_n| \le M \quad \text{q.o. in } X.$$
Allora $\{f_n\} \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e risulta:
$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$
In particolare
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Posto $g := M$, si ha
$$\int_X g\,d\mu = M\mu(X) < \infty.$$
Quindi $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Allora esiste $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$|f_n| \le M = g \quad \text{q.o. in } X.$$
Quindi per il teorema di Lebesgue si ha la tesi. $\blacksquare$

**Proposizione 6.3** Siano $\{f_n\} \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tali che

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ q.o. in $X$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu$.

Allora
$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$
In particolare
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$\varphi_n := ||f_n| - |f| - |f_n - f||.$$

Per l'ipotesi $(i)$ si ha $\varphi_n \to 0$ q.o. in $X$. Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\varphi_n = ||f_n| - |f| - |f_n - f|| \leq ||f_n| - |f_n - f|| + |f| \leq 2|f|.$$

Essendo $2|f| \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, per il teorema di Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X ||f_n| - |f| - |f_n - f|| \, d\mu = 0.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, d\mu - \int_X |f| \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \right| &= \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \int_X (|f_n| - |f| - |f_n - f|) \, d\mu \right| \leq \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_X ||f_n| - |f| - |f_n - f|| \, d\mu = 0.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, d\mu - \int_X |f| \, d\mu = 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 6.4** Sia $\{f_n\} \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge q.o. in $X$. Inoltre si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$$

e risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per il teorema 3.5 si ha

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

In particolare $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ è finita q.o. in $X$. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (assolutamente) q.o. in $X$. Inoltre si ha

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu \leq \int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu < \infty.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Per ogni $p \in \mathbf{N}$ poniamo

$$\sigma_p := \sum_{n=1}^{p} f_n.$$

Per ogni $p \in \mathbf{N}$ si ha

$$|\sigma_p| = \left| \sum_{n=1}^{p} f_n \right| \leq \sum_{n=1}^{p} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

Allora, poiché $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, tenendo conto del teorema di Lebesgue si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu &= \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{p\to\infty} \int_X \left( \sum_{n=1}^{p} f_n \right) d\mu = \\
&= \lim_{p\to\infty} \int_X \sigma_p \, d\mu = \int_X \left( \lim_{p\to\infty} \sigma_p \right) d\mu = \\
&= \int_X \left( \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} f_n \right) d\mu = \int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Definizione 6.5** Sia $f : \mathbf{R} \times X \to \mathbf{R}$ tale che per ogni $t \in \mathbf{R}$ risulti

$$f(t, \cdot) \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Definiamo la funzione $I : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ poniamo

$$I(t) := \int_X f(t, \cdot) \, d\mu.$$

**Teorema 6.6** Sia $f : \mathbf{R} \times X \to \mathbf{R}$ tale che per ogni $t \in \mathbf{R}$ risulti

$$f(t, \cdot) \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

(i) Sia $f(\cdot, x)$ continua in $t_0 \in \mathbf{R}$ per quasi ogni $x \in X$. Supponiamo che esistano $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ risulti

$$|f(t, \cdot)| \leq g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora la funzione $I$ è continua in $t_0$.

(ii) Sia $f(\cdot, x)$ derivabile in $t_0 \in \mathbf{R}$ per quasi ogni $x \in X$. Supponiamo che esistano $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ risulti

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \right| \leq g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora la funzione $I$ è derivabile in $t_0$ e risulta

$$I'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, \cdot) \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $\{t_n\} \subseteq \mathbf{R}$ una successione infinitesima arbitraria. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\begin{aligned}
|I(t_0 + t_n) - I(t_0)| &= \left| \int_X f(t_0 + t_n, \cdot) \, d\mu - \int_X f(t_0, \cdot) \, d\mu \right| = \\
&= \left| \int_X [f(t_0 + t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)] \, d\mu \right| \leq \\
&\leq \int_X |f(t_0 + t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)| \, d\mu.
\end{aligned}$$

Poiché $f(\cdot, x)$ è continua in $t_0$ per quasi ogni $X$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} |f(t_0 + t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)| = 0 \quad \text{q.o. in } X.$$

Poiché per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ risulta

$$|f(t, \cdot)| \leq g \quad \text{q.o. in } X,$$

per $n$ abbastanza grande si ha $|t_n| < \delta$ e quindi

$$|f(t_0 + t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)| \leq 2g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora per il teorema di Lebesgue risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f(t_0 + t_n, \cdot) - f(t_0, \cdot)| \, d\mu = 0,$$

da cui segue

$$\lim_{n\to\infty} |I(t_0 + t_n) - I(t_0)| = 0.$$

Per l'arbitrarietà della successione $\{t_n\}$ si ha la tesi.

$(ii)$ Sia $\{t_n\} \subseteq \mathbf{R}$ una successione infinitesima arbitraria. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\left|\frac{I(t_0+t_n)-I(t_0)}{t_n} - \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)\, d\mu\right| =$$

$$= \left|\int_X \left[\frac{I(t_0+t_n)-I(t_0)}{t_n} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)\right] d\mu\right| =$$

$$= \int_X \left|\frac{I(t_0+t_n)-I(t_0)}{t_n} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)\right| d\mu.$$

Poiché $f(\cdot, x)$ è derivabile in $t_0$ per quasi ogni $X$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{I(t_0+t_n)-I(t_0)}{t_n} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)\right| = 0 \quad \text{q.o. in } X.$$

Poiché per ogni $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ risulta

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right| \le g \quad \text{q.o. in } X,$$

per $n$ abbastanza grande si ha $|t_n| < \delta$ e quindi

$$\left|\frac{I(t_0+t_n)-I(t_0)}{t_n} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)\right| \le 2g \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora per il teorema di Lebesgue risulta

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \left|\frac{I(t_0+t_n)-I(t_0)}{t_n} - \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)\right| d\mu = 0,$$

da cui segue

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{I(t_0+t_n)-I(t_0)}{t_n} - \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)\, d\mu\right| = 0.$$

Per l'arbitrarietà della successione $\{t_n\}$ si ha la tesi. ∎

**Osservazione 6.7** Le affermazioni del teorema precedente si estendono a derivate di ordine superiore e a integrali dipendenti da più parametri.

## 5.7 Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

**Definizione 7.1** Sia $I = [a,b]$. Una *partizione* di $I$ è un sottoinsieme finito $\Delta \subseteq I$ tale che $a, b \in I$.
Denotiamo con $\Pi$ la famiglia delle partizioni di $I$.

**Definizione 7.2** Sia $I = [a,b]$. Sia

$$\Delta = \{a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_l \equiv b\}$$

una partizione di $I$. Per ogni $k = 1, \ldots, l$ poniamo

$$I_k := [x_{k-1}, x_k].$$

La *norma* di $\Delta$ è la quantità

$$|\Delta| := \max_{k=1,\ldots,l} \lambda(I_k).$$

**Definizione 7.3** Sia $I = [a,b]$. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ limitata. Sia

$$\Delta = \{a \equiv x_1 < x_2 < \ldots < x_l \equiv b\}$$

una partizione di $I$. Per ogni $k = 1, \ldots, l$ poniamo

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad m_k := \min_{x\in I_k} f(x), \quad M_k := \max_{x\in I_k} f(x).$$

Si definisce *somma integrale per difetto* di $f$ rispetto a $\Delta$ la quantità

$$\sigma(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{l} m_k \lambda(I_k).$$

Si definisce *somma integrale per eccesso* di $f$ rispetto a $\Delta$ la quantità

$$\Sigma(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{l} M_k \lambda(I_k).$$

**Definizione 7.4** Sia $I = [a,b]$. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ limitata.
Si definisce *integrale di Riemann per difetto* di $f$ la quantità

$$\sigma(f) := \sup_{\Delta\in\Pi} \sigma(f,\Delta).$$

Si definisce *integrale di Riemann per eccesso* di $f$ la quantità

$$\Sigma(f) := \inf_{\Delta\in\Pi} \Sigma(f,\Delta).$$

La funzione $f$ si dice *integrabile secondo Riemann* su $I$ se risulta

$$\sigma(f) = \Sigma(f).$$

In tal caso si definisce *integrale di Riemann* di $f$ su $I$ la quantità

$$\int_a^b f(x)\, dx := \sigma(f) = \Sigma(f).$$

Denotiamo con $\mathcal{R}(I)$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su $I$.

**Notazione 7.5** Sia $I = [a,b]$. Denotiamo con $\mathcal{L}(I)$ la $\sigma$-algebra indotta su $I$ dalla $\sigma$-algebra $\mathcal{L}(\mathbf{R})$ degli insiemi di Lebesgue. Denotiamo con $\lambda$ la misura indotta su $\mathcal{L}(I)$ dalla misura di Lebesgue su $\mathcal{L}(\mathbf{R})$.

**Teorema 7.6** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in \mathcal{R}(I)$. Allora $f \in L^1(I, \mathcal{L}(I), \lambda)$ e risulta

$$\int_I f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.$$

*Dimostrazione.* Sia $\{\Delta_n\}$ una successione non decrescente di partizioni di $[a,b]$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$\Delta_n = \{a \equiv x_{0,n}, x_{1,n} < \ldots < x_{l_n,n} \equiv b\}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $k = 1, \ldots, l_n$ poniamo

$$I_{k,n} := [x_{k-1,n}, x_{k,n}], \quad m_{k,n} := \inf_{x\in I_{k,n}} f(x), \quad M_{k,n} := \sup_{x\in I_{k,n}} f(x).$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$s_n := \sum_{k=1}^{l_n} m_{k,n}\chi_{I_{k,n}}, \quad S_n := \sum_{k=1}^{l_n} M_{k,n}\chi_{I_{k,n}}.$$

Allora si ha $\{s_n\}, \{S_n\} \subseteq \mathcal{S}(I, \mathcal{L}(I))$, $\{s_n\}$ è non decrescente, $\{S_n\}$ è non crescente e per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$s_n \le f \le S_n.$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\int_I s_n\, d\lambda = \sum_{k=1}^{l_n} m_k \lambda(I_{k,n}) = \sigma(f,\Delta_n),$$

$$\int_I S_n\, d\lambda = \sum_{k=1}^{l_n} M_k \lambda(I_{k,n}) = \Sigma(f,\Delta_n).$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_I s_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\sigma(f,\Delta_n) = \sigma(f),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_I S_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\Sigma(f,\Delta_n) = \Sigma(f).$$

Quindi, poiché $f \in \mathcal{R}(I)$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_I S_n \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Poniamo

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n, \quad S := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Allora $s, S \in \mathcal{M}(I, \mathcal{L}(I))$ e risulta

$$s \le f \le S.$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ le funzioni $s_n, S_n$ sono limitate e $\lambda(I) < \infty$, per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n \, d\lambda = \int_I s \, d\lambda, \quad \lim_{n\to\infty} \int_I S_n \, d\lambda = \int_I S \, d\lambda.$$

Quindi

$$\int_I s \, d\lambda = \int_I S \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Da questa segue

$$\int_I (S - s) \, d\lambda = 0.$$

Quindi si ha

$$s = S \quad \text{q.o. in } X$$

e, poichè $s \le f \le S$, si ha

$$s = f = S \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora, poichè la misura di Lebesgue è completa e poiché $s, S \in \mathcal{M}(I, \mathcal{L}(I))$ si ha

$$f \in \mathcal{M}(I, \mathcal{L}(I)).$$

Inoltre, poiché $f$ è limitata e $\lambda(I) < \infty$ si ha

$$f \in L^1(I, \mathcal{L}(I), \lambda).$$

Infine risulta

$$\int_I f \, d\lambda = \int_I s \, d\lambda = \int_I S \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \blacksquare$$

**Osservazione 7.7** Il teorema precedente mostra che vale l'inclusione

$$\mathcal{R}(I) \subseteq L^1(I, \mathcal{L}(I), \lambda).$$

Inoltre tale inclusione è stretta come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 7.8** Sia $I = [0, 1]$. Consideriamo la funzione di Dirichlet $f = \chi_{I \cap \mathbf{Q}}$. Si ha $f \in L^1(I, \mathcal{L}(I), \lambda)$ e risulta

$$\int_I f \, d\lambda = 0.$$

D'altra parte per ogni partizione $\Delta$ di $I$ risulta

$$\sigma(f, \Delta) = 0, \quad \Sigma(f, \Delta) = 1.$$

Quindi $f$ non è integrabile secondo Riemann.

**Teorema 7.9** Sia $I = [a, b]$. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ limitata. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in \mathcal{R}(I)$;

(ii) $f$ è continua $\lambda$-q.o. in $I$.

*Dimostrazione.* Siano $\{\Delta_n\}$, $\{s_n\}$, $\{S_n\}$, $s$, $S$ come nella dimostrazione del teorema precedente.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Poniamo

$$\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n,$$

$$E := \{x \in I \mid s(x) = f(x) = S(x)\},$$

$$F := E \setminus \Delta.$$

$(a)$ Mostriamo che $f$ è continua su $F$.
Sia $\overline{x} \in F$. Poiché $\overline{x} \notin \Delta$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\overline{x} \notin \Delta_n.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $k_n \in \{1, ..., l_n\}$ tale che

$$\overline{x} \in (x_{k_n - 1, n}, x_{k_n, n}).$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$J_n := (x_{k_n - 1, n}, x_{k_n, n}).$$

Supponiamo per assurdo che $f$ non sia continua in $x$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\sup_{x \in J_n} f(x) - \inf_{x \in J_n} f(x) \ge \varepsilon,$$

ovvero

$$S_n(\overline{x}) - s_n(\overline{x}) \ge \varepsilon.$$

Allora

$$S(\overline{x}) - s(\overline{x}) \ge \varepsilon,$$

D'altra parte, poiché $\overline{x} \in E$, si ha

$$s(\overline{x}) = S(\overline{x}),$$

da cui l'assurdo.
$(b)$ Mostriamo che $I \setminus F$ ha misura nulla.
Si ha

$$I \setminus F = \Delta \cup (I \setminus E).$$

Poiché $\Delta$ è numerabile si ha

$$\lambda(\Delta) = 0.$$

Poiché

$$s = f = S \quad \text{q.o. in } X$$

si ha

$$\lambda(I \setminus E) = 0.$$

Quindi

$$\lambda(I \setminus F) = 0.$$

Allora $f$ è continua q.o. in $I$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $\overline{x} \in (a, b)$ un punto in cui $f$ è continua. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Allora esiste $\delta > 0$ tale che, posto

$$J := (\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta)$$

risulta

$$\sup_{x \in J} f(x) - \inf_{x \in J} f(x) < \varepsilon.$$

Per ogni $n$ abbastanza grande esiste $k_n \in \{1, ..., l_n\}$ tale che

$$\overline{x} \in [x_{k_n - 1, n}, x_{k_n, n}] \subseteq J.$$

Allora per ogni $n$ abbastanza grande si ha

$$S_n(\overline{x}) - s_n(\overline{x}) < \varepsilon.$$

Quindi

$$S(\overline{x}) - s(\overline{x}) \le \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$ si ha

$$s(\overline{x}) = S(\overline{x}).$$

Poiché per ipotesi $f$ è continua q.o. in $I$, si ha

$$s = S \quad \text{q.o. in } I.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \int_I s_n \, d\lambda = \int_I s \, d\lambda = \\ &= \int_I S \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_I S_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, \Delta_n) = \Sigma(f). \end{aligned}$$

Quindi $f \in \mathcal{R}(I)$. $\blacksquare$

**Definizione 7.10** Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo non vuoto. Poniamo

$$\alpha := \inf I, \quad \beta := \sup I.$$

Una funzione $f : I \to \mathbf{R}$ si dice integrabile secondo Riemann su $I$ se

(i) per ogni intervallo $J = [a, b] \subseteq I$ risulta

$$f|_J \in \mathcal{R}(J);$$

(ii) esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{a\to\alpha^+ \\ b\to\beta^-}} \int_a^b f(x)\, dx.$$

In tal caso si dice integrale improprio di Riemann di $f$ su $I$ la quantità

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx := \lim_{\substack{a\to\alpha^+ \\ b\to\beta^-}} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Denotiamo ancora con $\mathcal{R}(I)$ l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su $I$.

**Proposizione 7.11** Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo non vuoto. Sia $f : I \to \mathbf{R}$.

(i) Se $f \in \mathcal{R}(I)$, allora $f \in \mathcal{M}(I, \mathcal{L}(I))$.
(ii) Se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $|f| \in \mathcal{R}(I)$, allora $f \in L^1(I, \mathcal{L}(I), \lambda)$ e risulta

$$\int_I f\, d\lambda = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

*Dimostrazione.* Sia $\{J_n\}$ una successione non decrescente di intervalli chiusi e limitati tali che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = I.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $J_n = [a_n, b_n]$.
$(i)$ Per ipotesi, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f|_{J_n} \in \mathcal{R}(J_n).$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f|_{J_n} \in \mathcal{M}(J_n, \mathcal{L}(J_n)).$$

Allora, per il teorema 1.15 del capitolo precedente si ha

$$f \in \mathcal{M}(I, \mathcal{L}(I)).$$

$(ii)$ Per ipotesi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$|f||_{J_n} \in \mathcal{R}(J_n),$$

quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\, dx = \int_{J_n} |f|\, d\lambda.$$

Allora, tenendo conto del teorema di convergenza monotona, si ha

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} |f|\, d\lambda = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_I |f|\, \chi_{J_n}\, d\lambda = \int_I |f|\, d\lambda.\end{aligned}$$

Per ipotesi si ha

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx < \infty.$$

Quindi

$$\int_I |f|\, d\lambda < \infty,$$

cioè

$$f \in L^1(I, \mathcal{L}(I), \lambda).$$

Per ipotesi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f|_{J_n} \in \mathcal{R}(J_n),$$

quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx = \int_{J_n} f\, d\lambda.$$

Quindi, tenendo conto del teorema di convergenza monotona, si ha

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f\, d\lambda = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f_+\, d\lambda - \lim_{n\to\infty} \int_{J_n} f_-\, d\lambda = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_I f_+\chi_{J_n}\, d\lambda - \lim_{n\to\infty} \int_I f_-\chi_{J_n}\, d\lambda = \\ &= \int_I f_+\, d\lambda - \int_I f_-\, d\lambda = \int_I f\, d\lambda. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Osservazione 7.12** La condizione di Lebesgue nel teorema di Lebesgue è sufficiente ma non necessaria, come mostra l'esempio seguente.

**Esempio 7.13** Sia $I = (0, 1]$, $(X, \mathcal{A}, \mu) = (I, \mathcal{L}(I), \lambda)$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in I$ sia

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x).$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\int_I f_n\, d\lambda = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{1}{x}\, dx = \log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0. \tag{5.1}$$

Inoltre risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\, d\lambda = \int_I \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda.$$

D'altra parte la condizione di Lebesgue non è verificata. Infatti si ha

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n = f,$$

dove $f : I \to \mathbf{R}$ è la funzione definita ponendo per ogni $x \in I$

$$f(x) := \frac{1}{x}.$$

Ma $f \notin L^1(I, \mathcal{L}(I), \lambda)$ essendo

$$\int_I f\, d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

# Capitolo 6
# Spazi di Lebesgue

## 6.1 Richiami: spazi metrici

**Definizione 1.1** Un'applicazione $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ si dice <u>distanza</u> su $X$ se:

(i) *(simmetria)* per ogni $x, y \in X$ risulta
$$d(x,y) = d(y,x);$$

(ii) *(disuguaglianza triangolare)* per ogni $x, y, z \in X$ risulta
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y);$$

(iii) per ogni $x, y \in X$ risulta
$$d(x,y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = y.$$

**Definizione 1.2** Un insieme $X$ su cui sia definita una distanza $d$ si dice <u>*spazio metrico*</u>.

**Definizione 1.3** Sia $X$ uno spazio metrico con distanza $d$. Siano $x_0 \in X$, $r > 0$. La <u>palla</u> di centro $x_0$ e raggio $r$ è l'insieme
$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}.$$

**Osservazione 1.4** Sia $X$ uno spazio metrico. La famiglia
$$\{B(x_0, r) \mid x_0 \in X, \ r > 0\}$$
è base di una topologia su $X$.

**Definizione 1.5** Sia $X$ uno spazio metrico. La topologia di cui la famiglia
$$\{B(x_0, r) \mid x_0 \in X, \ r > 0\}$$
è base è detta <u>*topologia indotta*</u> dalla distanza $d$.

**Definizione 1.6** Sia $X$ un insieme. Due distanze $d_1, d_2$ su $X$ si dicono <u>*equivalenti*</u> se inducono la stessa topologia su $X$.

**Definizione 1.7** Sia $X$ uno spazio metrico con distanza $d$. Siano $\{x_n\} \subseteq X$, $x \in X$. Si dice che $\{x_n\}$ <u>*converge*</u> ad $x$ se
$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0,$$
ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta
$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

**Definizione 1.8** Sia $X$ uno spazio metrico con distanza $d$. Sia $\{x_n\} \subseteq X$.
La successione $\{x_n\}$ si dice <u>*convergente*</u> se esiste $x \in X$ tale che $\{x_n\}$ converge ad $x$.
La successione $\{x_n\}$ si dice <u>*di Cauchy*</u> (o <u>*fondamentale*</u>) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > \overline{n}$ risulta
$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Osservazione 1.9** Sia $X$ uno spazio metrico. Allora ogni successione convergente è di Cauchy.

**Definizione 1.10** Uno spazio metrico $X$ si dice <u>*completo*</u> se ogni successione di Cauchy è convergente.

## 6.2 Richiami: spazi vettoriali normati

**Definizione 2.1** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. Un'applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}_+$ si dice <u>*seminorma*</u> su $X$ se:

(i) *(omogeneità)* per ogni $x \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|;$$

(ii) *(disuguaglianza triangolare)* per ogni $x, y \in X$ si ha
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un'applicazione $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}_+$ si dice <u>*norma*</u> su $X$ se:

(i) *(omogeneità)* per ogni $x \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|;$$

(ii) *(disuguaglianza triangolare)* per ogni $x, y \in X$ si ha
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

(iii) per ogni $x \in X$ risulta
$$\|x\| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = y.$$

**Definizione 2.2** Uno spazio vettoriale $X$ su $\mathbf{R}$ su cui sia definita una norma $\|\cdot\|$ si dice <u>*spazio vettoriale normato*</u>.

**Proposizione 2.3** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, $\|\cdot\|$ una seminorma su $X$. Allora per ogni $x, y \in X$ si ha
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

*Dimostrazione.* Poiché
$$x = (x - y) + y$$
si ha
$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$
quindi
$$\|x\| - \|y\| < \|x - y\|.$$
Poiché
$$y = (y - x) + x$$
si ha
$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|,$$
quindi
$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$
Allora si ha la tesi. ■

**Definizione 2.4** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Definiamo l'applicazione $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ nel seguente modo. Per ogni $x, y \in X$ poniamo
$$d(x,y) := \|x - y\|.$$

**Proposizione 2.5** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Allora l'applicazione $d$ è una distanza su $X$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Per ogni $x, y \in X$ si ha
$$d(x,y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y,x).$$

$(ii)$ Per ogni $x, y, z \in X$ si ha
$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x - y\| = \|(x - z) - (y - z)\| \leq \\ &\leq \|x - z\| + \|y - z\| = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

$(iii)$ Per ogni $x, y \in X$ si ha

$$d(x,y) = 0$$

se e solo se

$$\|x - y\| = 0,$$

quindi se e solo se

$$x - y = 0,$$

ovvero

$$x = y. \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.6** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. La distanza $d$ è detta *distanza indotta dall norma*.

**Definizione 2.7** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. Due norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ su $X$ si dicono *equivalenti* se le distanze $d_1, d_2$ da esse indotte sono equivalenti.

**Proposizione 2.8** Sia $X$ uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su $X$ sono tra loro equivalenti.

*Dimostrazione.* Omessa. $\blacksquare$

**Definizione 2.9** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Siano $\{x_n\} \subseteq X$, $x \in X$. Si dice che $\{x_n\}$ *converge* ad $x$ se $\{x_n\}$ converge ad $x$ rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$, ovvero se

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

**Definizione 2.10** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. Sia $\{x_n\} \subseteq X$.
La successione $\{x_n\}$ si dice *convergente* se è tale rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$, ovvero se esiste $x \in X$ tale che $\{x_n\}$ converge ad $x$.
La successione $\{x_n\}$ si dice *di Cauchy* (o *fondamentale*) se è tale rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$, ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > \overline{n}$ risulta

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

**Osservazione 2.11** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato. Allora ogni successione convergente è di Cauchy.

**Definizione 2.12** Uno spazio vettoriale normato $X$ con norma $\|\cdot\|$ si dice *spazio di Banach* se è completo rispetto alla distanza indotta da $\|\cdot\|$, ovvero se ogni successione di Cauchy è convergente.

**Esempio 2.13** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Denotiamo con $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \Omega \to \mathbf{R}$ continue.
Per ogni $f : \Omega \to \mathbf{R}$ limitata e uniformemente continua, esiste un'unica estensione continua e limitata di $f$ alla chiusura $\overline{\Omega}$.
Denotiamo con $C(\overline{\Omega})$ lo spazio vettoriale delle funzioni limitate ed uniformemente continue in $\Omega$.
Definiamo l'applicazione $\|\cdot\|_\infty : C(\overline{\Omega}) \to \mathbf{R}_+$ nel seguente modo. Per ogni $f \in C(\overline{\Omega})$ poniamo

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Allora $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $C(\overline{\Omega})$.
Inoltre $C(\overline{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach.

**Esempio 2.14** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Denotiamo con $C_0(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \Omega \to \mathbf{R}$ continue a supporto compatto.
Definiamo l'applicazione $\|\cdot\|_1 : C_0(\Omega) \to \mathbf{R}_+$ nel seguente modo. Per ogni $f \in C_0(\Omega)$ poniamo

$$\|f\|_1 := \int_\Omega |f| \, d\lambda_n.$$

Allora $\|\cdot\|_1$ è una norma su $C_0(\Omega)$.
Tuttavia $C_0(\Omega)$ non è completo rispetto a tale norma.

**Esempio 2.15** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{L}(\Omega), \lambda_n)$.
Definiamo l'applicazione $\|\cdot\|_1 : L^1(\Omega) \to \mathbf{R}_+$ nel seguente modo. Per ogni $f \in L^1(\Omega)$ poniamo

$$\|f\|_1 := \int_\Omega |f| \, d\lambda_n.$$

Allora $\|\cdot\|_1$ è una seminorma su $L^1(\Omega)$ ma non una norma. Infatti se $f \in L^1(\Omega)$ è tale che

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f| \, d\lambda_n = 0,$$

si ha

$$f = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega,$$

ma non

$$f = 0.$$

## 6.3 Richiami: funzionali lineari e dualità

**Definizione 3.1** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. Un'applicazione $F : X \to \mathbf{R}$ si dice *funzionale lineare* su $X$ se per ogni $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ risulta

$$F(x + \lambda y) = F(x) + \lambda F(y).$$

**Definizione 3.2** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

(i) Siano $F_1, F_2$ due funzionali lineari su $X$. La *somma* di $F_1$ e $F_2$ è l'applicazione $F_1 + F_2 : X \to \mathbf{R}$ definito nel seguente modo. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$(F_1 + F_2)(x) := F_1(x) + F_2(x).$$

(ii) Sia $F$ un funzionale lineare su $X$. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Il *prodotto* di $F$ per lo scalare $\lambda$ è l'applicazione $\lambda F : X \to \mathbf{R}$ definita nel seguente modo. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$(\lambda F)(x) := \lambda F(x).$$

**Osservazione 3.3** Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. L'insieme dei funzionali lineari su $X$ con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale.

**Definizione 3.4** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Un funzionale lineare $F$ su $X$ si dice *limitato* se esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in X$ risulta

$$|F(x)| \leq M \|x\|.$$

**Proposizione 3.5** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Sia $F$ un funzionale lineare su $X$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $F$ è limitato;
(ii) $F$ è continuo.

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $F$ limitato. Allora per ogni $x, y \in X$ risulta

$$|F(x) - F(y)| = |F(x - y)| \leq M \|x - y\|.$$

Quindi $F$ è continuo.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $F$ continuo. Sia $x_0 \in X$. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$, con

$$\|x - x_0\| < \delta,$$

risulti

$$|F(x) - F(x_0)| < 1.$$

Sia $\eta \in (0, \delta)$. Sia $y \in X$ arbitrario. Poniamo

$$x := x_0 + \eta \frac{y}{\|y\|}.$$

Allora

$$\|x - x_0\| = \eta < \delta.$$

Quindi

$$|F(x) - F(x_0)| < 1.$$

Inoltre

$$|F(x) - F(x_0)| = |F(x - x_0)| = \left|F\left(\eta \frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \eta \frac{|F(y)|}{\|y\|},$$

quindi

$$\eta \frac{|F(y)|}{\|y\|} < 1.$$

Allora per ogni $y \in X$ si ha

$$\frac{|F(y)|}{\|y\|} \leq \frac{1}{\eta}.$$

Quindi $F$ è limitato. ∎

**Osservazione 3.6** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. L'insieme dei funzionali lineari (continui) su $X$ con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale.

**Definizione 3.7** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Lo spazio dei funzionali lineari (continui) su $X$ si dice <u>spazio duale</u> di $X$ e si denota con $X^*$.

**Definizione 3.8** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Definiamo l'applicazione $\|\cdot\| : X^* \longrightarrow \mathbf{R}_+$ nel seguente modo. Per ogni $F \in X^*$ poniamo

$$\|F\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |F(x)|.$$

**Osservazione 3.9** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Sia $F \in X^*$. Per ogni $x \in X$ risulta

$$|F(x)| \leq \|F\| \, \|x\|.$$

**Proposizione 3.10** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. L'applicazione $\|\cdot\| : X^* \longrightarrow \mathbf{R}_+$ è una norma su $X^*$.

*Dimostrazione.* Immediata. ∎

**Teorema 3.11** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Allora l'insieme $X^*$ è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che $X^*$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|$. Sia $\{F_n\} \subseteq X^*$ una successione di Cauchy. Sia $x \in X$ con $x \neq 0$ arbitrario. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta

$$\|F_n - F_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}.$$

Allora per ogni $n, m > n_\varepsilon$ si ha

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \|F_n - F_m\| \, \|x\| < \varepsilon.$$

Quindi la successione $\{F_n(x)\} \subseteq \mathbf{R}$ è di Cauchy e, poiché $\mathbf{R}$ è completo, converge. Definiamo allora l'applicazione $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in X$ poniamo

$$F(x) := \lim_{n \to \infty} F_n(x).$$

Mostriamo che $F$ è un funzionale lineare.
Per ogni $x, y \in X$ si ha

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \lim_{n \to \infty} F_n(x+y) = \lim_{n \to \infty} [F_n(x) + F_n(y)] = \\ &= \lim_{n \to \infty} F_n(x) + \lim_{n \to \infty} F_n(y) = F(x) + F(y) \end{aligned}$$

e per ogni $x \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha

$$F(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} F_n(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} \lambda F_n(x) = \lambda \lim_{n \to \infty} F_n(x) = \lambda F(x).$$

Mostriamo che $F$ è limitato.
Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta

$$\|F_n - F_m\| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta

$$|\|F_n\| - \|F_m\|| \leq \|F_n - F_m\| < \varepsilon.$$

Quindi la successione $\{\|F_n\|\} \subseteq \mathbf{R}$ è di Cauchy e, poiché $\mathbf{R}$ è completo, converge. Allora esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta $\|F_n\| \leq M$. Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in X$ si ha

$$|F_n(x)| \leq \|F_n\| \, \|x\| \leq M \|x\|.$$

Allora per ogni $x \in X$ si ha

$$|F(x)| = \lim_{n \to \infty} |F_n(x)| \leq M \|x\|,$$

cioè $F$ è limitato.
Mostriamo che

$$\lim_{n \to \infty} \|F_n - F\| = 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta

$$\|F_n - F_m\| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $n, m > n_\varepsilon$ e per ogni $x \in X$ risulta

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \|F_n - F_m\| \, \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

Quindi per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$|F_n(x) - F(x)| = \lim_{m \to \infty} |F_n(x) - F_m(x)| \leq \varepsilon \|x\|,$$

da cui segue

$$\|F_n - F\| \leq \varepsilon.$$

Allora

$$\lim_{n \to \infty} \|F_n - F\| = 0. \quad ∎$$

**Definizione 3.12** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Lo spazio di Banach $X^*$ è detto <u>spazio duale</u> di $X$. La norma su $X^*$ è detta <u>norma duale</u> rispetto alla norma su $X$.

**Definizione 3.13** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Lo spazio $(X^*)^*$ duale del duale di $X$ è detto <u>spazio biduale</u> di $X$ e si denota con $X^{**}$.

**Definizione 3.14** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Definiamo l'applicazione $j : X \longrightarrow X^{**}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in X$ definiamo l'applicazione $j(x) : X^* \longrightarrow \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $F \in X^*$ poniamo

$$[j(x)](F) := F(x).$$

**Proposizione 3.15** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. La definizione dell'applicazione $j : X \longrightarrow X^{**}$ è ben posta, ovvero per ogni $x \in X$ si ha

$$[j(x)] \in X^{**}.$$

*Dimostrazione.* Sia $x \in X$ arbitrario.
Mostriamo che $j(x)$ è un funzionale lineare su $X^*$.
Se $F_1, F_2 \in X^*$ si ha

$$\begin{aligned} [j(x)](F_1 + F_2) &= (F_1 + F_2)(x) = \\ &= F_1(x) + F_2(x) = \\ &= [j(x)](F_1) + [j(x)](F_2) \end{aligned}$$

e se $F \in X^*$, $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha

$$[j(x)](\lambda F) = (\lambda F)(x) = \lambda F(x) = \lambda [j(x)](F).$$

Mostriamo che $j(x)$ è limitato.
Per ogni $F \in X^*$ si ha

$$|[j(x)](F)| = |F(x)| \leq \|F\| \, \|x\|$$

Quindi $j(x)$ è limitato. ■

**Teorema 3.16** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Allora l'applicazione $j : X \longrightarrow j(X)$ è un isomorfismo isometrico. Quindi a meno di isomorfismi si ha

$$X = j(X) \subseteq X^{**}$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Definizione 3.17** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. L'applicazione $j : X \longrightarrow j(X)$ è detta *immersione canonica* di $X$ in $X^{**}$.

**Definizione 3.18** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$. Definiamo l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $F \in X^*$, $x \in X$ poniamo

$$\langle F, x \rangle := [j(x)](F) = F(x).$$

L'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è detta *applicazione di dualità* tra $X$ e $X^*$.

**Definizione 3.19** Uno spazio di Banach $X$ si dice *riflessivo* se risulta

$$j(X) = X^{**},$$

ovvero se, a meno di isomorfismi, risulta

$$X = X^{**}.$$

**Proposizione 3.20** Uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se lo è il suo duale.

*Dimostrazione.* Omessa. ■

## 6.4 Disuguaglianze

**Teorema 4.1** *(Disuguaglianza di Jensen)* Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(X) = 1$. Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a < b$. Sia $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che $a < f < b$ q.o. in $X$. Sia $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$ convessa. Allora

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* Poiché $\varphi$ è convessa, è anche continua. Allora, poiché $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha $\varphi \circ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Poniamo

$$t := \int_X f \, d\mu.$$

Si ha $a < t < b$. Infatti

$$a = a \int_X d\mu < \int_X f \, d\mu < b \int_X d\mu = b.$$

Poiché $\varphi$ è convessa per ogni $s \in (a, t)$, $u \in (t, b)$ si ha

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

Poniamo

$$\beta := \sup_{s \in (a,t)} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}.$$

Per ogni $s \in (a, t)$ si ha

$$\beta \geq \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$$

cioè

$$\varphi(s) - \varphi(t) - \beta(s - t) \geq 0.$$

Per ogni $u \in (t, b)$ si ha

$$\beta \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

cioè

$$\varphi(u) - \varphi(t) - \beta(u - t) \geq 0.$$

Quindi per ogni $\tau \in (a, b)$ si ha

$$\varphi(\tau) - \varphi(t) - \beta(\tau - t) \geq 0.$$

In particolare per quasi ogni $x \in X$, poiché $a < f(x) < b$, si ha

$$\varphi(f(x)) - \varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) - \beta\left(f(x) - \int_X f \, d\mu\right) \geq 0.$$

Il primo membro è misurabile. Integrando su $X$ si ha

$$\int_X (\varphi \circ f) \, d\mu - \varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) - \beta\left(\int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\mu\right) \geq 0$$

cioè

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) \, d\mu. \quad ■$$

**Proposizione 4.2** Siano $y_1, ..., y_n \geq 0$, $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Allora

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i.$$

*Dimostrazione.* Se $y_i = 0$ per qualche $i$, la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo $y_i > 0$ per ogni $i$. Poniamo

$$X := \{1, ..., n\}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}(X).$$

Definiamo la misura $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ nel seguente modo. Per ogni $I \subseteq \{1, ..., n\}$ poniamo

$$\mu(I) = \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

Si ha allora

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Per ogni $i$ poniamo

$$x_i := \log y_i.$$

Definiamo l'applicazione $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ poniamo

$$f(t_i) := x_i.$$

Scegliendo la funzione convessa $\varphi(x) = e^x$ la disuguaglianza di Jensen diventa

$$\exp\left(\int_X f\,d\mu\right) \le \int_X (\exp f)\,d\mu.$$

Essendo

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

$$\int_X (\exp f)\,d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{f(i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{x_i}$$

si ha

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{x_i}$$

ovvero

$$\prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i} \le \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i. \quad \blacksquare$$

**Osservazione 4.3** Ponendo $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ si ottiene

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right),$$

ovvero la media geometrica di $y_1, \ldots, y_n$ non supera la media aritmetica degli stessi numeri.

**Corollario 4.4** *(Disuguaglianza di Young)* Siano $a, b \ge 0$. Siano $p, q \in (1, \infty)$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Allora

$$a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

**Definizione 4.5** Siano $p, q \in [1, \infty]$. Si dice che $p$ e $q$ si dicono *coniugati* se

$$p, q \in (1, \infty) \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1$$

$$\text{oppure} \quad \{p, q\} = \{1, \infty\}.$$

**Definizione 4.6** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Per ogni $p \in [1, \infty)$ poniamo

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Inoltre poniamo

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

**Teorema 4.7** *(Disuguaglianza di Hölder)* Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Siano $p, q \in [1, \infty]$ coniugati. Allora

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$$

ovvero

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Siano $p,\ q \in (1, \infty)$.
Se $\|f\|_p \|g\|_q = \infty$ la disuguaglianza è ovvia.
Se $\|f\|_p \|g\|_q = 0$ si ha $fg = 0$ q.o. in $X$, quindi $\|fg\|_1 = 0$ e la disuguaglinza è verificata.

Siano $\|f\|_p$, $\|g\|_q$ finiti e non nulli. Sia $x \in X$ fissato. Poniamo

$$a := \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p, \quad b := \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q.$$

Per la disuguaglianza di Young si ha

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando su $X$ si ha

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q}\int_X |fg|\,d\mu \le \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_X |g|^q\,d\mu$$

ovvero

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

da cui segue la tesi.
$(ii)$ Siano $p = 1,\ q = \infty$.
Poichè

$$|g| \le \|g\|_\infty \quad \text{q.o. in } X$$

si ha

$$|fg| \le |f|\,\|g\|_\infty \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg|\,d\mu \le \|g\|_\infty \int_X |f|\,d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 4.8** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Sia $p \in [1, \infty]$. Allora

$$\|fg\|_p \le \|f\|_p \|g\|_\infty.$$

*Dimostrazione.* Poichè

$$|g| \le \|g\|_\infty \quad \text{q.o. in } X$$

si ha

$$|fg| \le |f|\,\|g\|_\infty \quad \text{q.o. in } X.$$

Allora

$$\begin{aligned}\|fg\|_p &= \left(\int_X |fg|^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \\ &\le \|g\|_\infty \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_p \|g\|_\infty. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Corollario 4.9** *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)*
Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \le \left(\int_X f^2\,d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X g^2\,d\mu\right)^{1/2}.$$

*Dimostrazione.* Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \le \int_X |fg|\,d\mu \le \left(\int_X f^2\,d\mu\right)^{1/2} \left(\int_X g^2\,d\mu\right)^{1/2}. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 4.10** *(Disuguaglianza di Minkowski)*
Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Allora per ogni $p \in [1, \infty]$ si ha

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

ovvero

$$\left(\int_X |f + g|^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

se $p \in [1, \infty)$ e

$$\operatorname{ess\,sup} |f+g| \leq \operatorname{ess\,sup} |f| + \operatorname{ess\,sup} |g| .$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $p = 1$. Si ha

$$\int_X |f+g| \, d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu.$$

$(ii)$ Sia $p = \infty$. Si ha

$$\operatorname{ess\,sup} |f+g| \leq \operatorname{ess\,sup} (|f| + |g|) = \operatorname{ess\,sup} |f| + \operatorname{ess\,sup} |g| .$$

$(iii)$ Sia $p \in (1, \infty)$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_X |f+g|^p \, d\mu &= \int_X |f+g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \\ &\leq \int_X |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu. \end{aligned}$$

Sia $q \in (1, \infty)$ tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_X |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Essendo

$$(p-1) q = p$$

si ha

$$\int_X |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Analogamente

$$\int_X |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_X |f+g|^p \, d\mu &\leq \left[ \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left( \int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q} \end{aligned}$$

ovvero

$$\left( \int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1-1/q} \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

ovvero

$$\left( \int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \quad \blacksquare$$

## 6.5 Definizione degli spazi $L^p$

**Definizione 5.1** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Poniamo

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \mid \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Lo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ si denota anche con $L^p(X), L^p$.

**Proposizione 5.2** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Allora

(i) l'insieme $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio vettoriale;
(ii) l'applicazione $\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbf{R}}_+$ è una seminorma.

*Dimostrazione.* Dimostriamo l'omogeneità di $\|\cdot\|_p$.

Siano $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Se $p \in [1, \infty)$ si ha

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_p &= \left( \int_X |\lambda f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left( \int_X |\lambda|^p \, |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \\ &= |\lambda| \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|f\|_p. \end{aligned}$$

Se $p = \infty$ si ha

$$\|\lambda f\|_p = \operatorname{ess\,sup} (\lambda f) = |\lambda| \operatorname{ess\,sup} f = |\lambda| \, \|f\|_p.$$

$(i)$ Siano $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora, per la disuguaglianza di Minkowski e per l'omogeneità di $\|\cdot\|_p$, si ha

$$\|f + \lambda g\|_p \leq \|f\|_p + \|\lambda g\|_p = \|f\|_p + |\lambda| \, \|g\|_p < \infty$$

quindi $f + \lambda g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.
$(ii)$ Abbiamo già dimostrato l'omogeneità di $\|\cdot\|_p$.
La disuguaglianza triangolare

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

è la disuguaglianza di Minkowski. $\blacksquare$

**Definizione 5.3** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Definiamo la relazione $\sim$ su $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ nel seguente modo. Per ogni $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ poniamo

$$f \sim g \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad f = g \quad \text{q.o. in } X.$$

**Osservazione 5.4** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Allora la relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza su $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**Definizione 5.5** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Denotiamo con $\tilde{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ lo spazio quoziente di $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$.

**Proposizione 5.6** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Siano $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ tali che

$$f \sim g.$$

Allora

$$\|f\|_p = \|g\|_p.$$

*Dimostrazione.* Poiché $f \sim g$ si ha

$$f = g \quad \text{q.o. in } X$$

Sia $p \in [1, \infty)$. Allora

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left( \int_X |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|g\|_p.$$

Sia $p = \infty$. Allora

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g = \|g\|_\infty. \quad \blacksquare$$

**Definizione 5.7** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Definiamo l'applicazione $N_p : \tilde{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbf{R}_+$ nel seguente modo. Per ogni $\tilde{f} \in \tilde{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ poniamo

$$N_p\left(\tilde{f}\right) := \|f\|_p.$$

**Osservazione 5.8** Per la proposizione precedente $N_p$ è ben definita.

**Proposizione 5.9** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Allora l'applicazione $N_p : \tilde{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbf{R}_+$ è una norma su $\tilde{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Notazione 5.10** Per semplicità identifichiamo le funzioni di $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ con le loro classi di equivalenza e denotiamo ancora con $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ lo spazio $\tilde{L}_p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**Esempio 5.11** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu^{\#})$. Sia $p \in [1, \infty]$. Poniamo

$$l^p := L^p\left(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu^{\#}\right).$$

Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{R}$. La successione $\{a_n\}$ coincide con l'applicazione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{\{n\}}.$$

Allora per ogni $p \in [1, \infty)$ si ha

$$\|\{a_n\}\|_p = \|f\|_p = \left(\int_{\mathbf{N}} |f|^p \, d\mu^{\#}\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}.$$

Inoltre si ha

$$\|\{a_n\}\|_\infty = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(n)| = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n.$$

Quindi per ogni $p \in [1, \infty)$ si ha

$$l^p = \left\{ \{a_n\} \subseteq \mathbf{R} \mid \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Inoltre si ha

$$l^\infty = \left\{ \{a_n\} \subseteq \mathbf{R} \mid \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n < \infty \right\}.$$

**Proposizione 5.12** Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $p, q \in [1, \infty]$ tali che $p \leq q$. Allora

$$L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Sia $q = \infty$. Allora

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty [\mu(X)]^{1/p} < \infty.$$

Quindi $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.
Sia $q < \infty$. Poniamo

$$s := \frac{q}{p}, \quad r := \frac{q}{q-p}.$$

Allora $r$, $s$ sono coniugati e per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^{ps}\right)^{1/s} \left(\int_X d\mu\right)^{1/r} = \\ &= \left(\int_X |f|^q\right)^{p/q} [\mu(X)]^{\frac{q-p}{q}}. \end{aligned}$$

Da questa segue

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q [\mu(X)]^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Quindi $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. ■

## 6.6 Completezza degli spazi $L^p$

**Teorema 6.1** Sia $p \in [1, \infty)$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ una successione di Cauchy. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ che converge q.o. in $X$.

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbf{N}$ esiste $n_k \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > n_k$ risulta

$$\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Inoltre possiamo supporre la successione $\{n_k\} \subseteq \mathbf{N}$ crescente. Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Per ogni $l \in \mathbf{N}$ poniamo

$$g_l := \sum_{k=1}^{l} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|.$$

Per ogni $l \in \mathbf{N}$ si ha $g_l \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ e, tenendo conto della disuguaglianza di Minkowski

$$\|g_l\|_p \leq \sum_{k=1}^{l} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Poniamo

$$g := \lim_{l \to \infty} g_l = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|.$$

Tenendo conto del lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &= \int_X |g|^p \, d\mu = \int_X \left(\lim_{l \to \infty} |g_l|^p\right) d\mu \leq \\ &\leq \varliminf \int_X |g_l|^p \, d\mu = \varliminf \left(\|g_l\|_p^p\right) \leq 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Allora $g$ è finita q.o. in $X$. Quindi la serie

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$$

converge assolutamente q.o. in $X$. Poiché la somma parziale $(k-1)$-esima di tale serie coincide con $f_{n_k}$, la successione $\{f_{n_k}\}$ converge q.o. in $X$. ■

**Teorema 6.2** Sia $\{f_n\} \subseteq L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ una successione di Cauchy. Allora $\{f_n\}$ converge q.o. in $X$.

*Dimostrazione.* Per ogni $\varepsilon \in \mathbf{N}$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ sia $N_{n,m} \in \mathcal{N}_\mu$ tale che per ogni $x \in CN_{n,m}$ risulta

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Poniamo

$$N := \bigcup_{n,m=1}^{\infty} N_{n,m}.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$. Inoltre per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ si ha

$$CN \subseteq CN_{n,m}.$$

Sia $x \in CN$ arbitrario. Allora per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

cioè la successione $\{f_n(x)\} \subseteq \mathbf{R}$ è di Cauchy. Poiché $\mathbf{R}$ è completo, tale successione è convergente.

Allora la successione $\{f_n\}$ converge q.o. in $X$. ■

**Teorema 6.3** *(F. Riesz)* Sia $p \in [1, \infty]$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ una successione di Cauchy. Allora esiste $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

$(a)$ Sia $p \in [1, \infty)$. Sia $\{f_{n_k}\}$ una sottosuccessione di $\{f_n\}$ convergente q.o. in $X$. Poniamo

$$N := \mathcal{C}\left\{x \in X \mid \text{esiste} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)\right\}.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$. Per ogni $x \in \mathcal{C}N$ poniamo

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Mostriamo che

$$f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Per il lemma di Fatou per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_X |f - f_n|^p \, d\mu &= \int_X \left(\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_n|^p\right) d\mu \leq \\ &\leq \varliminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu.\end{aligned}$$

Allora, poiché per ogni $n > n_\varepsilon$ e per ogni $k$ tale che $n_k > n_\varepsilon$ si ha

$$\int_X |f_{n_k} - f_n|^p \, d\mu < \varepsilon^p,$$

per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$\int_X |f - f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p,$$

quindi

$$f - f_n \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Allora

$$f = (f - f_n) + f_n \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Mostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$\|f - f_n\|_p = \left(\int_X |f - f_n|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

$(b)$ Sia $p = \infty$. Poniamo

$$N_0 := \mathcal{C}\left\{x \in X \mid \text{esiste} \lim_{k\to\infty} f_n(x)\right\}.$$

Allora $N_0 \in \mathcal{N}_\mu$. Per ogni $x \in \mathcal{C}N_0$ poniamo

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Mostriamo che

$$f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$N_n := \mathcal{C}\{x \in X \mid |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty\}.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $N_n \in \mathcal{N}_\mu$. Poniamo

$$N := \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$. Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}_0$ si ha

$$\mathcal{C}N \subseteq \mathcal{C}N_n.$$

Sia $x \in \mathcal{C}N$ arbitrario. Per ogni $n, m > n_\varepsilon$ si ha

$$\left|\|f_n\|_\infty - \|f_m\|_\infty\right| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Quindi la successione $\{\|f_n\|_\infty\} \subseteq \mathbf{R}$ è di Cauchy. Allora, poiché $\mathbf{R}$ è completo, la successione $\{\|f_n\|_\infty\} \subseteq \mathbf{R}$ converge. In particolare esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\|f_n\|_\infty \leq M.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M.$$

Allora

$$|f(x)| \leq M.$$

Quindi $f$ è limitata q.o. in $X$, ovvero

$$f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Mostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Per ogni $x \in \mathcal{C}N_0$ e per ogni $n > n_\varepsilon$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $n > n_\varepsilon$ si ha

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0. \quad ■$$

## 6.7 Separabilità degli spazi $L^p$

**Proposizione 7.1** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty)$. Allora l'insieme delle funzioni semplici misurabili a valori razionali

$$\mathcal{S}_{\mathbf{Q}} := \{s \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}) \mid s(X) \subseteq \mathbf{Q}\}$$

è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ arbitrario. Sia $\{s_n\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ non decrescente tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$0 \leq s_n \leq f_+$$

e tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f_+(x).$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$|f_+ - s_n|^p \leq f_+^p.$$

Poiché $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ si ha $f_+ \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, quindi

$$f_+^p \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Allora, per il teorema di Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|f_+ - s_n\|_p = 0.$$

Sia $\{t_n\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ non decrescente tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$0 \leq t_n \leq f_-$$

e tale che
$$\lim_{n\to\infty} t_n(x) = f_-(x).$$
Analogamente a quanto visto per $\{s_n\}$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} \|f_- - t_n\|_p = 0.$$
Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo
$$\sigma_n := s_n - t_n.$$
Allora
$$\{\sigma_n\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}.$$
Per la disugugaglianza di Minkowski risulta
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n\|_p &= \lim_{n\to\infty} \|(f_+ - s_n) + (f_- - t_n)\|_p \le \\ &\le \lim_{n\to\infty} \|f_+ - s_n\|_p + \lim_{n\to\infty} \|f_- - t_n\|_p = 0.\end{aligned}$$
Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n\|_p = 0.$$
Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta
$$\|f - \sigma_n\|_p < \varepsilon.$$
Per l'arbitrarietà di $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ si ha la tesi. ■

**Lemma 7.2** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, con
$$\mu(X) < \infty.$$
Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che
$$\sigma_0(\mathcal{C}) = \mathcal{A}.$$
Sia
$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_0(\mathcal{C}).$$
Allora per ogni $F \in \mathcal{A}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $G \in \mathcal{A}_0$ tale che
$$\mu(F \backslash G) + \mu(G \backslash F) < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Poniamo
$$\Omega := \{F \in \mathcal{A} \mid \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } G \in \mathcal{A}_0$$
$$\text{tale che } \mu(F\backslash G) + \mu(G\backslash F) < \varepsilon\}.$$
Evidentemente si ha
$$\mathcal{A}_0 \subseteq \Omega.$$
Mostriamo che $\Omega$ è una $\sigma$-algebra.
Evidentemente si ha
$$\emptyset \in \Omega.$$
Sia $F \in \Omega$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $G \in \mathcal{A}_0$ tale che
$$\mu(F\backslash G) + \mu(G\backslash F) < \varepsilon.$$
Allora $\mathcal{C}G \in \mathcal{A}_0$ e risulta
$$\mu((\mathcal{C}F) \setminus (\mathcal{C}G)) + \mu((\mathcal{C}G) \setminus (\mathcal{C}F)) = \mu(E\backslash G) + \mu(G\backslash E) < \varepsilon.$$
Quindi $\mathcal{C}F \in \Omega$.
Sia $\{F_n\} \subseteq \Omega$. Poniamo
$$F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$
Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\{G_n\} \subseteq \mathcal{A}_0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti
$$\mu(F_n\backslash G_n) + \mu(G_n\backslash F_n) < \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{2^n}.$$
Poniamo
$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$
Poiché
$$\begin{aligned} F\backslash G &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap \mathcal{C}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}G_n\right) \subseteq \\ &\subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap \mathcal{C}G_n = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap \mathcal{C}G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n\backslash G_n)\end{aligned}$$
per la $\sigma$-subadditività di $\mu$ si ha
$$\mu(F\backslash G) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n\backslash G_n) < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{4}.$$
Analogamente si ha
$$\mu(G\backslash F) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n\backslash F_n) < \frac{\varepsilon}{4}.$$
Allora
$$\mu(F\backslash G) + \mu(G\backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Per ogni $p \in \mathbf{N}$ poniamo
$$G^{(p)} = \bigcup_{n=1}^{p} G_n.$$
Poiché la successione $\left\{F\backslash G^{(p)}\right\}$ è non crescente e poiché
$$\mu\left(F\backslash G^{(1)}\right) \le \mu(X) < \infty,$$
si ha
$$\mu(F\backslash G) = \mu\left(\bigcap_{p=1}^{\infty}\left(F\backslash G^{(p)}\right)\right) = \lim_{p\to\infty} \mu\left(F\backslash G^{(p)}\right).$$
Sia $\overline{p} \in \mathbf{N}$ tale che
$$\mu\left(F\backslash G^{(\overline{p})}\right) < \mu(F\backslash G) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Allora
$$\mu\left(F\backslash G^{(\overline{p})}\right) + \mu\left(G^{(\overline{p})}\backslash F\right) < \mu(F\backslash G) + \mu(G\backslash F) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Inotre $G^{(\overline{p})} \in \mathcal{A}_0$. Quindi si ha
$$F \in \Omega.$$
Poiché $\Omega$ è una $\sigma$-algebra contenente $\mathcal{A}_0$ si ha
$$\mathcal{A} = \sigma_0(\mathcal{A}_0) \subseteq \Omega,$$
cioè la tesi. ■

**Proposizione 7.3** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, con
$$\mu(X) < \infty.$$
Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che
$$\sigma_0(\mathcal{C}) = \mathcal{A}.$$
Sia
$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_0(\mathcal{C}).$$
Sia
$$\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0} := \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k} \mid n \in \mathbf{N},\ c_1, ..., c_n \in \mathbf{Q},\ G_1, ..., G_n \in \mathcal{A}_0\right\}.$$
Allora $\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0}$ è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

*Dimostrazione.* Mostriamo che $\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0}$ è denso in $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$.
Sia $t \in \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ arbitrario. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siano $c_1, ..., c_n \in \mathbf{Q}$, $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A}$ tali che

$$t = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Poniamo

$$M := \max\{|c_1|, ..., |c_n|\}.$$

Per il lemma precedente esistono $G_1, ..., G_n \in \mathcal{A}_0$ tali che per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ risulti

$$\mu(E_k \backslash G_k) + \mu(G_k \backslash E_k) < \left(\frac{\varepsilon}{nM}\right)^p.$$

Poniamo

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{G_k}.$$

Allora $s \in \mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0}$ e risulta

$$\begin{aligned} \|t - s\|_p &= \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\chi_{E_k} - \chi_{G_k}\right)\right\|_p \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| \left[\mu(E_k \backslash G_k) + \mu(G_k \backslash E_k)\right]^{1/p} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0}$ è denso in $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$. Inoltre per la proposizione precedente $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Quindi $\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0}$ è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. ■

**Teorema 7.4** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura tale che:

(i) lo spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ è separabile;
(ii) la misura $\mu$ è $\sigma$-finita.

Sia $p \in [1, \infty)$. Allora lo spazio $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è separabile.

*Dimostrazione.* $(a)$ Mostriamo che per ogni $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t \in \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$, con

$$\mu(\{t \neq 0\}) < \infty,$$

tale che

$$\|f - t\|_p < \varepsilon.$$

Poiché $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ esiste $s \in \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ tale che

$$\|f - s\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poiché $\mu$ è $\sigma$-finita esiste una successione $\{E_n\} \subseteq \mathcal{A}$ non decrescente tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$\mu(E_n) < \infty$$

e tale che

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$t_n := s\chi_{E_n}.$$

Allora $\{t_n\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{Q}}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\mu(\{t_n \neq 0\}) < \infty$$

Inoltre poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\|t_n - s\|_p^p = \int_{\complement E_n} |s|^p \, d\mu,$$

si ha

$$\lim_{n \to \infty} \|t_n - s\|_p = 0.$$

Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\|t_{\overline{n}} - s\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora

$$\|f - t_{\overline{n}}\|_p \leq \|f - s\|_p + \|t_{\overline{n}} - s\|_p < \varepsilon.$$

$(b)$ Per quanto visto in $(i)$ non è restrittivo supporre

$$\mu(X) < \infty.$$

Poiché $(X, \mathcal{A})$ è separabile esiste una famiglia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ numerabile tale che

$$\sigma_0(\mathcal{C}) = \mathcal{A}.$$

Poniamo

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_0(\mathcal{C}).$$

Poiché $\mathcal{C}$ è numerabile anche $\mathcal{A}_0$ è numerabile. Poniamo

$$\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0} := \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k} \mid n \in \mathbf{N},\ c_1, ..., c_n \in \mathbf{Q},\ G_1, ..., G_n \in \mathcal{A}_0 \right\}.$$

Poiché $\mathcal{A}_0$ e $\mathbf{Q}$ sono numerabili anche $\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0}$ è numerabile.
Inoltre per la proposizione precedente $\mathcal{S}_{\mathbf{Q},\mathcal{A}_0}$ è denso in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Quindi $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è separabile. ■

**Teorema 7.5** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Sia $p \in [1, \infty)$. Allora lo spazio $L^p(\Omega)$ è separabile.

*Dimostrazione.* Denotiamo con $\mathcal{B}(\Omega)$ la $\sigma$-agebra di Borel su $\Omega$

$$\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \cap \Omega.$$

Lo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ è separabile. La misura $\lambda_n$ è $\sigma$-finita. Allora per il teorema precedente lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_n)$ è separabile.
Allora, poiché per ogni $f \in L^p(\Omega)$ esiste $g \in L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_n)$ tale che

$$f = g \quad \lambda_n\text{-q.o. in } \Omega,$$

quindi tale che

$$\|f - g\|_p = 0,$$

si ha la tesi. ■

**Teorema 7.6** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Sia $p \in [1, \infty)$. Allora lo spazio $C_0(\Omega)$ delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in $\Omega$ è denso in $L^p(\Omega)$.

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Teorema 7.7** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto. Allora lo spazio $L^\infty(\Omega)$ non è separabile.

*Dimostrazione.* Sia $\{\omega_i\}_{i \in I}$ una famiglia non numerabile di sottoinsiemi distinti di $\Omega$. Allora $\left\{\chi_{\omega_i}\right\}$ è una famiglia non numerabile di funzioni distinte di $L^\infty(\Omega)$.
Inoltre per ogni $i, j \in I$, con $i \neq j$, risulta

$$\left\|\chi_{\omega_i} - \chi_{\omega_j}\right\|_\infty = 1.$$

Per ogni $i \in I$ poniamo

$$B_i := \left\{ f \in L^\infty(\Omega) \mid \left\|f - \chi_{\omega_i}\right\|_\infty < \frac{1}{2} \right\}.$$

Allora per ogni $i, j \in I$, con $i \neq j$, si ha

$$B_i \cap B_j = \emptyset.$$

Sia $S$ un sottoinsieme denso di $L^\infty(\Omega)$. Allora per ogni $i \in I$ esiste $s \in S$ tale che

$$s \in B_i.$$

Quindi

$$|I| \leq |S|,$$

da cui segue che $S$ non è numerabile. ■

## 6.8 Uniforme convessità degli spazi $L^p$

**Definizione 8.1** Sia $X$ uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|$. La norma si dice *uniformemente convessa* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x, y \in X$, con

$$\|x\| \leq 1, \quad \|y\| \leq 1, \quad \|x-y\| \geq \varepsilon,$$

risulta

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta_\varepsilon.$$

In tal caso lo spazio normato $X$ si dice *uniformemente convesso*.

**Osservazione 8.2** Perché uno spazio normato $X$ sia uniformemente convesso, la palla unitaria

$$B := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

deve essere "abbastanza rotonda".

**Esempio 8.3** Sia $X = \mathbf{R}^2$. Per ogni $p \in [1, \infty]$ definiamo la norma

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p} & \text{se } p \in [1,\infty) \\ \max\{|x|, |y|\} & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Per ogni $p \in (1, \infty)$ la norma $\|\cdot\|_p$ è uniformemente convessa, mentre le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ non sono uniformemente convesse.

**Proposizione 8.4** *(Disuguaglianza di Clarkson)* Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.

(i) Sia $p \in [2, \infty)$. Allora esiste $c > 0$ tale che per ogni $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ risulta

$$\left\|\tfrac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq c\left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \left\|\tfrac{f+g}{2}\right\|_p^p\right).$$

(ii) Sia $p \in (1, 2)$. Allora esiste $c > 0$ tale che per ogni $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ risulta

$$\left\|\tfrac{f-g}{2}\right\|_p^2 \left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{(p-2)/p} \leq c\left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \left\|\tfrac{f+g}{2}\right\|_p^p\right).$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Teorema 8.5** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in (1, \infty)$. Allora $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uniformemente convesso.

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siano $f, g \in L^p$ tali che

$$\|f\|_p \leq 1, \quad \|g\|_p \leq 1, \quad \|f-g\|_p \geq \varepsilon.$$

Sia $p \in [2, \infty)$. Allora, tenendo conto della disuguaglianza di Clarkson, si ha

$$\begin{aligned} \left\|\tfrac{f+g}{2}\right\|_p &\leq \left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \tfrac{1}{c}\left\|\tfrac{f-g}{2}\right\|_p^p\right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{c}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 1 - \delta_\varepsilon, \end{aligned}$$

avendo posto

$$\delta_\varepsilon := 1 - \left(1 - \frac{1}{c}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0.$$

Sia $p \in (1, 2)$. Allora, tenendo conto della disuguaglianza di Clarkson, si ha

$$\left\|\tfrac{f+g}{2}\right\|_p \leq$$

$$\leq \left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \tfrac{1}{c}\left\|\tfrac{f-g}{2}\right\|_p^2 \left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{\frac{p-2}{p}}\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{1/p}\left(1 - \tfrac{1}{c}\left\|\tfrac{f-g}{2}\right\|_p^2 \left(\tfrac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\right)^{-2/p}\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(1 - \tfrac{1}{c}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{1/p} = 1 - \delta_\varepsilon$$

avendo posto

$$\delta_\varepsilon := 1 - \left(1 - \frac{1}{c}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{1/p} > 0. \quad ■$$

## 6.9 Dualità negli spazi $L^p$

**Lemma 9.1** Siano $p, q \in (1, \infty)$ coniugati. Sia $g \in L^q$. Poniamo

$$h := |g|^{q-2} g.$$

Allora $h \in L^p$ e risulta

$$\int_X gh \, d\mu = \|g\|_q \|h\|_p = \|g\|_q^q = \|h\|_p^p.$$

*Dimostrazione.* Poiché $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ si ha $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Inoltre si ha

$$\|h\|_p^p = \int_X |h|^p \, d\mu = \int_X |g|^{p(q-1)} \, d\mu = \int_X |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q < \infty.$$

Quindi $h \in L^p$. Poiché $gh = |g|^q$ si ha

$$\int_X gh \, d\mu = \int_X |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q = \|h\|_p^p.$$

Poiché

$$\|h\|_p = \|g\|_q^{q/p},$$

si ha

$$\int_X gh \, d\mu = \|h\|_p^p = \left(\|g\|_q^{q/p}\right)^{p-1} \|h\|_p = \|g\|_q \|h\|_p. \quad ■$$

**Proposizione 9.2** Siano $p, q \in (1, \infty)$ coniugati. Sia $g \in L^q$. Sia $F : L^p \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$F(f) := \int_X gf \, d\mu \qquad (f \in L^p).$$

Allora $F \in (L^p)^*$ e risulta

$$\|F\| = \|g\|_q.$$

*Dimostrazione.* Evidentemente $F$ è lineare.
Per la disuguaglianza di Hölder per ogni $f \in L^p$ si ha

$$|F(f)| = \left|\int_X gf \, d\mu\right| \leq \int_X |gf| \, d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p.$$

Quindi $F$ è limitato.
Mostriamo che

$$\|F\| = \|g\|_q.$$

Poiché per ogni $f \in L^p$, con $f \neq 0$, si ha

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q,$$

si ha
$$\|F\| \leq \|g\|_q .$$
Poniamo
$$h := |g|^{q-2} g.$$
Per il lemma precedente si ha $h \in L^p$ e risulta
$$F(h) = \|g\|_q \|h\|_p .$$
Allora
$$\frac{|F(h)|}{\|h\|_p} = \frac{F(h)}{\|h\|_p} = \|g\|_q .$$
Quindi
$$\|F\| \geq \|g\|_q . \blacksquare$$

**Teorema 9.3** Sia $p \in (1,\infty)$. Sia $F \in (L^p)^*$ tale che $\|F\| = 1$. Consideriamo l'iperpiano
$$H := \{f \in L^p \mid F(f) = 1\}$$
e la sfera unitaria
$$S := \left\{f \in L^p \mid \|f\|_p = 1\right\}.$$
Allora esiste $h \in L^p$ tale che
$$H \cap S = \{h\}.$$
Inoltre per ogni $f \in H$ risulta
$$\|f\|_p \geq \|h\|_p = 1.$$

*Dimostrazione.* Poiché
$$\|F\| = \sup_{\substack{f \in L^p \\ \|f\|_p = 1}} |F(f)|$$
esiste una successione $\{f_n\}$ con
$$\|f_n\|_p = 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}$$
tale che
$$\lim_{n\to\infty} |F(f_n)| = \|F\| = 1.$$
Possiamo assumere $F(f_n) > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Infatti se $F(f_n) \leq 0$ sostituiamo $f_n$ con $[sgn\ F(f_n)]\, f_n$. Quindi
$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = 1.$$
Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ risulta
$$F(f_n) > 1 - \delta_\varepsilon,$$
dove
$$\delta_\varepsilon := \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{c}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} & \text{se } p \in [2,\infty), \\ 1 - \left(1 - \frac{1}{c}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{1/p} & \text{se } p \in (1,2) \end{cases}$$
è la costante che compare nella dimostrazione dell'uniforme convessità di $\|\cdot\|_p$.
Per ogni $n, m > n_\varepsilon$ risulta
$$\begin{aligned} \left\|\frac{f_n + f_m}{2}\right\|_p &= \|F\| \left\|\frac{f_n + f_m}{2}\right\|_p \geq F\left(\frac{f_n + f_m}{2}\right) = \\ &= \frac{F(f_n) + F(f_m)}{2} > 1 - \delta_\varepsilon. \end{aligned}$$
Allora, poiché $L^p$ è uniformemente convesso, si ha
$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$
Quindi la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy in $L^p$.
Allora, poiché $L^p$ è completo, esiste $h \in L^p$ tale che
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - h\|_p = 0.$$
Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$\left|\|f_n\|_p - \|h\|_p\right| \leq \|f_n - h\|_p$$
si ha
$$\lim_{n\to\infty} \left|\|f_n\|_p - \|h\|_p\right| = 0,$$
ovvero
$$\|h\|_p = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 1.$$
Quindi
$$h \in S.$$
Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$|F(f_n) - F(h)| = |F(f_n - h)| \leq \|F\| \, \|f_n - h\|_p$$
si ha
$$\lim_{n\to\infty} |F(f_n) - F(h)| = 0,$$
ovvero
$$F(h) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = 1.$$
Quindi
$$h \in H.$$
Inoltre per ogni $f \in H$ risulta
$$\|f\|_p = \|F\| \, \|f\|_p \geq F(f) = 1 = \|h\|_p .$$
Supponiamo per assurdo che esista $\tilde{h} \in H \cap S$ tale che
$$\left\|h - \tilde{h}\right\| \geq \varepsilon > 0.$$
Allora, poiché $L^p$ è uniformemente convesso, si ha
$$\left\|\frac{h + \tilde{h}}{2}\right\|_p \leq 1 - \delta_\varepsilon,$$
D'altra parte si ha
$$\begin{aligned} \left\|\frac{h + \tilde{h}}{2}\right\|_p &= \|F\| \left\|\frac{h + \tilde{h}}{2}\right\|_p \geq F\left(\frac{h + \tilde{h}}{2}\right) = \\ &= \frac{F(h) + F\left(\tilde{h}\right)}{2} = 1. \end{aligned}$$
Quindi si ha l'assurdo. $\blacksquare$

**Lemma 9.4** Sia $p \in (1,\infty)$. Siano $h, f \in L^p$. Allora l'applicazione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}_+$
$$t \longrightarrow \|h + tf\|_p^p$$
è derivabile e risulta
$$\left(\frac{d}{dt} \|h + tf\|_p^p\right)\Big|_{t=0} = p \int_X \left(|h|^{p-2} h\right) f \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in X$, $t \in \mathbf{R}$ poniamo
$$w(x,t) := |h(x) + tf(x)|^p .$$
Si ha
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = p\,|h(x) + tf(x)|^{p-2} [h(x) + tf(x)]\, f(x)$$
Sia $\tau > 0$. Allora per ogni $t \in (-\tau, \tau)$ si ha
$$\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right| = p\,|h + tf|^{p-1} |f| \leq p\,(|h| + \tau |f|)^{p-1} |f| .$$
Mostriamo che il secondo membro della relazione precedente è integrabile. Sia $q \in (1,\infty)$ il coniugato di $p$. Per la disuguaglianza di Hölder si ha
$$\int_X (|h| + \tau |f|)^{p-1} |f| \, d\mu \leq \left\||h| + \tau |f|^{p-1}\right\|_q \|f\|_p .$$

Poiché $h, f \in L^p$ si ha

$$\left\|(|h| + \tau |f|)^{p-1}\right\|_q = \left[\int_X (|h| + \tau |f|)^{(p-1)q} \, d\mu\right]^{1/q} = \left[\int_X (|h| + \tau |f|)^{p} \, d\mu\right]^{1/q} = \|(|h| + \tau |f|)\|_p^{p/q} < \infty.$$

Allora

$$\int_X (|h| + \tau |f|)^{p-1} |f| \, d\mu < \infty.$$

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ottiene

$$\frac{d}{dt} \|h + tf\|_p^p = \frac{d}{dt} \int_X |h + tf|^p \, d\mu = \int_X \frac{\partial w}{\partial t} \, d\mu = p \int_X |h + tf|^{p-2} (h + tf) f \, d\mu$$

da cui segue la tesi. ■

**Teorema 9.5** *(F. Riesz)* Siano $p, q \in (1, \infty)$ coniugati. Sia $F \in (L^p)^*$. Allora esiste un unico $g \in L^q$ tale che per ogni $f \in L^p$ risulta

$$F(f) = \int_X gf \, d\mu.$$

Inoltre risulta

$$\|F\| = \|g\|_q.$$

*Dimostrazione.* Se $\|F\| = 0$, scegliamo $g = 0$. Sia $F \neq 0$. Possiamo assumere $\|F\| = 1$. Infatti se $\|F\| \neq 1$ consideriamo $F/\|F\|$ al posto di $F$. Consideriamo l'iperpiano

$$H := \{f \in L^p \mid F(f) = 1\}$$

e la sfera unitaria

$$S := \left\{f \in L^p \mid \|f\|_p = 1\right\}.$$

Sia $h$ l'unico elemento di $H \cap S$. Sia $f \in L^p$. Poniamo

$$m := f - F(f) h.$$

Poiché $f, h \in L^p$ si ha $m \in L^p$ e risulta

$$F(m) = F(f) - F(f) F(h) = F(f) - F(f) = 0.$$

Quindi, per ogni $t \in \mathbf{R}$ risulta

$$h + tm \in H.$$

Infatti

$$F(h + tm) = F(h) + tF(m) = F(h) = 1.$$

Allora, per ogni $t \in \mathbf{R}$ risulta

$$\|h + tm\|_p \geq \|h\|_p = 1.$$

Quindi l'applicazione

$$t \to \|h + tm\|_p^p$$

ha un minimo per $t = 0$. Allora, tenendo conto del lemma precedente, si ha

$$\left(\frac{d}{dt} \|h + tm\|_p^p\right)\Big|_{t=0} = p \int_X \left(|h|^{p-2} h\right) m \, d\mu = 0.$$

Per la definizione di $m$ si ha

$$\int_X \left(|h|^{p-2} h\right) f \, d\mu = F(f) \int_X \left(|h|^{p-2} h\right) h \, d\mu = F(f) \int_X |h|^p \, d\mu = F(f) \|h\|_p^p = F(f).$$

Poniamo $g := |h|^{p-2} h$. Per il lemma 9.1 si ha $g \in L^q$ e risulta

$$F(f) = \int_X gf \, d\mu.$$

Come nella dimostrazione della proposizione 9.2 si dimostra che

$$\|F\| = \|g\|_q.$$

Dimostriamo l'unicità di $g$. Supponiamo per assurdo che esista $\tilde{g} \in L^q$ con $\tilde{g} \neq g$ tale che per ogni $f \in L^p$ risulta

$$F(f) = \int_X \tilde{g} f \, d\mu.$$

Allora per ogni $f \in L^p$ si ha

$$\int_X (\tilde{g} - g) f \, d\mu = 0.$$

In particolare, scegliendo

$$f = |\tilde{g} - g|^{q-2} (\tilde{g} - g) \in L^p$$

si ottiene

$$\int_X |\tilde{g} - g|^q \, d\mu = 0,$$

da cui segue $\tilde{g} = g$. ■

**Corollario 9.6** Siano $p, q \in (1, \infty)$ coniugati. Sia $\tau : L^q \longrightarrow (L^p)^*$ l'applicazione definita nel seguente modo. Per ogni $g \in L^q$ definiamo l'applicazione $\tau(g) : L^p \longrightarrow \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $f \in L^p$ poniamo

$$[\tau(g)](f) := \int_X gf \, d\mu.$$

Allora l'applicazione $\tau$ è un isomorfismo isometrico.

*Dimostrazione.* Mostriamo che $\tau$ è un omomorfismo. Siano $g_1, g_2 \in L^q$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Poniamo

$$F_1 := \tau(g_1), \quad F_2 := \tau(g_2), \quad F := \tau(g_1 + \lambda g_2).$$

Per ogni $f \in L^p$ si ha

$$F(f) = \int_X (g_1 + \lambda g_2) f \, d\mu = \int_X g_1 f \, d\mu + \lambda \int_X g_2 f \, d\mu = F_1(f) + \lambda F_2(f).$$

Allora

$$F = F_1 + \lambda F_2,$$

ovvero

$$\tau(g_1 + \lambda g_2) = \tau(g_1) + \lambda \tau(g_2).$$

Dal teorema di Riesz segue che $\tau$ è biunivoca e isometrica. ■

**Corollario 9.7** Siano $p, q \in (1, \infty)$ coniugati. Allora

$$(L^p)^* \cong L^q.$$

**Corollario 9.8** Sia $p \in (1, \infty)$. Allora lo spazio $L^p$ è riflessivo.

*Dimostrazione.* Sia $q \in (1, \infty)$ il coniugato di $p$. Per il corollario precedente

$$(L^p)^* \cong L^q \quad \text{e} \quad (L^q)^* \cong L^p.$$

Allora

$$(L^p)^{**} \cong L^p. \quad ■$$

**Teorema 9.9** *(Milman)* Sia $X$ uno spazio di Banach uniformemente convesso. Allora $X$ è riflessivo.

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Osservazione 9.10** Per $p = q = 2$ si ha

$$(L^2)^* \cong L^2.$$

In particolare per ogni $F \in (L^2)^*$ esiste un unico $g \in L^2$ tale che per ogni $f \in L^2$ risulti

$$F(f) = \int_X g f \, d\mu.$$

ovvero

$$\langle F, f \rangle = (g, f),$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle : (L^2)^* \times L^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ è l'applicazione di dualità e $(\cdot, \cdot) : L^2 \times L^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ è il prodotto scalare nello spazio di Hilbert $L^2$.

**Teorema 9.11** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura $\sigma$-finita. Sia $F \in (L^1)^*$. Allora esiste un unico $g \in L^\infty$ tale che per ogni $f \in L^1$ risulti

$$F(f) = \int_X g f \, d\mu.$$

Inoltre risulta

$$\|F\| = \|g\|_\infty .$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Corollario 9.12** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura $\sigma$-finita. Allora

$$(L^1)^* \cong L^\infty.$$

**Corollario 9.13** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura $\sigma$-finita. Allora, a meno di isomorfismi, si ha

$$L^1 \subseteq (L^1)^{**} = (L^\infty)^* .$$

**Osservazione 9.14** In generale l'inclusione precedente è stretta, ovvero lo spazio $L^1$ non è riflessivo. Ad esempio $l^1$ non è riflessivo.

**Osservazione 9.15** Poiché in generale lo spazio $L^1$ non è riflessivo, anche il suo duale $L^\infty$ in generale non è riflessivo.

# Capitolo 7
# Risultati di convergenza

## 7.1 Richiami

**Definizione 1.1** Siano $\{f_n\} \subseteq \mathbf{R}^X$, $f \in \mathbf{R}^X$. Si dice che $\{f_n\}$ *converge puntualmente* ad $f$ se per ogni $x \in X$ risulta

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

ovvero se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definizione 1.2** Siano $\{f_n\} \subseteq \mathbf{R}^X$, $f \in \mathbf{R}^X$. Si dice che $\{f_n\}$ *converge uniformemente* ad $f$ se

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $x \in X$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definizione 1.3** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Si dice che $\{f_n\}$ *converge* ad $f$ *quasi ovunque* in $X$ se

$$\mathcal{C}\left\{x \in X \mid \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)\right\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

**Definizione 1.4** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Siano $\{f_n\} \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Si dice che $\{f_n\}$ *converge* ad $f$ *in $L^p$* se

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon.$$

## 7.2 Convergenza in misura

**Notazione 2.1** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$B_n^\varepsilon := \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}.$$

**Definizione 2.2** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. Si dice che $\{f_n\}$ *converge* ad $f$ *in misura* se per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_n^\varepsilon) = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\sigma > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \sigma.$$

**Osservazione 2.3** Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$B_n^\varepsilon \in \mathcal{A}.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\overline{\lim} B_n^\varepsilon \in \mathcal{A}.$$

**Teorema 2.4** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$;

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\mu\left(\overline{\lim} B_n^\varepsilon\right) = 0.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$E := \left\{x \in X \mid \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)\right\}.$$

Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$A_\varepsilon := \overline{\lim} B_n^\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon\right).$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Per ipotesi $\mathcal{C}E \in \mathcal{N}_\mu$.
Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $x \in A_\varepsilon$. Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ esiste $n \geq k$ tale che $x \in B_n^\varepsilon$ ovvero tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Quindi

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \neq f(x),$$

cioè $x \in \mathcal{C}E$. Quindi

$$A_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}E.$$

Allora

$$A_\varepsilon \in \mathcal{N}_\mu,$$

cioè

$$\mu\left(\overline{\lim} B_n^\varepsilon\right) = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per ipotesi si ha

$$\mu\left(\overline{\lim} B_n^\varepsilon\right) = 0,$$

quindi

$$A_\varepsilon \in \mathcal{N}_\mu.$$

Sia $x \in \mathcal{C}A_\varepsilon$. Allora esiste $k \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq k$ risulta $x \notin B_n^\varepsilon$, cioè risulta

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Allora

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

cioè $x \in E$. Quindi

$$\mathcal{C}A_\varepsilon \subseteq E,$$

da cui segue

$$\mathcal{C}E \subseteq A_\varepsilon.$$

Allora

$$\mathcal{C}E \in \mathcal{N}_\mu. \blacksquare$$

**Teorema 2.5** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$;

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon\right) = 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$A_k^\varepsilon := \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ la successione $\{A_k^\varepsilon\}$ è non crescente e risulta

$$\mu(A_1^\varepsilon) \leq \mu(X) < \infty.$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\begin{aligned}\mu\left(\overline{\lim} B_n^\varepsilon\right) &= \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^\varepsilon\right) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k^\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Allora la conclusione segue dal teorema precedente. ∎

**Teorema 2.6** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$. Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura.

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon\right) = 0.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$B_k^\varepsilon \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu(B_k^\varepsilon) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^\varepsilon\right).$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k^\varepsilon) = 0,$$

quindi $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura. ∎

**Osservazione 2.7** Se lo spazio di misura non è finito, la convergenza q.o. non implica la convergenza in misura, come mostra il seguente esempio.

**Esempio 2.8** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbf{R}, \mathcal{L}(\mathbf{R}), \lambda)$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$f_n = \chi_{[n,\infty)}.$$

Sia $f \equiv 0$ in $\mathbf{R}$. Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ puntualmente, e quindi q.o. in $\mathbf{R}$.

D'altra parte per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$B_n^{1/2} = \left\{f_n \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu\left(B_n^{1/2}\right) = \mu\left(\left\{f_n \geq \frac{1}{2}\right\}\right) = \infty.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n^{1/2}\right) = \infty.$$

Quindi $\{f_n\}$ non converge ad $f$ in misura.

**Osservazione 2.9**
La convergenza in misura non implica la convergenza q.o., come mostra il seguente esempio.

**Esempio 2.10** Sia $I = [0,1]$. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu) = (I, \mathcal{L}(I), \lambda)$. Sia $\{I_n\}$ la successione dei sottointervalli chiusi di $I$ ottenuti per bisezioni successive:

$$I_0 = [0,1],$$

$$I_1 = \left[0, \tfrac{1}{2}\right], \quad I_2 = \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],$$

$$I_3 = \left[0, \tfrac{1}{4}\right], \quad I_4 = \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right], \quad I_5 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right], \quad I_6 = \left[\tfrac{3}{4}, 1\right], \quad \ldots$$

Sia $\{\chi_n\}$ la successione delle funzioni caratteristiche degli intervalli $I_n$ (detta *successione di Rademacher*). Sia $f \equiv 0$ in $I$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$B_n^\varepsilon = \{\chi_n \geq \varepsilon\}.$$

Per ogni $\varepsilon \in (0,1]$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$B_n^\varepsilon = I_n, \quad \mu(B_n^\varepsilon) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Per ogni $\varepsilon \in (1,\infty)$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$B_n^\varepsilon = \emptyset, \quad \mu(B_n^\varepsilon) = 0.$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n^\varepsilon) = 0,$$

quindi $\{\chi_n\}$ converge ad $f$ in misura.

D'altra parte per ogni $x \in [0,1]$ la successione $\{\chi_n(x)\}$ non converge, quindi $\{\chi_n\}$ non converge q.o. in $X$.

**Teorema 2.11** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ che converge ad $f$ q.o. in $X$.

*Dimostazione.* Per ogni $p \in \mathbf{N}$ sia $n_p \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq n_p$ risulta

$$\mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{2^p}\right\}\right) < \frac{1}{2^p}.$$

Allora in particolare per ogni $p \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu\left(\left\{\left|f_{n_p} - f\right| \geq \frac{1}{2^p}\right\}\right) < \frac{1}{2^p}.$$

Per ogni $p \in \mathbf{N}$ poniamo

$$B_p := \left\{\left|f_{n_p} - f\right| \geq \frac{1}{2^p}\right\},$$

quindi per ogni $p \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu(B_p) < \frac{1}{2^p}.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$A_k := \bigcup_{p=k}^{\infty} B_p.$$

Poniamo

$$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{\lim} B_p.$$

Poiché

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu(B_p) < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} = 1 < \infty,$$

per il lemma di Borel-Cantelli si ha

$$\mu(A) = \mu\left(\overline{\lim} B_p\right) = 0.$$

Inoltre per ogni $x \in \mathcal{C}A$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p \geq k$ si ha $x \in \mathcal{C}B_p$ ovvero

$$\left|f_{n_p}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{2^p}.$$

Quindi per ogni $x \in \mathcal{C}A$ si ha

$$\lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x) = f(x).$$

Allora

$$\mathcal{C}A \subseteq \left\{x \in X \mid \lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x) = f(x)\right\},$$

da cui segue

$$\mathcal{C}\left\{x \in X \mid \lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x) = f(x)\right\} \subseteq A.$$

Per monotonia di $\mu$ si ha

$$\mu\left(\mathcal{C}\left\{x \in X \mid \lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x) = f(x)\right\}\right) = 0,$$

cioè la tesi. ■

**Teorema 2.12** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura. Allora

$$\underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu.$$

*Dimostrazione.* $(a)$ Sia

$$\int_X f \, d\mu < \infty.$$

Supponiamo per assurdo che

$$\underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu < \int_X f \, d\mu.$$

Siano $\delta > 0$ e $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulti

$$\int_X f_{n_k} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu - \delta.$$

Allora

$$\underline{\lim} \int_X f_{n_k} \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu - \delta.$$

Poiché $\{f_{n_k}\}$ converge ad $f$ in misura, per il teorema precedente, esiste una sottosuccessione, che denotiamo ancora con $\{f_{n_k}\}$ per semplicità, che converge ad $f$ q.o. in $X$.
Allora per il lemma di Fatou si ha

$$\underline{\lim} \int_X f_{n_k} \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu,$$

da cui l'assurdo.
$(b)$ Sia

$$\int_X f \, d\mu = \infty.$$

Supponiamo per assurdo

$$\underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu < \infty.$$

Siano $L > 0$ e $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulti

$$\int_X f_{n_k} \, d\mu \leq L.$$

Allora

$$\underline{\lim} \int_X f_{n_k} \, d\mu \leq L.$$

Poiché $\{f_{n_k}\}$ converge ad $f$ in misura, per il teorema precedente, esiste una sottosuccessione, che denotiamo ancora con $\{f_{n_k}\}$ per semplicità, che converge ad $f$ q.o. in $X$.

Allora per il lemma di Fatou si ha

$$\underline{\lim} \int_X f_{n_k} \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu = \infty,$$

da cui l'assurdo. ■

**Teorema 2.13** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite q.o. tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura. Supponiamo che esista $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulti

$$|f_n| \leq g.$$

Allora $\{f_n\} \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

In particolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ una sottosuccessione che converge ad $f$ q.o. in $X$. Allora si ha

$$|f| \leq g \quad \text{q.o. in } X.$$

Inoltre, poichè $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura, $\{2g - |f_n - f|\}$ converge a $2g$ in misura.
Per il resto la dimostrazione è la stessa del teorema di Lebesgue, utilizzando la variante del lemma di Fatou data dal teorema precedente. ■

**Teorema 2.14** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $p \in [1, \infty]$. Siano $\{f_n\} \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ in $L^p$. Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $\{f_n\}$ non converga ad $f$ in misura. Allora esistono $\varepsilon, \sigma > 0$ tali che per infiniti $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \geq \sigma.$$

Allora per infiniti $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p &= \int_X |f - f_n|^p \, d\mu \geq \\
&\geq \int_{\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f - f_n|^p \, d\mu \geq \\
&\geq \varepsilon^p \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \geq \varepsilon^p \sigma,
\end{aligned}$$

contro l'ipotesi che $\{f_n\}$ converge ad $f$ in $L^p$. ■

## 7.3 Convergenza quasi uniforme

**Definizione 3.1** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite. Si dice che $\{f_n\}$ converge ad $f$ *quasi uniformemente* se per ogni $\delta > 0$ esiste $E \in \mathcal{A}$, con

$$\mu(\mathcal{C}E) < \delta,$$

tale che $\{f_n|_E\}$ converge uniformemente a $f|_E$, ovvero tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $x \in E$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Teorema 3.2** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ quasi uniformemente. Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ in misura.

*Dimostrazione.* Siano $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ arbitrari. Sia $E \in \mathcal{A}$, con

$$\mu(\mathcal{C}E) < \delta,$$

tale che esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $x \in E$ risulti

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $x \in E$ risulti

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $n > \overline{n}$ si ha

$$E \subseteq \{|f_n - f| < \varepsilon\},$$

quindi

$$\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq CE.$$

Per la monotonia di $\mu$, per ogni $n > \overline{n}$ si ha

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(CE) < \delta.$$

Per l'arbitrarietà di $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ si ha la tesi. ■

**Teorema 3.3** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ quasi uniformemente. Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$.

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia $E_k \in \mathcal{A}$, con

$$\mu(CE_k) < \frac{1}{k},$$

tale che $\left\{ f_n|_{E_k} \right\}$ converge uniformemente a $f|_{E_k}$. Poniamo

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in E_k$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Allora per ogni $x \in E$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Quindi

$$E \subseteq \left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\},$$

da cui segue

$$C\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\} \subseteq CE.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$C\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\} \subseteq CE = \bigcap_{l=1}^{\infty} CE_l \subseteq CE_k.$$

Quindi, per la monotonia di $\mu$, per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu\left(C\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}\right) \leq \mu(CE_k) < \frac{1}{k}.$$

Per l'arbitrarietà di $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\mu\left(C\left\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}\right) = 0,$$

cioè $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$. ■

**Proposizione 3.4** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $\{f_n\}$ converge ad $f$ in $L^\infty$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0;$$

(ii) esiste $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che $\left\{ f_n|_{CN} \right\}$ converge a $\left\{ f_n|_{CN} \right\}$ uniformemente, ovvero tale che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in CN} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulta

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $N_n \in \mathcal{N}_\mu$ tale che

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in CN_n} |f_n(x) - f(x)|.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in CN_n$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Poniamo

$$N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n.$$

Allora $N \in \mathcal{N}_\mu$. Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in CN$ risulta

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Quindi per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $x \in CN$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Allora per ogni $n > \overline{n}$ si ha

$$\sup_{x\in CN} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ si ha

$$\sup_{x\in CN} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $n > \overline{n}$ si ha

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{x\in CN} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad ■$$

**Teorema 3.5** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ in $L^\infty$. Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ quasi uniformemente.

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente esiste $N \in \mathcal{N}_\mu$ tale che $\left\{ f_n|_{CN} \right\}$ converge a $\left\{ f_n|_{CN} \right\}$ uniformemente. Allora per ogni $\delta > 0$ esiste $N \in \mathcal{A}$, con

$$\mu(N) = 0 < \delta,$$

tale che $\left\{ f_n|_{CN} \right\}$ converge a $\left\{ f_n|_{CN} \right\}$ uniformemente. ■

**Teorema 3.6** *(Severini-Egorov)* Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ funzioni finite tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$. Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ quasi uniformemente.

*Dimostrazione.* Sia $\delta > 0$ arbitrario. Sia $m \in \mathbf{N}$ arbitrario.
Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$B_n^{1/m} := \left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$A_k^{1/m} := \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n^{1/m}.$$

Poniamo infine

$$A^{1/m} := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^{1/m} = \overline{\lim} B_n^{1/m}.$$

Poiché $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$, si ha

$$\mu\left(A^{1/m}\right) = \mu\left(\overline{\lim} B_n^{1/m}\right) = 0.$$

Poiché la successione $\left\{A_k^{1/m}\right\}$ è non crescente e poiché

$$\mu\left(A_1^{1/m}\right) \leq \mu(X) < \infty,$$

si ha
$$\mu\left(A^{1/m}\right)=\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k^{1/m}\right)=\lim_{k\to\infty}\mu\left(A_k^{1/m}\right).$$
Quindi
$$\lim_{k\to\infty}\mu\left(A_k^{1/m}\right)=0.$$
Sia $k_m\in\mathbf{N}$ tale che
$$\mu\left(A_{k_m}^{1/m}\right)<\frac{\delta}{2^m}.$$
Poniamo
$$F_m:=\mathcal{C}A_{k_m}^{1/m}=\bigcap_{n=k_m}^{\infty}\mathcal{C}B_n^{1/m}.$$
Allora
$$\mu\left(\mathcal{C}F_m\right)=\mu\left(A_{k_m}^{1/m}\right)<\frac{\delta}{2^m}.$$
Inoltre per ogni $x\in F_m$ e per ogni $n>k_m$ si ha $x\in\mathcal{C}B_n^{1/m}$, ovvero
$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}.$$
Quindi per ogni $n>k_m$ si ha
$$\sup_{x\in F_m}|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}.$$
Poniamo
$$F:=\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m.$$
Allora
$$\mathcal{C}F=\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathcal{C}F_m,$$
da cui segue
$$\mu(\mathcal{C}F)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\mu(\mathcal{C}F_m)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^m}=\delta.$$
Inoltre per ogni $m\in\mathbf{N}$ si ha
$$F=\bigcap_{l=1}^{\infty}F_l\subseteq F_m,$$
Quindi, per ogni $m\in\mathbf{N}$ e per ogni $n\geq n_m$ si ha
$$\sup_{x\in F}|f_n(x)-f(x)|\leq\sup_{x\in F_m}|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{m}.$$
Allora per ogni $m\in\mathbf{N}$ si ha
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in F}|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{m}.$$
Per l'arbitrarietà di $m\in\mathbf{N}$ si ha
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in F}|f_n(x)-f(x)|=0.\quad\blacksquare$$

**Osservazione 3.7** Se lo spazio di misura non è finito la convergenza q.o. non implica la convergenza quasi uniforme. Infatti in questo caso la convergenza q.o. non implica la convergenza in misura mentre in generale la convergenza quasi uniforme implica la convergenza in misura.

**Teorema 3.8** Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio di misura. Siano $\{f_n\}\subseteq\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$, $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{A})$ funzioni finite tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ q.o. in $X$. Supponiamo che esista $g\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ tale che per ogni $n\in\mathbf{N}$ risulti
$$|f_n|\leq g.$$
Allora $\{f_n\}$ converge ad $f$ quasi uniformemente.

*Dimostrazione.* Utilizziamo le stesse notazioni usate nella dimostrazione del teorema precedente. Sia $m\in\mathbf{N}$ arbitrario. Mostriamo che
$$\mu\left(A_1^{1/m}\right)<\infty,$$
dove
$$A_1^{1/m}:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{|f_n-f|\geq\frac{1}{m}\right\}.$$
Per ogni $n\in\mathbf{N}$ si ha
$$|f_n-f|\leq 2g\quad\text{q.o. in }X.$$
Quindi, a meno di insiemi di misura nulla, per ogni $n\in\mathbf{N}$ si ha
$$\left\{|f_n-f|\geq\frac{1}{m}\right\}\subseteq\left\{g\geq\frac{1}{2m}\right\}.$$
Allora, a meno di insiemi di misura nulla, si ha
$$A_1^{1/m}\subseteq\left\{g\geq\frac{1}{2m}\right\}.$$
Poiché $g\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ si ha
$$\mu\left(\left\{g\geq\frac{1}{2m}\right\}\right)<\infty.$$
Per la monotonia di $\mu$ si ha
$$\mu\left(A_1^{1/m}\right)\leq\mu\left(\left\{g\geq\frac{1}{2m}\right\}\right)<\infty.$$
Per il resto la dimostrazione è la stessa del teorema precedente. $\blacksquare$

# Capitolo 8
# Misure prodotto

## 8.1 Prodotto di spazi misurabili

**Definizione 1.1** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Poniamo

$$\mathcal{R} := \{E_1 \times E_2 \mid E_1 \in \mathcal{A}_1,\ E_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

Gli elementi di $\mathcal{R}$ sono detti *rettangoli misurabili*.
Poniamo

$$\mathcal{R}_s := \mathcal{U}_0(\mathcal{R}).$$

Gli elementi di $\mathcal{R}_s$ sono detti *plurirettangoli misurabili*.

**Osservazione 1.2** La famiglia $\mathcal{R}$ è una semialgebra. Allora la famiglia $\mathcal{R}_s$ è un'algebra e risulta

$$\mathcal{R}_s = \mathcal{A}_0(\mathcal{R}).$$

**Proposizione 1.3** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Allora

$$\sigma_0(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_0(\mathcal{R}_s).$$

*Dimostrazione.* Poiché $\mathcal{R}_s$ è un'algebra si ha

$$\sigma_0(\mathcal{R}_s) = \mathcal{M}_0(\mathcal{R}_s).$$

Inoltre, poiché

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_s \subseteq \sigma_0(\mathcal{R}),$$

si ha

$$\sigma_0(\mathcal{R}_s) = \sigma_0(\mathcal{R}).$$

Quindi si ha la tesi. ■

**Definizione 1.4** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. La $\sigma$-algebra

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \sigma_0(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_0(\mathcal{R}_s)$$

è detta *$\sigma$-algebra prodotto* di $\mathcal{A}_1$ per $\mathcal{A}_2$. Lo spazio misurabile

$$(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$$

è detto *spazio misurabile prodotto* di $(X_1, \mathcal{A}_1)$ per $(X_2, \mathcal{A}_2)$.

**Definizione 1.5** Sia $E \subseteq X_1 \times X_2$. Sia $x_1 \in X_1$. Si dice *$x_1$-sezione* di $E$ l'insieme

$$E_{x_1} := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in E\}.$$

Sia $x_2 \in X_2$. Si dice *$x_2$-sezione* di $E$ l'insieme

$$E_{x_2} := \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in E\}.$$

**Osservazione 1.6** Siano $E_1 \in \mathcal{A}_1$, $E_2 \in \mathcal{A}_2$. Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$(E_1 \times E_2)_{x_1} = \begin{cases} E_2 & \text{se} \quad x_1 \in E_1, \\ \emptyset & \text{se} \quad x_1 \notin E_1 \end{cases}$$

e per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$(E_1 \times E_2)_{x_2} = \begin{cases} E_1 & \text{se} \quad x_2 \in E_2, \\ \emptyset & \text{se} \quad x_2 \notin E_2. \end{cases}$$

**Osservazione 1.7**

(i) Sia $E \subseteq X_1 \times X_2$. Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$(\mathcal{C}E)_{x_1} = \mathcal{C}(E_{x_1})$$

e per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$(\mathcal{C}E)_{x_2} = \mathcal{C}(E_{x_2}).$$

(ii) Sia $\{E_n\} \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$. Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_{x_1}$$

e per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{x_2} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_{x_2}.$$

**Proposizione 1.8** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Sia $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$E_{x_1} \in \mathcal{A}_1$$

e per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$E_{x_2} \in \mathcal{A}_2.$$

*Dimostrazione.* Proviamo la prima affermazione, la seconda è analoga. Poniamo

$$\Omega := \{E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \mid E_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \text{ per ogni } x_1 \in X_1\}.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\Omega = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2.$$

Evidentemente si ha

$$\Omega \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2.$$

Per provare che

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \Omega,$$

mostriamo che $\Omega$ è una $\sigma$-algebra e che $\mathcal{R} \subseteq \Omega$. Allora si ha

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \sigma_0(\mathcal{R}) \subseteq \Omega.$$

*(a)* Mostriamo che $\Omega$ è una $\sigma$-algebra.
*(i)* Evidentemente $\emptyset \in \Omega$.
*(ii)* Sia $E \in \Omega$. Allora per ogni $x_1 \in X_1$ risulta

$$E_{x_1} \in \mathcal{A}_2.$$

Quindi per ogni $x_1 \in X_1$ risulta

$$(\mathcal{C}E)_{x_1} = \mathcal{C}(E_{x_1}) \in \mathcal{A}_2.$$

Allora $\mathcal{C}E \in \Omega$.
*(iii)* Sia $\{E_n\} \subseteq \Omega$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x_1 \in X_1$ risulta

$$(E_n)_{x_1} \in \mathcal{A}_2.$$

Quindi per ogni $x_1 \in X_1$ risulta

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{x_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_{x_1} \in \mathcal{A}_2.$$

Allora

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_2.$$

*(b)* Mostriamo che $\Omega \supseteq \mathcal{R}$.
Sia $E \in \mathcal{R}$. Siano $E_1 \in \mathcal{A}_1$, $E_2 \in \mathcal{A}_2$ tali che

$$E = E_1 \times E_2.$$

Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$E_{x_1} = E_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Quindi $E \in \Omega$. ■

## 8.2 Funzioni misurabili e spazi prodotto

**Proposizione 2.1** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Allora la proiezione

$$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$$

è $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1)$-misurabile e la proiezione

$$p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$

è $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2)$-misurabile.

*Dimostrazione.* Sia $E_1 \in \mathcal{A}_1$. Allora

$$p_1^{-1}(E_1) = E_1 \times X_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2.$$

Analogamente sia $E_2 \in \mathcal{A}_2$. Allora

$$p_2^{-1}(E_2) = X_1 \times E_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 2.2** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Allora la $\sigma$-algebra prodotto $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ è la minima $\sigma$-algebra su $X_1 \times X_2$ che rende misurabili le proiezioni

$$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \quad p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2.$$

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{A}$ una $\sigma$-algebra su $X_1 \times X_2$ tale che $p_1$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$-misurabile e $p_2$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$-misurabile. Dobbiamo dimostrare che

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A},$$

Mostriamo che

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}.$$

Sia $E \in \mathcal{R}$. Siano $E_1 \in \mathcal{A}_1$, $E_2 \in \mathcal{A}_2$ tali che

$$E = E_1 \times E_2.$$

Allora, poiché

$$p_1^{-1}(E_1) \in \mathcal{A}, \quad p_2^{-1}(E_2) \in \mathcal{A},$$

si ha

$$\begin{aligned} E &= E_1 \times E_2 = (E_1 \cap X_1) \times (E_2 \cap X_2) = \\ &= (E_1 \times X_2) \cap (E_2 \times X_1) = \\ &= p_1^{-1}(E_1) \cap p_2^{-1}(E_2) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}.$$

Allora, poichè $\mathcal{A}$ è una $\sigma$-algebra si ha

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \sigma_0(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.3** Sia $f : X \to X_1 \times X_2$ un'applicazione. Le <u>*componenti*</u> di $f$ sono le applicazioni

$$f_1 : X \to X_1, \quad f_2 : X \to X_2$$

definite da

$$f_1 = p_1 \circ f, \quad f_2 = p_2 \circ f.$$

**Teorema 2.4** Siano $(X, \mathcal{A}), (X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Sia $f : X \to X_1 \times X_2$ un'applicazione e siano $f_1 : X \to X_1$ e $f_2 : X \to X_2$ le sue componenti. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$-misurabile;

(ii) $f_1$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$-misurabile e $f_2$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$-misurabile.

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $f$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$-misurabile. Poiché $p_1$ è $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1)$-misurabile, allora $f_1 = p_1 \circ f$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$-misurabile e poiché $p_2$ è $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2)$-misurabile, allora $f_2 = p_2 \circ f$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$-misurabile.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Siano $f_1$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$-misurabile e $f_2$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$-misurabile. Sia $E \in \mathcal{R}$. Siano $E_1 \in \mathcal{A}_1$, $E_2 \in \mathcal{A}_2$ tali che

$$E = E_1 \times E_2.$$

Allora

$$f_1^{-1}(E_1) \in \mathcal{A}, \quad f_2^{-1}(E_2) \in \mathcal{A},$$

da cui segue

$$\begin{aligned} f^{-1}(E) &= f^{-1}(E_1 \times E_2) = f^{-1}\left(p_1^{-1}(E_1) \cap p_2^{-1}(E_2)\right) = \\ &= f^{-1}\left(p_1^{-1}(E_1)\right) \cap f^{-1}\left(p_2^{-1}(E_2)\right) = \\ &= f_1^{-1}(E_1) \cap f_2^{-1}(E_2) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Poiché

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \sigma_0(\mathcal{R})$$

e poiché per ogni $E \in \mathcal{R}$ risulta

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A},$$

la funzione $f$ è $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$-misurabile. $\blacksquare$

**Definizione 2.5** Sia $f : X_1 \times X_2 \to X$. Sia $x_1 \in X_1$. Si dice <u>*$x_1$-traccia*</u> di $f$ l'applicazione

$$f_{x_1} : X_2 \to X$$

definita nel modo seguente. Per ogni $x_2 \in X_2$ poniamo

$$f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2).$$

Sia $x_2 \in X_2$. Si dice <u>*$x_2$-traccia*</u> di $f$ l'applicazione

$$f_{x_2} : X_1 \to X$$

definita nel modo seguente. Per ogni $x_1 \in X_1$ poniamo

$$f_{x_2}(x_1) := f(x_1, x_2).$$

**Osservazione 2.6** Sia $E \subseteq X_1 \times X_2$. Per ogni $x_1 \in X_1$ risulta

$$(\chi_E)_{x_1} = \chi_{E_{x_1}}$$

e per ogni $x_2 \in X_2$ risulta

$$(\chi_E)_{x_2} = \chi_{E_{x_2}}.$$

**Teorema 2.7** Siano $(X, \mathcal{A}), (X_1, \mathcal{A}_1), (X_2, \mathcal{A}_2)$ spazi misurabili. Sia

$$f : X_1 \times X_2 \to X$$

un'applicazione $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathcal{A})$-misurabile. Allora per ogni $x_1 \in X_1$ l'applicazione

$$f_{x_1} : X_2 \to X$$

è $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A})$-misurabile e per ogni $x_2 \in X_2$ l'applicazione

$$f_{x_2} : X_1 \to X$$

è $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$-misurabile.

*Dimostrazione.* Dimostriamo la prima affermazione, la seconda è analoga. Sia $x_1 \in X_1$. Consideriamo l'applicazione $g : X_2 \to X_1 \times X_2$ definita nel seguente modo. Per ogni $x_2 \in X_2$ poniamo

$$g(x_2) := (x_1, x_2).$$

Allora si ha

$$f_{x_1} = f \circ g.$$

Inoltre per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$g_1(x_2) = x_1, \quad g_2(x_2) = x_2.$$

Poiché $g_1$ è costante è $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1)$-misurabile.
Poiché $g_2$ è l'identità di $X_2$ è $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2)$-misurabile.
Allora $g$ è $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$-misurabile.

Quindi $f_{x_1} = f \circ g$ è $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A})$-misurabile. ■

**Definizione 2.8** Siano $(X_1, \mathcal{G}_1), (X_2, \mathcal{G}_2)$ spazi topologici. Poniamo

$$\mathcal{T} := \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{G}_1,\ A_2 \in \mathcal{G}_2\}.$$

La topologia su $X_1 \times X_2$

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 := \mathcal{G}_0(\mathcal{T})$$

è detta topologia prodotto di $\mathcal{G}_1$ per $\mathcal{G}_2$. Lo spazio topologico

$$(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$$

è detto spazio topologico prodotto di $(X_1, \mathcal{G}_1)$ per $(X_2, \mathcal{G}_2)$.

**Osservazione 2.9** La topologia prodotto $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ è la più debole topologia su $X_1 \times X_2$ che rende continue le proiezioni

$$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \quad p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2.$$

**Teorema 2.10** Siano $(X_1, \mathcal{G}_1), (X_2, \mathcal{G}_2)$ spazi topologici a base numerabile. Allora

(i) lo spazio topologico prodotto $(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ è a base numerabile;

(ii) per ogni $A \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ esistono $\{A_{1,n}\} \subseteq \mathcal{G}_1$, $\{A_{2,n}\} \subseteq \mathcal{G}_2$ tali che

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{1,n} \times A_{2,n}).$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Teorema 2.11** Siano $(X_1, \mathcal{G}_1), (X_2, \mathcal{G}_2)$ spazi topologici a base numerabile. Allora

$$\mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) = \mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2).$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che vale l'inclusione

$$\mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2) \subseteq \mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2).$$

Poiché la proiezione

$$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$$

è continua, è anche $(\mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2), \mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1))$-misurabile.
Poiché la proiezione

$$p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$

è continua, è anche $(\mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2), \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2))$-misurabile.
Allora, poiché $\mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2)$ è la minima $\sigma$-algebra su $X_1 \times X_2$ con tale proprietà, si ha

$$\mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2) \subseteq \mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2).$$

Mostriamo che vale l'inclusione opposta

$$\mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \subseteq \mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2).$$

Basta mostrare che

$$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2).$$

Sia $A \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$. Per il teorema precedente esistono $\{A_{1,n}\} \subseteq \mathcal{G}_1$, $\{A_{2,n}\} \subseteq \mathcal{G}_2$ tali che

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{1,n} \times A_{2,n}).$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$A_{1,n} \times A_{2,n} \in \mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2).$$

Quindi

$$A \in \mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2). \quad ■$$

**Osservazione 2.12** In ogni caso vale l'inclusione

$$\mathcal{B}(X_1, \mathcal{G}_1) \times \mathcal{B}(X_2, \mathcal{G}_2) \subseteq \mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2).$$

Se si lascia cadere l'ipotesi che gli spazi $(X_1, \mathcal{G}_1), (X_2, \mathcal{G}_2)$ siano a base numerabile, in generale tale inclusione è stretta.

**Esempio 2.13** Consideriamo gli spazi topologici $(\mathbf{R}^n, \tau(\mathbf{R}^n))$, $(\mathbf{R}^m, \tau(\mathbf{R}^m))$.
Poiché $(\mathbf{R}^n, \tau(\mathbf{R}^n))$ e $(\mathbf{R}^n, \tau(\mathbf{R}^n))$ sono a base numerabile, per il teorema precedente si ha

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \tau(\mathbf{R}^n) \times \tau(\mathbf{R}^m)) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \tau(\mathbf{R}^n)) \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^m, \tau(\mathbf{R}^m)).$$

Allora, poiché risulta

$$(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \tau(\mathbf{R}^n) \times \tau(\mathbf{R}^m)) = (\mathbf{R}^{n+m}, \tau(\mathbf{R}^{n+m})),$$

si ha

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}^{n+m}, \tau(\mathbf{R}^{n+m})) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, \tau(\mathbf{R}^n)) \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^m, \tau(\mathbf{R}^m)).$$

## 8.3 Misura prodotto

**Definizione 3.1** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura. Sia $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Definiamo la funzione

$$\varphi_1^{(E)} : X_1 \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

nel seguente modo. Per ogni $x_1 \in X_1$ poniamo

$$\varphi_1^{(E)}(x_1) := \mu_2(E_{x_1}).$$

Analogamente definiamo la funzione

$$\varphi_2^{(E)} : X_2 \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

nel seguente modo. Per ogni $x_2 \in X_2$ poniamo

$$\varphi_2^{(E)}(x_2) := \mu_1(E_{x_2}).$$

**Teorema 3.2** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finita. Sia $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Allora

(i) $\varphi_1^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\varphi_2^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$;

(ii) vale l'uguaglianza

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2.$$

*Dimostrazione.* $(a)$ Supponiamo

$$\mu_1(X_1) < \infty, \quad \mu_2(X_2) < \infty.$$

Poniamo

$$\Omega := \{E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \mid (i) \text{ e } (ii) \text{ sono verificate}\}.$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\Omega = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2.$$

Evidentemente si ha

$$\Omega \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2.$$

Per provare che

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \Omega,$$

mostriamo che $\Omega \supseteq \mathcal{R}_s$ e che $\Omega$ è una classe monotona. Allora si ha

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \mathcal{M}_0(\mathcal{R}_s) \subseteq \Omega.$$

Mostriamo che $\Omega \supseteq \mathcal{R}_s$.
Sia $E \in \mathcal{R}$. Siano $A \in \mathcal{A}_1$, $B \in \mathcal{A}_2$ tali che

$$E = A \times B.$$

Per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$E_{x_1} = (A \times B)_{x_1} = \begin{cases} B & \text{se} \quad x_1 \in A \\ \emptyset & \text{se} \quad x_1 \notin A. \end{cases}$$

Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\varphi_1^{(E)}(x_1) = \mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(B)\,\chi_A(x_1).$$

Analogamente per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\varphi_2^{(E)}(x_2) = \mu_1(E_{x_2}) = \mu_1(A)\,\chi_B(x_2).$$

Quindi $\varphi_1^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$ e $\varphi_2^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$. Inoltre si ha

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \mu_2(B) \int_{X_1} \chi_A\, d\mu_1 = \mu_1(A)\,\mu_2(B),$$

$$\int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2 = \mu_1(A) \int_{X_2} \chi_B\, d\mu_2 = \mu_1(A)\,\mu_2(B),$$

da cui segue

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2.$$

Allora $E \in \Omega$.
Sia $E \in \mathcal{R}_s$. Siano $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}_1,\ B_1, ..., B_n \in \mathcal{A}_2$ tali che

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k),$$

dove l'unione è disgiunta. Tenendo conto dell'additività di $\mu_2$ per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(E)}(x_1) &= \mu_2\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k)\right)_{x_1}\right) = \\ &= \mu_2\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \times B_k)_{x_1}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu_2\left((A_k \times B_k)_{x_1}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu_2(B_k)\,\chi_{A_k}(x_1). \end{aligned}$$

Analogamente per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\varphi_2^{(E)}(x_2) = \sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k)\,\chi_{B_k}(x_2).$$

Quindi $\varphi_1^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$ e $\varphi_2^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 &= \int_{X_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_2(B_k)\,\chi_{A_k}\right) d\mu_1 = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu_2(B_k) \int_{X_1} \chi_{A_k}\, d\mu_1 = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k)\,\mu_2(B_k), \end{aligned}$$

Analogamente si ha

$$\int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2 = \sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k)\,\mu_2(B_k).$$

Quindi vale l'uguaglianza

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2.$$

Allora

$$E \in \Omega.$$

Mostriamo che $\Omega$ è una classe monotona. Basta mostrare che
$(i)$ per ogni $E \in \Omega$ risulta $\mathcal{C}E \in \Omega$;
$(ii)$ per ogni successione $\{E_n\} \subseteq \Omega$ non decrescente risulta

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Omega.$$

$(i)$ Sia $E \in \Omega$. Quindi per ipotesi $\varphi_1^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\varphi_2^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$ e vale l'uguaglianza

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2,$$

Tenendo conto dell'additività di $\mu_2$ per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(\mathcal{C}E)}(x_1) &= \mu_2\left((\mathcal{C}E)_{x_1}\right) = \mu_2\left(\mathcal{C}(E_{x_1})\right) = \\ &= \mu_2(X_2) - \mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(X_2) - \varphi_1^{(E)}(x_1). \end{aligned}$$

e analogamente per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\varphi_2^{(\mathcal{C}E)}(x_2) = \mu_1(X_1) - \varphi_2^{(E)}(x_2).$$

Allora si ha $\varphi_1^{(\mathcal{C}E)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\varphi_2^{(\mathcal{C}E)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \varphi_1^{(\mathcal{C}E)}\, d\mu_1 &= \int_{X_1} \left[\mu_2(X_2) - \varphi_1^{(E)}\right] d\mu_1 = \\ &= \mu_1(X_1)\,\mu_2(X_2) - \int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 \end{aligned}$$

e analogamente

$$\int_{X_2} \varphi_2^{(\mathcal{C}E)}\, d\mu_2 = \mu_1(X_1)\,\mu_2(X_2) - \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2.$$

Quindi

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(\mathcal{C}E)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(\mathcal{C}E)}\, d\mu_2.$$

Allora

$$\mathcal{C}E \in \Omega.$$

$(ii)$ Sia $\{E_n\} \subseteq \Omega$ una successione non decrescente. Quindi per ipotesi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $\varphi_1^{(E_n)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\varphi_2^{(E_n)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$ e vale l'uguaglianza

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E_n)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E_n)}\, d\mu_2.$$

Poniamo

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Poiché la successione $\{E_n\} \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ è non decrescente per ogni $x_1 \in X_1$ la successione $\left\{(E_n)_{x_1}\right\} \subseteq \mathcal{A}_2$ è non decrescente. Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(E)}(x_1) &= \mu_2\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{x_1}\right) = \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_{x_1}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_2\left((E_n)_{x_1}\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi_1^{(E_n)}(x_1). \end{aligned}$$

Analogamente per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\varphi_2^{(E)}(x_2) = \lim_{n\to\infty} \varphi_2^{(E_n)}(x_2).$$

Allora si ha $\varphi_1^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\varphi_2^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$. Inoltre per la monotonia di $\mu_1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ la successione $\left\{\varphi_1^{(E_n)}\right\} \subseteq \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$ è non decrescente. Allora per il teorema di convergenza monotona si ha

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\lim_{n\to\infty} \varphi_1^{(E_n)}\right) d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} \varphi_1^{(E_n)}\, d\mu_1.$$

Analogamente si ha

$$\int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_2} \varphi_2^{(E_n)}\, d\mu_2.$$

Quindi

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2.$$

Allora

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Omega.$$

(*b*) Caso generale.
Siano $\{X_{1,n}\} \subseteq \mathcal{A}_1$, $\{X_{2,m}\} \subseteq \mathcal{A}_2$ due successioni disgiunte, con $\mu_1(X_{1,n}) < \infty$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\mu_2(X_{2,m}) < \infty$ per ogni $m \in \mathbf{N}$, tali che

$$X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{1,n}, \quad X_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_{2,m}.$$

Sia $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ poniamo

$$E_{n,m} := E \cap (X_{1,n} \times X_{2,m}).$$

Poiché

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} (X_{1,n} \times X_{2,m}),$$

si ha

$$E = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m},$$

dove l'unione è disgiunta.
Per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ l'insieme $E_{n,m}$ appartiene alla $\sigma$-algebra indotta

$$(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap (X_{1,n} \times X_{2,m}),$$

quindi, poiché $\mu_1(X_{1,n}) < \infty$ e $\mu_2(X_{2,m}) < \infty$ valgono le considerazioni della parte (*a*) precedente.
Allora per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ si ha $\varphi_1^{(E_{n,m})} \in \mathcal{M}_+(X_{1,n}, \mathcal{A}_1 \cap X_{1,n})$, $\varphi_2^{(E_{n,m})} \in \mathcal{M}_+(X_{2,m}, \mathcal{A}_2 \cap X_{2,m})$ e vale l'uguaglianza

$$\int_{X_{1,n}} \varphi_1^{(E_{n,m})}\, d\mu_1 = \int_{X_{2,m}} \varphi_2^{(E_{n,m})}\, d\mu_2.$$

Per la $\sigma$-additività di $\mu_2$ per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(E)}(x_1) &= \mu_2\left(\left(\bigcup_{n,m=1}^{\infty} (E_{n,m})\right)_{x_1}\right) = \\
&= \mu_2\left(\bigcup_{n,m=1}^{\infty} (E_{n,m})_{x_1}\right) = \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu_2\left((E_{n,m})_{x_1}\right) = \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_1^{(E_{n,m})}(x_1)\, \chi_{X_{1,n}}(x_1).
\end{aligned}$$

e analogamente per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\varphi_2^{(E)}(x_2) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_2^{(E_{n,m})}(x_2)\, \chi_{X_{1,n}}(x_2).$$

Allora $\varphi_1^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\varphi_2^{(E)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 &= \int_{X_1} \left(\sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_1^{(E_{n,m})} \chi_{X_{1,n}}\right) d\mu_1 = \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{X_1} \varphi_1^{(E_{n,m})} \chi_{X_{1,n}}\, d\mu_1 = \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{X_{1,n}} \varphi_1^{(E_{n,m})}\, d\mu_1.
\end{aligned}$$

e analogamente si ha

$$\int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{X_{2,m}} \varphi_2^{(E_{n,m})}\, d\mu_2.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{X_{1,n}} \varphi_1^{(E_{n,m})}\, d\mu_1 = \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{X_{2,m}} \varphi_2^{(E_{n,m})}\, d\mu_2 = \\
&= \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Osservazione 3.3** Se si lascia cadere l'ipotesi che le misure $\mu_1, \mu_2$ siano $\sigma$-finite le conclusioni del teorema precedente sono in generale false, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 3.4** Siano

$$(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda),$$

$$(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu^{\#}).$$

Lo spazio $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ è finito, quindi $\sigma$-finito.
Lo spazio $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu^{\#})$ non è $\sigma$-finito. Infatti supponiamo per assurdo che esista $\{X_{2,n}\} \subseteq \mathcal{B}([0,1])$ con $\mu^{\#}(X_{2,n}) < \infty$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, tale che

$$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{2,n}.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ l'insieme $X_{2,n}$ sarebbe finito e l'insieme $[0,1]$ sarebbe numerabile, da cui l'assurdo.
Sia

$$E := \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ poniamo

$$I_{n,k} := \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$$

Allora si ha

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_{n,k} \times I_{n,k}\right).$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ risulta

$$I_{n,k} \in \mathcal{B}([0,1]),$$

si ha

$$E \in \mathcal{B}([0,1]) \times \mathcal{B}([0,1]).$$

Inoltre per ogni $x_1 \in X_1$ e per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$E_{x_1} = \{x_1\}, \quad E_{x_2} = \{x_2\}.$$

Allora per ogni $x_1 \in X_1$ e per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\varphi_1^{(E)}(x_1) = \mu^{\#}(\{x_1\}) = 1, \quad \varphi_2^{(E)}(x_2) = \lambda(\{x_2\}) = 0.$$

Quindi le funzioni $\varphi_1^{(E)}$ e $\varphi_2^{(E)}$ sono misurabili ma risulta

$$\int_{[0,1]} \varphi_1^{(E)}\, d\lambda = 1, \quad \int_{[0,1]} \varphi_2^{(E)}\, d\mu^{\#} = 0.$$

**Definizione 3.5** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finita. Definiamo l'applicazione

$$\mu_1 \times \mu_2 : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

nel seguente modo. Per ogni $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ poniamo

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) := \int_{X_1} \varphi_1^{(E)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E)}\, d\mu_2.$$

**Proposizione 3.6** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finita. Allora l'applicazione $\mu_1 \times \mu_2$ è una misura $\sigma$-finita su $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

*Dimostrazione.* $(a)$ Mostriamo che $\mu_1 \times \mu_2$ è una misura.
$(i)$ Evidentemente si ha $(\mu_1 \times \mu_2)(\emptyset) = 0$.
$(ii)$ Sia $\{E_n\} \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ una successione disgiunta. Poniamo

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Per la $\sigma$-additività di $\mu_2$ per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(E)}(x_1) &= \mu_2\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)\right)_{x_1}\right) = \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_{x_1}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu_2\left((E_n)_{x_1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1^{(E_n)}(x_1). \end{aligned}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} (\mu_1 \times \mu_2)(E) &= \int_{X_1}\varphi_1^{(E)}\,d\mu_1 = \int_{X_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1^{(E_n)}\right)d\mu_1 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{X_1}\varphi_1^{(E_n)}\,d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu_1 \times \mu_2)(E_n). \end{aligned}$$

$(b)$ Mostriamo che $\mu_1 \times \mu_2$ è una misura $\sigma$-finita.
Siano $\{X_{1,n}\} \subseteq \mathcal{A}_1$, $\{X_{2,m}\} \subseteq \mathcal{A}_2$, con $\mu_1(X_{1,n}) < \infty$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\mu_2(X_{2,m}) < \infty$ per ogni $m \in \mathbf{N}$, tali che

$$X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{1,n}, \quad X_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_{2,m}.$$

Allora la successione $\{X_{1,n} \times X_{1,m}\}_{n,m\in\mathbf{N}} \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ è tale che

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{n,m=1}^{\infty}(X_{1,n} \times X_{2,m}).$$

Inoltre per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ e per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(X_{1,n}\times X_{2,m})}(x_1) &= \mu_2\left((X_{1,n} \times X_{2,m})_{x_1}\right) = \\ &= \mu_2(X_{2,m})\chi_{X_{1,n}}(x_1). \end{aligned}$$

Allora per ogni $n, m \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned} (\mu_1 \times \mu_2)(X_{1,n} \times X_{2,m}) &= \int_{X_1}\varphi_1^{(X_{1,n}\times X_{2,m})}\,d\mu_1 = \\ &= \mu_2(X_{2,m})\int_{X_1}\chi_{X_{1,n}}\,d\mu_1 = \\ &= \mu_1(X_{1,n})\,\mu_2(X_{2,m}) < \infty. \end{aligned}$$

Quindi $\mu_1 \times \mu_2$ è una misura $\sigma$-finita. ∎

**Definizione 3.7** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finita. Allora la misura $\mu_1 \times \mu_2$ è detta *misura prodotto* di $\mu_1$ per $\mu_2$. Lo spazio di misura

$$(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

è detto *spazio di misura prodotto* di $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ per $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$.

**Proposizione 3.8** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finita. Sia $E \in \mathcal{R}$. Siano $E_1 \in \mathcal{A}_1$, $E_2 \in \mathcal{A}_2$ tali che

$$E = E_1 \times E_2.$$

Allora

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2).$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$E_{x_1} = (E_1 \times E_2)_{x_1} = \begin{cases} E_2 & \text{se } x_1 \in E_1 \\ \emptyset & \text{se } x_1 \notin E_1. \end{cases}$$

Allora per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\varphi_1^{(E)}(x_1) = \mu_2(E_{x_1}) = \mu_2(E_2)\,\chi_{E_1}(x_1).$$

Quindi si ha

$$\int_{X_1}\varphi_1^{(E)}\,d\mu_1 = \mu_2(E_2)\int_{X_1}\chi_{E_1}\,d\mu_1 = \mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2).$$

Allora

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{X_1}\varphi_1^{(E)}\,d\mu_1 = \mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2). \quad ∎$$

**Osservazione 3.9** Il prodotto di due spazi di misura completi non è in generale completo, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 3.10** Lo spazio $(\mathbf{R}, \mathcal{L}(\mathbf{R}), \lambda)$ è completo.
Mostriamo che lo spazio $(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}(\mathbf{R}) \times \mathcal{L}(\mathbf{R}), \lambda \times \lambda)$ non è completo.
Sia $V \subseteq [0,1]$ con $V \notin \mathcal{L}(\mathbf{R})$. Sia $x_0 \in \mathbf{R}$. Poniamo

$$E := \{x_0\} \times V.$$

Allora

$$E \subseteq \{x_0\} \times [0,1].$$

Poiché $\{x_0\} \times [0,1] \in \mathcal{L}(\mathbf{R}) \times \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e poiché risulta

$$(\lambda \times \lambda)(\{x_0\} \times [0,1]) = \lambda(\{x_0\})\,\lambda([0,1]) = 0,$$

si ha $\{x_0\} \times [0,1] \in \mathcal{N}_\lambda$. Quindi

$$E \in \mathcal{T}_\lambda.$$

D'altra parte, poiché $E_{x_0} = V \notin \mathcal{L}(\mathbf{R})$, si ha

$$E \notin \mathcal{L}(\mathbf{R}) \times \mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

**Esempio 3.11** Gli spazi $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n), \lambda_n), (\mathbf{R}^m, \mathcal{L}(\mathbf{R}^m), \lambda_m)$ sono completi.
Generalizzando l'esempio precedente, si può mostrare che lo spazio

$$(\mathbf{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbf{R}^m), \lambda_n \times \lambda_m)$$

non è completo.

**Osservazione 3.12** L'esempio precedente mostra che

$$(\mathbf{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbf{R}^{n+m}), \lambda_{n+m}) \neq (\mathbf{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbf{R}^m), \lambda_n \times \lambda_m).$$

Infatti il primo spazio è completo, mentre il secondo non lo è.

**Proposizione 3.13** Lo spazio $(\mathbf{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbf{R}^{n+m}), \lambda_{n+m})$ è il completamento dello spazio $(\mathbf{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbf{R}^m), \lambda_n \times \lambda_m)$.

*Dimostrazione.* Omessa. ∎

## 8.4 Teorema di Fubini

**Definizione 4.1** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura. Sia $f \in \mathcal{M}_+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Definiamo l'applicazione

$$\psi_1^{(f)} : X_1 \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

nel seguente modo. Per ogni $x_1 \in X_1$ poniamo

$$\psi_1^{(f)}(x_1) := \int_{X_2} f_{x_1}\,d\mu_2.$$

Analogamente definiamo l'applicazione

$$\psi_2^{(f)} : X_2 \to \overline{\mathbf{R}}_+$$

nel seguente modo. Per ogni $x_2 \in X_2$ poniamo

$$\psi_2^{(f)}(x_2) := \int_{X_1} f_{x_2}\, d\mu_1.$$

**Lemma 4.2** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura. Siano $f, g \in \mathcal{M}_+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora si ha

$$\psi_1^{(f+\lambda g)} = \psi_1^{(f)} + \lambda \psi_1^{(g)}, \quad \psi_2^{(f+\lambda g)} = \psi_2^{(f)} + \lambda \psi_2^{(g)}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned}\psi_1^{(f+\lambda g)}(x_1) &= \int_{X_2} \left((f+\lambda g)_{x_1}\right) d\mu_2 = \\ &= \int_{X_2} \left(f_{x_1} + \lambda g_{x_1}\right) d\mu_2 = \\ &= \int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2 + \lambda \int_{X_2} g_{x_1}\, d\mu_2 = \\ &= \psi_1^{(f)}(x_1) + \lambda \psi_1^{(g)}(x_1).\end{aligned}$$

Analogamente per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\psi_2^{(f+\lambda g)}(x_2) = \psi_2^{(f)}(x_2) + \lambda \psi_2^{(g)}(x_2). \quad \blacksquare$$

**Lemma 4.3** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura. Sia $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Allora si ha

$$\psi_1^{(\chi_E)} = \varphi_1^{(E)}, \quad \psi_2^{(\chi_E)} = \varphi_2^{(E)}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned}\psi_1^{(\chi_E)}(x_1) &= \int_{X_2} \left((\chi_E)_{x_1}\right) d\mu_2 = \int_{X_2} \left(\chi_{E_{x_1}}\right) d\mu_2 = \\ &= \mu_2(E_{x_1}) = \varphi_1^{(E)}(x_1).\end{aligned}$$

Analogamente per ogni $x_2 \in X$ si ha

$$\psi_2^{(\chi_E)}(x_2) = \varphi_2^{(E)}(x_2). \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.4** *(Tonelli)* Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finiti. Sia $f \in \mathcal{M}_+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Allora

(i) $\psi_1^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\psi_2^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$;

(ii) valgono le uguaglianze

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2.$$

*Dimostrazione.* $(a)$ Sia

$$f \in \mathcal{S}_+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Siano $c_1, \ldots, c_n > 0$ distinti, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ disgiunti tali che

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}.$$

Allora, per i due lemmi precedenti si ha

$$\psi_1^{(f)} = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_1^{(E_k)}, \quad \psi_2^{(f)} = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_2^{(E_k)}.$$

Quindi

$$\psi_1^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1), \; \psi_2^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2).$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int_{X_1 \times X_2} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}\right) d(\mu_1 \times \mu_2) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{X_1 \times X_2} \chi_{E_k}\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k (\mu_1 \times \mu_2)(E_k).\end{aligned}$$

$$\int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_1^{(E_k)}\right) d\mu_1 = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{X_1} \varphi_1^{(E_k)}\, d\mu_1.$$

$$\int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2 = \int_{X_2} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_2^{(E_k)}\right) d\mu_2 = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{X_2} \varphi_2^{(E_k)}\, d\mu_2.$$

Per la definizione di $\mu_1 \times \mu_2$ per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ risulta

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E_k) = \int_{X_1} \varphi_1^{(E_k)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \varphi_2^{(E_k)}\, d\mu_2.$$

Quindi

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2.$$

$(b)$ Sia

$$f \in \mathcal{M}_+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Sia $\{s_n\} \in \mathcal{S}_+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ una successione non decrescente tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = f.$$

Per quanto visto in $(a)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $\psi_1^{(s_n)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\psi_2^{(s_n)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$ e risulta

$$\int_{X_1 \times X_2} s_n\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(s_n)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(s_n)}\, d\mu_2.$$

Per ogni $x_1 \in X_1$ la successione $\left\{(s_n)_{x_1}\right\}$ è non decrescente e risulta

$$f_{x_1} = \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right)_{x_1} = \lim_{n\to\infty} \left((s_n)_{x_1}\right).$$

Allora, tenendo conto del teorema di convergenza monotona, per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned}\psi_1^{(f)}(x_1) &= \int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2 = \int_{X_2} \left(\lim_{n\to\infty} (s_n)_{x_1}\right) d\mu_2 = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X_2} (s_n)_{x_1}\, d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \psi_1^{(s_n)}(x_1).\end{aligned}$$

Analogamente per ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$\psi_2^{(f)}(x_2) = \lim_{n\to\infty} \psi_2^{(s_n)}(x_2).$$

Allora si ha $\psi_1^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1)$, $\psi_2^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$. Inoltre, tenendo conto del teorema di convergenza monotona, si ha

$$\begin{aligned}\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int_{X_1 \times X_2} \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) d(\mu_1 \times \mu_2) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X_1 \times X_2} s_n\, d(\mu_1 \times \mu_2).\end{aligned}$$

Poiché la successione $\left\{\psi_1^{(s_n)}\right\}$ è non decrescente, tenendo conto del teorema di convergenza monotona si ha

$$\int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\lim_{n\to\infty} \psi_1^{(s_n)}\right) d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_1} \psi_1^{(s_n)}\, d\mu_1.$$

Analogamente si ha

$$\int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_2} \psi_2^{(s_n)}\, d\mu_2.$$

Allora risulta

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2. \quad \blacksquare$$

**Osservazione 4.5** Il teorema 3.2 è un caso particolare del teorema di Tonelli, con $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Quindi se si lascia cadere l'ipotesi che gli spazi di misura $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ siano $\sigma$-finiti le conclusioni del teorema di Tonelli sono in generale false.

**Teorema 4.6** *(Fubini)* Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finiti. Sia $f \in L^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$. Allora

(i) per quasi ogni $x_1 \in X_1$ risulta

$$f_{x_1} \in L^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2),$$

per quasi ogni $x_2 \in X_2$ risulta

$$f_{x_2} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1);$$

(ii) la funzione $\psi_1^{(f)}$ è definita q.o. in $X_1$ e risulta

$$\psi_1^{(f)} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1),$$

la funzione $\psi_2^{(f)}$ è definita q.o. in $X_2$ e risulta

$$\psi_2^{(f)} \in L^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2);$$

(iii) valgono le uguaglianze

$$\int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(f)} \, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(f)} \, d\mu_2.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Poiché

$$f \in L^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

si ha

$$f_+, f_- \in L^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

e in particolare

$$f_+, f_- \in \mathcal{M}_+(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2).$$

Allora per il teorema di Tonelli si ha

$$\psi_1^{(f+)}, \psi_1^{(f-)} \in \mathcal{M}_+(X_1, \mathcal{A}_1), \ \psi_2^{(f+)}, \psi_2^{(f-)} \in \mathcal{M}_+(X_2, \mathcal{A}_2)$$

e valgono le uguaglianze

$$\int_{X_1 \times X_2} f_+ \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(f+)} \, d\mu_1,$$

$$\int_{X_1 \times X_2} f_- \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(f-)} \, d\mu_1.$$

Quindi, poiché

$$f_+, f_- \in L^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

si ha

$$\psi_1^{(f+)}, \psi_1^{(f-)} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1).$$

Allora $\psi_1^{(f+)}, \psi_1^{(f-)}$ sono finite q.o. in $X_1$. Quindi, poiché per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\psi_1^{(f+)}(x_1) = \int_{X_2} (f_+)_{x_1} \, d\mu_2, \quad \psi_1^{(f-)} = \int_{X_2} (f_-)_{x_1} \, d\mu_2,$$

per quasi ogni $x \in X_1$ si ha

$$(f_+)_{x_1}, (f_-)_{x_1} \in L^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2).$$

Allora, poiché per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$(f_+)_{x_1} = (f_{x_1})_+, \quad (f_-)_{x_1} = (f_{x_1})_-,$$

per quasi ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$(f_{x_1})_+, (f_{x_1})_- \in L^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2),$$

Quindi per quasi ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$f_{x_1} \in L^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2).$$

Analogamente per quasi ogni $x_2 \in X_2$ si ha

$$f_{x_2} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1).$$

$(ii)$ Per definizione per quasi ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\psi_1^{(f)}(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1} \, d\mu_2.$$

Quindi la funzione $\psi_1^{(f)}$ è definita q.o. in $X_1$.
Inoltre per quasi ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\begin{aligned} \psi_1^{(f)}(x_1) &= \int_{X_2} f_{x_1} \, d\mu_2 = \\ &= \int_{X_2} (f_{x_1})_+ \, d\mu_2 - \int_{X_2} (f_{x_1})_- \, d\mu_2 = \\ &= \psi_1^{(f+)}(x_1) - \psi_2^{(f-)}(x_1). \end{aligned}$$

Quindi

$$\psi_1^{(f)} = \psi_1^{(f+)} - \psi_1^{(f-)} \quad \text{q.o. in } X_1.$$

Allora, poiché

$$\psi_1^{(f+)}, \psi_1^{(f-)} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1),$$

si ha

$$\psi_1^{(f)} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1).$$

Analogamente la funzione $\psi_2^{(f)}$ è definita q.o. in $X_2$ e risulta

$$\psi_2^{(f)} \in L^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2).$$

$(iii)$ Si ha

$$\begin{aligned} &\int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \\ &= \int_{X_1 \times X_2} f_+ \, d(\mu_1 \times \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} f_- \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \\ &= \int_{X_1} \psi_1^{(f+)} \, d\mu_1 - \int_{X_1} \psi_1^{(f-)} \, d\mu_1 = \int_{X_1} \psi_1^{(f)} \, d\mu_1. \end{aligned}$$

Analogamente si ha

$$\int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_2} \psi_2^{(f)} \, d\mu_2. \quad \blacksquare$$

**Osservazione 4.7** Poiché nella dimostrazione del teorema di Fubini si è usato il teorema di Tonelli, se si lascia cadere l'ipotesi che gli spazi di misura $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ siano $\sigma$-finiti, le conclusioni del teorema di Fubini in generale non valgono.

**Osservazione 4.8** Se si lascia cadere l'ipotesi di integrabilità di $f$ nello spazio prodotto le conclusioni del teorema di Fubini in generale non valgono, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 4.9** Sia
$(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$. Sia

$$f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbf{R}$$

definita nel seguente modo. Per ogni $x_1, x_2 \in (0,1)$ poniamo

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Poiché $f$ è continua in $X_1 \times X_2$, $f$ è $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$-misurabile. Però

$$f \notin L^1(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2).$$

Infatti si ha

$$\int_{X_1\times X_2} f_+\, d(\lambda\times\lambda) = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} \frac{x_1^2-x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\, dx_2 = = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} = \infty.$$

Allora, poiché $|f| \geq f_+$, si ha

$$\int_{X_1\times X_2} |f|\, d(\lambda\times\lambda) = \infty.$$

In questo caso l'uguaglianza del teorema di Fubini non è verificata. Infatti si ha

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 \frac{x_1^2-x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\, dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x_1^2}\, dx_1 = \frac{\pi}{4},$$

mentre

$$\int_0^1 dx_2 \int_0^1 \frac{x_1^2-x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\, dx_1 = -\int_0^1 \frac{1}{1+x_2^2}\, dx_2 = -\frac{\pi}{4}.$$

**Teorema 4.10** Siano $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1),(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ due spazi di misura $\sigma$-finita. Sia $f \in \mathcal{M}(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in L^1(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2,\mu_1\times\mu_2)$;

(ii) risulta

$$\int_{X_1} \psi_1^{(|f|)}\, d\mu_1 < \infty;$$

(iii) risulta

$$\int_{X_2} \psi_2^{(|f|)}\, d\mu_2 < \infty.$$

*Dimostrazione.* Poiché $f \in \mathcal{M}(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$si ha

$$|f| \in \mathcal{M}_+(X_1\times X_2,\mathcal{A}\times\mathcal{A}_2).$$

Quindi le funzioni $\psi_1^{(|f|)}, \psi_2^{(|f|)}$ sono ben definite. Inoltre per il teorema di Tonelli si ha

$$\int_{X_1\times X_2} |f|\, d(\mu_1\times\mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(|f|)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(|f|)}\, d\mu_2.$$

Allora, poiché

$$f \in L^1(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2,\mu_1\times\mu_2)$$

se e solo se

$$\int_{X_1\times X_2} |f|\, d(\mu_1\times\mu_2) < \infty,$$

si ha la tesi. ∎

**Teorema 4.11** Siano $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1),(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finiti e completi. Sia $\left(X_1\times X_2,\overline{\mathcal{A}},\overline{\mu}\right)$ il completamento dello spazio di misura prodotto $(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2,\mu_1\times\mu_2)$. Sia $f \in \mathcal{M}_+\left(X_1\times X_2,\overline{\mathcal{A}}\right)$. Allora

(i) le applicazioni $\psi_1^{(f)}$ e $\psi_2^{(f)}$ sono ben definite e si ha

$$\psi_1^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_1,\mathcal{A}_1),\ \psi_2^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_2,\mathcal{A}_2);$$

(ii) valgono le uguaglianze

$$\int_{X_1\times X_2} f\, d\overline{\mu} = \int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $g \in \mathcal{M}_+(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$ tale che

$$g = f \quad \overline{\mu}\text{-q.o. in } X_1\times X_2.$$

Poniamo

$$E := \{f \neq g\}.$$

Quindi

$$\overline{\mu}(E) = 0.$$

Per definizione di completamento esiste $G \in \mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ tale che

$$E \subseteq G, \quad (\mu_1\times\mu_2)(G) = 0$$

e risulta

$$\overline{\mu}(E) = (\mu_1\times\mu_2)(G) = 0.$$

Allora

$$(\mu_1\times\mu_2)(G) = 0,$$

cioè

$$\int_{X_1} \varphi_1^{(G)}\, d\mu_1 = 0.$$

Quindi per quasi ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\varphi_1^{(G)}(x_1) = 0,$$

cioè

$$\mu_2(G_{x_1}) = 0.$$

Poiché per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\{f_{x_1} \neq g_{x_1}\} = E_{x_1} \subseteq G_{x_1}$$

e poiché $\mu_2$ è completa, per quasi ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$\mu_2(\{f_{x_1} \neq g_{x_1}\}) = 0.$$

Allora, poiché per ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$g_{x_1} \in \mathcal{M}_+(X_2,\mathcal{A}_2),$$

e poiché $\mu_2$ è completa, per quasi ogni $x_1 \in X_1$ si ha

$$f_{x_1} \in \mathcal{M}_+(X_2,\mathcal{A}_2),$$

e risulta

$$\int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2 = \int_{X_2} g_{x_1}\, d\mu_2.$$

Quindi

$$\psi_1^{(f)} = \psi_1^{(g)} \quad \text{q.o. in } X_1.$$

Allora, poiché per il teorema di Tonelli si ha

$$\psi_1^{(g)} \in \mathcal{M}_+(X_1,\mathcal{A}_1)$$

e poiché $\mu_1$ è completa, si ha

$$\psi_1^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_1,\mathcal{A}_1)$$

e risulta

$$\int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_1} \psi_1^{(g)}\, d\mu_1.$$

Analogamente

$$\psi_2^{(f)} \in \mathcal{M}_+(X_2,\mathcal{A}_2)$$

e risulta

$$\int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2 = \int_{X_2} \psi_2^{(g)}\, d\mu_2.$$

$(ii)$ Si ha

$$\int_{X_1\times X_2} f\, d\overline{\mu} = \int_{X_1\times X_2} g\, d(\mu_1\times\mu_2).$$

Per il teorema di Tonelli si ha

$$\int_{X_1\times X_2} g\, d(\mu_1\times\mu_2) = \int_{X_1} \psi_1^{(g)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(g)}\, d\mu_2.$$

Allora, per quanto visto al punto $(i)$ si ha

$$\int_{X_1\times X_2} f\, d\overline{\mu} = \int_{X_1} \psi_1^{(f)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(f)}\, d\mu_2. \quad ∎$$

**Teorema 4.12** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ spazi di misura $\sigma$-finiti e completi. Sia $(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ il completamento dello spazio di misura prodotto $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$. Sia $f \in L^1(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$. Allora

(i) per quasi ogni $x_1 \in X_1$ risulta

$$f_{x_1} \in L^1(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2),$$

per quasi ogni $x_2 \in X_2$ risulta

$$f_{x_2} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1);$$

(ii) la funzione $\psi_1^{(f)}$ è definita quasi ovunque e risulta

$$\psi_1^{(f)} \in L^1(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1),$$

la funzione $\psi_2^{(f)}$ è definita quasi ovunque e risulta

$$\psi_2^{(f)} \in L^2(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1);$$

(iii) vale l'uguaglianza

$$\int_{X_1 \times X_2} f \, d\overline{\mu} = \int_{X_1} \psi_1^{(f)} \, d\mu_1 = \int_{X_2} \psi_2^{(f)} \, d\mu_2.$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Teorema 4.13** Siano $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ due spazi di misura $\sigma$-finiti e completi. Sia $(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ il completamento dello spazio di misura prodotto $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$. Sia $f \in \mathcal{M}(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{A}})$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in L^1(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$;

(ii) risulta

$$\int_{X_1} \psi_1^{(|f|)} \, d\mu_1 < \infty;$$

(iii) risulta

$$\int_{X_1} \psi_2^{(|f|)} \, d\mu_1 < \infty.$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Teorema 4.14** Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^{n+m})$. Allora

(i) per quasi ogni $x_1 \in \mathbf{R}^n$ risulta

$$f_{x_1} \in L^1(\mathbf{R}^m),$$

per quasi ogni $x_2 \in \mathbf{R}^m$ risulta

$$f_{x_2} \in L^1(\mathbf{R}^n);$$

(ii) la funzione $\psi_1^{(f)}$ è definita quasi ovunque e risulta

$$\psi_1^{(f)} \in L^1(\mathbf{R}^n),$$

la funzione $\psi_2^{(f)}$ è definita quasi ovunque e risulta

$$\psi_2^{(f)} \in L^1(\mathbf{R}^m);$$

(iii) vale l'uguaglianza

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbf{R}^m} \psi_1^{(f)} \, d\lambda_m = \int_{\mathbf{R}^n} \psi_2^{(f)} \, d\lambda_n,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x,y) \, dx \, dy &= \int_{\mathbf{R}^m} dy \int_{\mathbf{R}^n} f(x,y) \, dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} dx \int_{\mathbf{R}^m} f(x,y) \, dy. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Segue dal teorema 4.12 e dalla proposizione 3.13 ■

**Teorema 4.15** Sia $f : \mathbf{R}^{n+m} \to \overline{\mathbf{R}}$ misurabile secondo Lebesgue. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) risulta

$$f \in L^1(\mathbf{R}^{n+m}),$$

ovvero

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m}} |f(x,y)| \, dx \, dy < \infty;$$

(ii) risulta

$$\int_{\mathbf{R}^m} \psi_1^{(|f|)} \, d\lambda_m < \infty,$$

ovvero

$$\int_{\mathbf{R}^m} dy \int_{\mathbf{R}^n} |f(x,y)| \, dx < \infty;$$

(iii) risulta

$$\int_{\mathbf{R}^n} \psi_2^{(|f|)} \, d\lambda_n < \infty,$$

ovvero

$$\int_{\mathbf{R}^n} dx \int_{\mathbf{R}^m} |f(x,y)| \, dy < \infty;$$

*Dimostrazione.* Segue dal teorema 4.13 e dalla proposizione 3.13 ■

## 8.5 Convoluzione

**Teorema 5.1** Sia $p \in [1, \infty]$. Siano $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$.

(i) Sia $F : \mathbf{R}^{2n} \to \overline{\mathbf{R}}$ la funzione definita nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$F(x,y) := f(x-y) g(y).$$

Allora per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$F_x \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

(ii) Sia $f * g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la funzione definita q.o. nel seguente modo. Per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbf{R}^n} F_x \, d\lambda_n,$$

ovvero

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy.$$

Allora

$$f * g \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

e risulta

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p \, .$$

(iii) Risulta

$$f * g = g * f.$$

*Dimosrazione.* $(i),(ii)$ $(a)$ Sia $p = 1$.
Le funzioni $f$ e $g$ sono $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$-misurabili. Siano $f_0$ e $g_0$ funzioni $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-misurabili tali che

$$f = f_0 \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^n, \quad g = g_0 \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^n.$$

Definiamo la funzione $F_0 : \mathbf{R}^{2n} \to \overline{\mathbf{R}}$ nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$F_0(x,y) := f_0(x-y)\, g_0(y).$$

Allora

$$F = F_0 \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^{2n}.$$

Mostriamo che $F_0$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}))$-misurabile.
Definiamo le funzioni $f_1, g_1 : \mathbf{R}^{2n} \to \overline{\mathbf{R}}$ nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$f_1(x,y) := f_0(x-y), \quad g_1(x,y) = g_0(y).$$

Allora per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$F_0(x,y) = f_1(x,y)\, g_1(x,y).$$

Mostriamo che $f_1$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}))$-misurabile.
Definiamo la funzione $\varphi : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n$ nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$\varphi(x,y) = x - y.$$

Allora per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$f_1(x,y) = f_0(\varphi(x,y)).$$

La funzione $\varphi$ è continua, quindi $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}), \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$-misurabile. Allora, poiché la funzione $f_0$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$-misurabile, la funzione $f_1$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}))$-misurabile.
Mostriamo che $f_1$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}))$-misurabile.
Sia $\alpha \in \mathbf{R}$ arbitrario. Si ha

$$\{g_1 > \alpha\} = \mathbf{R}^n \times \{g_0 > \alpha\}.$$

Poiché $g_0$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$-misurabile, si ha

$$\{g_0 > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n).$$

Allora

$$\{g_1 > \alpha\} = \mathbf{R}^n \times \{g_0 > \alpha\} \in \mathcal{B}\left(\mathbf{R}^{2n}\right).$$

Per l'arbitrarietà di $\alpha \in \mathbf{R}$, la funzione $g_1$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}))$-misurabile.
Allora la funzione $F_0$ è $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^{2n}))$-misurabile.
Quindi, poiché

$$F = F_0 \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^{2n},$$

la funzione $F$ è $(\mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n}))$-misurabile.
Inoltre, tenendo conto dell'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} dy \int_{\mathbf{R}^n} |F(x,y)|\, dx &= \int_{\mathbf{R}^n} dy\, |g(y)| \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\, dx = \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} |g(y)|\, dy \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\, dx = \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Allora si ha

$$F \in L^1\left(\mathbf{R}^{2n}\right).$$

Quindi per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$F_x \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbf{R}^n} dx \left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| \le \\
&\le \int_{\mathbf{R}^n} dx \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy = \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} dy\, |g(y)| \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\, dx = \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} |g(y)|\, dy \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \|g\|_1 .
\end{aligned}$$

$(b)$ Sia $p \in (1,\infty)$. Poiché $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ si ha

$$|g|^p \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

Quindi per quanto visto in $(a)$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} \left[ |f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \right]^p dy < \infty.$$

Sia $q \in (1,\infty)$ il coniugato di $p$. Allora, tenendo conto della disuguaglianza di Hölder, per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy = \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|^{1/p} |g(y)|\, |f(x-y)|^{1/q}\, dy \le \\
&\le \left[ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy \right]^{1/p} \|f\|_1^{1/q} < \infty.
\end{aligned}$$

Quindi per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$F_x \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

Inoltre per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
|f * g|^p(x) &= \left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right|^p \le \\
&\le \left( \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy \right)^p \le \\
&\le \left[ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy \right] \|f\|_1^{p/q} = \\
&= (|f| * |g|^p)(x)\, \|f\|_1^{p/q}.
\end{aligned}$$

Poiché

$$|f| * |g|^p \in L^1(\mathbf{R}^n),$$

si ha

$$|f * g|^p \in L^1(\mathbf{R}^n),$$

ovvero

$$f * g \in L^p(\mathbf{R}^n).$$

Inoltre risulta

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f * g|^p(x)\, dx \le \left[ \int_{\mathbf{R}^n} (|f| * |g|^p)(x)\, dx \right] \|f\|_1^{p/q},$$

ovvero

$$\|f * g\|_p^p \le \|f\|_1 \|g\|_p^p \|f\|_1^{p/q},$$

quindi

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1^{1/p+1/q} \|g\|_p = \|f\|_1 \|g\|_p .$$

$(c)$ Se $p = \infty$ le conclusioni sono immediate.
$(iii)$ Per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
(g * f)(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} g(x-y)\, f(y)\, dy = \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} g(y)\, f(x-y)\, dy = (f * g)(x). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Definizione 5.2** Sia $p \in [1,\infty]$. Siano $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$. La funzione $f * g$ è detta <u>convoluzione</u> delle funzioni $f$ e $g$.

**Notazione 5.3** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ un aperto. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$C^k(\Omega) := \{ f \in C(\Omega) \mid D^\alpha f \in C(\Omega) \text{ per ogni } \alpha \text{ tale che } |\alpha| \le k \}.$$

Poniamo

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Denotiamo con $C_0(\Omega)$ le funzioni di $C(\Omega)$ aventi supporto compatto.
Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

Poniamo

$$C_0^\infty := C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

**Definizione 5.4** Una successione $\{\rho_m\} \subseteq C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ è detta <u>*successione regolarizzante*</u> se per ogni $m \in \mathbf{N}$ si ha

(i) per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ risulta

$$\rho_m(x) \geq 0;$$

(ii) per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ tale che $|x| \geq \frac{1}{m}$, risulta

$$\rho_m(x) = 0;$$

(iii) risulta

$$\int_{\mathbf{R}_n} \rho_m \, d\lambda_n = 1.$$

**Esempio 5.5** Definiamo la funzione $\rho : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Per ogni $m \in \mathbf{N}$ definiamo la funzione $\rho_m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$\rho_m(x) := \frac{m^n \rho(mx)}{\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\, dx}.$$

Si verifica che $\{\rho_m\}$ è una successione regolarizzante.

**Definizione 5.6** Sia $p \in [1, \infty]$. Sia $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Sia $\{\rho_m\}$ una successione regolarizzante. Per ogni $m \in \mathbf{N}$ la funzione $\rho_m * f$ è detta <u>*regolarizzazione*</u> $m$-sima della funzione $f$.

**Definizione 5.7** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ un aperto. Una funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ definita q.o. in $\Omega$ si dice <u>*localmente integrabile*</u> in $\Omega$ se per ogni $G \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ tale che $\overline{G}$ è limitato e

$$\overline{G} \subseteq \Omega,$$

risulta

$$f \in L^1(G, \mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \cap G, \lambda_n).$$

Denotiamo con $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni localmente integrabili in $\Omega$.

**Osservazione 5.8** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ un aperto. Per ogni $p \in [1, \infty]$ si ha

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

**Teorema 5.9** Sia $\{\rho_m\}$ una successione regolarizzante.

(i) Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. Allora

$$\{\rho_m * f\} \subseteq C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

(ii) Sia $p \in [1, \infty)$. Sia $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Allora

$$\{\rho_m * f\} \subseteq L^p(\mathbf{R}^n) \cap C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Inoltre per ogni $m \in \mathbf{N}$ risulta

$$\|\rho_m * f\|_p \leq \|f\|_p$$

e $\{\rho_m * f\}$ converge ad $f$ in $L^p$.

(iii) Sia $f \in C(\mathbf{R}^n)$. Allora $\{\rho_m * f\}$ converge ad $f$ uniformemente sui compatti in $\mathbf{R}^n$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $m \in \mathbf{N}$ arbitrario. Definiamo la funzione $F_m : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ poniamo

$$F_m(x, y) := \rho_m(x - y) f(y).$$

Allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$(\rho_m * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} F_m(x, y)\, dy.$$

Poiché $\rho_m \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, per ogni $y \in \mathbf{R}^n$ la funzione $F_m(\cdot, y)$ è continua e ha derivate di ogni ordine. Cioè per ogni multiindice $\alpha$ e per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ esiste

$$D_x^\alpha F_m(x, y) = D^\alpha \rho_m(x - y) f(y).$$

Sia $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Sia $r > 0$. Poiché per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ tali che

$$|x - y| \geq \frac{1}{m}$$

si ha

$$\rho_m(x - y) = 0,$$

per ogni $x \in D_r(x_0)$ e per ogni $y \notin D_{r+1/m}(x_0)$ si ha

$$F_m(x, y) = 0.$$

Allora per ogni $x \in D_r(x_0)$ e per ogni multiindice $\alpha$ si ha

$$|D_x^\alpha F_m(x, \cdot)| \leq \|D^\alpha \rho_m\|_\infty |f| \chi_{D_{r+1/m}(x_0)}.$$

Poiché $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ si ha

$$\|D^\alpha \rho_m\|_\infty |f| \chi_{D_{r+1/m}(x_0)} \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

Allora per ogni multiindice $\alpha$ si ha

$$D^\alpha(\rho_m * f) = \int_{\mathbf{R}^n} D_x^\alpha [F_m(x, y)]\, dy.$$

Quindi

$$\rho_m * f \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

$(ii)$ Sia $m \in \mathbf{N}$ arbitrario. Per il teorema precedente si ha

$$\rho_m * f \in L^p(\mathbf{R}^n).$$

Inoltre per l'osservazione precedente si ha

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n).$$

Quindi per il punto $(i)$ si ha

$$\rho_m * f \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Inoltre risulta

$$\|\rho_m * f\|_p \leq \|\rho_m\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $g \in C_0(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Allora si ha

$$\|\rho_m * f - \rho_m * g\|_p \leq \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Inoltre, per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} |(\rho_m * g)(x) - g(x)| &= \left| \int_{\mathbf{R}^n} \rho_m(x - y)[g(y) - g(x)]\, dy \right| \leq \\ &\leq \sup_{|x-y|<1/m} |g(y) - g(x)|. \end{aligned}$$

Poiché $g \in C_0(\mathbf{R}^n)$, per il teorema di Heine-Cantor $g$ è uniformemente continua in $\mathbf{R}^n$. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in \operatorname{supp} g$, con

$$|x - y| < \delta,$$

risulti

$$|g(y) - g(x)| < \frac{1}{[\lambda_n(\operatorname{supp} g)]^{1/p}} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sia $\overline{m} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{1}{\overline{m}} < \delta.$$

Allora per ogni $m > \overline{m}$ si ha

$$\|\rho_m * g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Quindi per ogni $m > \overline{m}$ si ha

$$\|f - \rho_m * f\|_p \le$$

$$\le \|f - g\|_p + \|g - \rho_m * g\|_p + \|\rho_m * g - \rho_m * f\|_p < \varepsilon.$$

Allora $\{\rho_m * f\}$ converge ad $f$ in $L^p(\mathbf{R}^n)$.
$(iii)$ Sia $K \subseteq \mathbf{R}^n$ compatto. Poniamo

$$K_1 := \{y \in \mathbf{R}^n \mid d(y, K) \le 1\}.$$

Evidentemente $K_1$ è compatto. Poiché $f \in C(\mathbf{R}^n)$ per il teorema di Heine-Cantor la funzione $f$ è uniformemente continua in $K_1$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in K_1$, con

$$|x - y| < \delta,$$

risulti

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

In modo analogo a quanto visto in $(ii)$ si ottiene

$$\sup_{x \in K} |(\rho_m * f)(x) - f(x)| \le \sup_{x \in K} \sup_{|x-y|<1/m} |f(y) - f(x)|.$$

Sia $\overline{m} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{1}{\overline{m}} < \delta.$$

Allora per ogni $m > \overline{m}$ si ha

$$\sup_{x \in K} |(\rho_m * f)(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Quindi si ha la tesi. ■

**Teorema 5.10** Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ un aperto. Sia $p \in [1, \infty)$. Allora lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^p(\Omega)$ arbitraria. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $g \in C_0(\Omega)$ tale che

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $\{\rho_m\}$ una successione regolarizzante.
Come visto nella dimostrazione del teorema precedente, per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$|(\rho_m * g)(x) - g(x)| \le \sup_{|x-y|<1/m} |g(y) - g(x)|.$$

Sia $\overline{m} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{1}{\overline{m}} < d(\operatorname{supp} g, \partial\Omega).$$

Allora per ogni $m > \overline{m}$ si ha

$$\operatorname{supp}(\rho_m * g) \subseteq \Omega.$$

Allora per ogni $m > \overline{m}$ si ha

$$\rho_m * g \in C_0^\infty(\Omega).$$

Inoltre $\{\rho_m * g\}$ converge a $g$ in $L^p$. Sia $\tilde{m} \in \mathbf{N}$ tale che

$$\|\rho_{\tilde{m}} * g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora

$$\|f - \rho_{\tilde{m}} * g\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - \rho_{\tilde{m}} * g\| < \varepsilon.$$

Quindi si ha la tesi. ■

## 8.6 Trasformata di Fourier

**Definizione 6.1** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. La <u>*trasformata di Fourier*</u> di $f$ è la funzione $\hat{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita nel seguente modo. Per ogni $p \in \mathbf{R}$ poniamo

$$\hat{f}(p) := \int_{\mathbf{R}} f(x)\, e^{ipx}\, dx.$$

**Proposizione 6.2** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Allora $\hat{f}$ è continua e limitata in $\mathbf{R}$ e risulta

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \le \|f\|_1.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\left|\hat{f}(p)\right| \le \int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_1.$$

Quindi $f$ è limitata e si ha

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \hat{f} \le \|f\|_1.$$

Sia $p \in \mathbf{R}$ arbitrario. Per ogni $h \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \left|\hat{f}(p+h) - \hat{f}(p)\right| &= \left|\int_{\mathbf{R}} \left(e^{i(p+h)x} - e^{ipx}\right) f(x)\, dx\right| \le \\ &\le \int_{\mathbf{R}} \left|e^{ipx}\right| \left|e^{ihx} - 1\right| |f(x)|\, dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left|e^{ihx} - 1\right| |f(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{h \to 0} \left|e^{ihx} - 1\right| = 0$$

Allora, poiché per ogni $h \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\left|e^{ihx} - 1\right| |f(x)| \le 2|f(x)|$$

e poiché

$$2|f| \in L^1(\mathbf{R}),$$

per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{h \to 0} \left|\hat{f}(p+h) - \hat{f}(p)\right| = 0,$$

ovvero $\hat{f}$ è continua in $p$. ■

**Proposizione 6.3** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Sia $m \in \mathbf{N}$. Supponiamo che per ogni $k \in \{1, ..., m\}$ risulti

$$x^k f(x) \in L^1(\mathbf{R}).$$

Allora

$$\hat{f} \in C^m(\mathbf{R})$$

e per ogni $k \in \{1, ..., m\}$ si ha

$$\frac{\partial^k \hat{f}}{\partial p^k} = i^k \left[\widehat{x^k f(x)}\right].$$

*Dimostrazione.* Sia $k \in \{1, ..., m\}$ fissato. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial p^k}\left[f(x)\, e^{ipx}\right]\right| = \left|i^k x^k f(x)\, e^{ipx}\right| = \left|x^k f(x)\right|.$$

Per ipotesi si ha

$$\left|x^k f(x)\right| \in L^1(\mathbf{R}).$$

Allora si ha

$$\frac{\partial^k \hat{f}}{\partial p^k} = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^k}{\partial p^k}\left[f(x)\, e^{ipx}\right] dx = i^k \int_{\mathbf{R}} x^k f(x)\, e^{ipx}\, dx,$$

ovvero

$$\frac{\partial^k \hat{f}}{\partial p^k} = i^k [\widehat{x^k f(x)}].$$

Per la proposizione precedente si ha

$$[\widehat{x^k f(x)}] \in C(\mathbf{R}).$$

Quindi per ogni $k \in \{1, ..., m\}$ si ha

$$\frac{\partial^k \hat{f}}{\partial p^k} \in C(\mathbf{R}),$$

ovvero

$$\hat{f} \in C^m(\mathbf{R}). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 6.4** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Sia $m \in \mathbf{N}$. Supponiamo che per ogni $k \in \{1, ..., m\}$ risulti

$$f^{(k)} \in L^1(\mathbf{R}).$$

Allora per ogni $k \in \{1, ..., m\}$ si ha

$$\widehat{f^{(k)}} = (-ip)^k \hat{f}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{f'}(p) = \int_{\mathbf{R}} f'(x) e^{ipx} dx = f(x) e^{ipx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - ip \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{ipx} dx.$$

Poiché

$$f(x) \in L^1(\mathbf{R})$$

per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x) e^{ipx}\Big|_{x=-\infty} = f(x) e^{ipx}\Big|_{x=+\infty} = 0.$$

Quindi per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{f'}(p) = -ip \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{ipx} dx = -ip\hat{f}(p).$$

Iterando il procedimento si ha la tesi. $\blacksquare$

**Proposizione 6.5** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$g(x) := f\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Allora per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{g}(p) = \lambda \hat{f}(\lambda p).$$

*Dimostrazione.* Per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \hat{g}(p) &= \int_{\mathbf{R}} g(x) e^{ipx} dx = \int_{\mathbf{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{ipx} dx = \\ &= \lambda \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{ip\lambda t} dt = \lambda \hat{f}(\lambda p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposizione 6.6** Siano $f, g \in L^1(\mathbf{R})$. Allora

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\widehat{f * g}(p) = \int_{\mathbf{R}} dx\, e^{ipx} \int_{\mathbf{R}} f(x-y) g(y)\, dy.$$

Mostriamo che

$$e^{ipx} f(x-y) g(y) \in L^1\left(\mathbf{R}^2\right).$$

Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\left|e^{ipx} f(x-y) g(y)\right| = |f(x-y)|\, |g(y)|.$$

Inoltre

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|\, dx \int_{\mathbf{R}} |g(y)|\, dy < \infty.$$

Quindi

$$\int_{\mathbf{R}^2} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx\, dy < \infty.$$

Allora

$$e^{ipx} f(x-y) g(y) \in L^1\left(\mathbf{R}^2\right).$$

Quindi si può applicare il teorema di Fubini. Allora per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(p) &= \int_{\mathbf{R}} dx\, e^{ipx} \int_{\mathbf{R}} f(x-y) g(y)\, dy = \\ &= \int_{\mathbf{R}} dy\, g(y) \int_{\mathbf{R}} f(x-y) e^{ipx} dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}} dy\, g(y) \int_{\mathbf{R}} e^{ip(y+t)} f(t)\, dt = \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{ipy} g(y)\, dy \int_{\mathbf{R}} e^{ipt} f(t)\, dt = \hat{f} \cdot \hat{g}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Definizione 6.7** La <u>*funzione normale*</u> è la funzione $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**Proposizione 6.8** Sia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione normale. Allora per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{h}(p) = \sqrt{2\pi} h(p) = e^{-\frac{p^2}{2}}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial p} = i[\widehat{xh(x)}].$$

Quindi per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{h}}{\partial p}(p) &= i \int_{\mathbf{R}} xh(x) e^{ipx} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ipx} dx = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{ipx} d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{ipx} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - ip \int_{\mathbf{R}} e^{ipx} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \right) = \\ &= -\frac{p}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{ipx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -p\hat{h}(p). \end{aligned}$$

Quindi $\hat{h}$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial p} + p\hat{h} = 0.$$

Allora per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{h}(p) = c e^{\frac{-p^2}{2}},$$

dove

$$c = \hat{h}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Quindi per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{h}(p) = e^{-\frac{p^2}{2}}. \quad \blacksquare$$

**Definizione 6.9** Sia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione normale. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ definiamo la funzione $h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $y \in \mathbf{R}$ poniamo

$$h_n(y) := nh(ny) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 y^2}{2}}.$$

**Proposizione 6.10** Sia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione normale. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\int_{\mathbf{R}} h_n(y)\, dy = 1.$$

Inoltre risulta

$$\lim_{n\to\infty} h_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq 0, \\ \infty & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\int_{\mathbf{R}} h_n(y)\, dy = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{n^2 y^2}{2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1.$$

La seconda affermazione è evidente. ■

**Lemma 6.11** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Allora

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitario.
Poiché $C_0(\mathbf{R})$ è denso in $L^1(\mathbf{R})$ esiste $g \in C_0(\mathbf{R})$ tale che

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ definiamo la funzione $h_t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel modo seguente. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$h_t(x) := g(x+t) - g(x).$$

Allora per ogni $t \in \mathbf{R}$ risulta

$$\lambda(\operatorname{supp} h_t) \leq 2\lambda(\operatorname{supp} g)$$

Poiché $g \in C_0(\mathbf{R})$, $g$ è uniformemente continua in $\mathbf{R}$. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, con

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

risulti

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)}.$$

Sia $t \in \mathbf{R}$, con

$$|t| < \delta,$$

arbitrario. Allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$|h_t(x)| = |g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |g(x+t) - g(x)|\, dx &= \int_{\mathbf{R}} |h_t(x)|\, dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)} \lambda(\operatorname{supp} h_t) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)} 2\lambda(\operatorname{supp} g) = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|\, dx &= \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - g(x+t)|\, dx + \\ &+ \int_{\mathbf{R}} |g(x+t) - g(x)|\, dx + \\ &+ \int_{\mathbf{R}} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= 2\|f - g\|_1 + \int_{\mathbf{R}} |h_t(x)|\, dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha la tesi. ■

**Teorema 6.12** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$f_n := f * h_n.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f_n \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^\infty(\mathbf{R}).$$

Inoltre la successione $\{f_n\}$ converge ad $f$ in $L^1(\mathbf{R})$.

*Dimostrazione.* Sia $n \in \mathbf{N}$. Per il teorema 5.1 si ha

$$f_n \in L^1(\mathbf{R}).$$

In modo analogo a quanto visto nel teorema 5.9 si dimostra che

$$f_n \in C^\infty(\mathbf{R}).$$

Inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} [f(x-y) - f(x)]\, h_n(y)\, dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(x-y) - f(x)|\, h_n(y)\, dy = \\ &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} |f(x-y) - f(x)|\, e^{-\frac{n^2 y^2}{2}}\, dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &= \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dx \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dt\, e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| dx. \end{aligned}$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| dx \leq 2\|f\|_1 e^{-\frac{t^2}{2}}$$

e poiché

$$2\|f\|_1 e^{-\frac{(\cdot)^2}{2}} \in L^1(\mathbf{R}),$$

per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} dt\, e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dt\, e^{-\frac{t^2}{2}} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| dx. \end{aligned}$$

Per il lemma precedente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| dx = 0.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

cioè la tesi. ■

**Proposizione 6.13** Sia $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ limitata. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$f_n := f * h_n.$$

Allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

*Dimostrazione.* Come visto nella dimostrazione del teorema precedente per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

Poiché per ogni $x \in \mathbf{R}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| e^{-\frac{t^2}{2}} \leq 2 \|f\|_\infty e^{-\frac{t^2}{2}}$$

e poiché

$$2 \|f\|_\infty e^{-\frac{(\cdot)^2}{2}} \in L^1(\mathbf{R})$$

per il teorema di convergenza dominata per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| \leq& \\ \leq& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \left[ \lim_{n\to\infty} \left| f\left(x - \frac{t}{n}\right) - f(x) \right| \right] e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = 0. \end{aligned}$$

Quindi si ha la tesi. ∎

**Lemma 6.14** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$f_n := f * h_n.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(p)\, h\left(\frac{p}{n}\right) e^{-ipx} \, dp.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f_n(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\, h_n(y)\, dy = n \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\, h(ny)\, dy.$$

Poiché abbiamo visto che per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{h}(p) = \sqrt{2\pi}\, h(p),$$

per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $y \in \mathbf{R}$ si ha

$$h(ny) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{h}(ny) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} h(t)\, e^{inyt} \, dt.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dy\, f(x-y) \int_{\mathbf{R}} h(t)\, e^{inyt} \, dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dy\, f(x-y) \int_{\mathbf{R}} h\left(\frac{p}{n}\right) e^{-iyp} dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dp\, h\left(\frac{p}{n}\right) \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\, e^{-iyp} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dp\, h\left(\frac{p}{n}\right) \int_{\mathbf{R}} f(z)\, e^{ip(z-x)} \, dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dp\, h\left(\frac{p}{n}\right) e^{-ipx} \int_{\mathbf{R}} f(z)\, e^{ipz} \, dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(p)\, h\left(\frac{p}{n}\right) e^{-ipx} \, dp. \quad ∎ \end{aligned}$$

**Teorema 6.15** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$ tale che

$$\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}).$$

Allora per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(p)\, e^{-ipx} \, dp.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$f_n := f * h_n.$$

Per il lemma precedente per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(p)\, h\left(\frac{p}{n}\right) e^{-ipx} \, dp.$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$h\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{p^2}{2n^2}},$$

quindi per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} h\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Poiché per ogni $x \in \mathbf{R}$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\left| \hat{f}(p)\, h\left(\frac{p}{n}\right) e^{-ipx} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \hat{f}(p) \right|$$

e poiché

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \hat{f} \right| \in L^1(\mathbf{R})$$

per il teorema di convergenza dominata per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \left[ \lim_{n\to\infty} h\left(\frac{p}{n}\right) \right] \hat{f}(p)\, e^{-ipx} \, dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(p)\, e^{-ipx} \, dp. \end{aligned}$$

Poichè

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

esiste $\{n_k\} \subseteq \mathbf{N}$ tale che per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x).$$

Allora per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(p)\, e^{-ipx} \, dp. \quad ∎$$

**Corollario 6.16** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$ tale che

$$\hat{f} \equiv 0.$$

Allora

$$f = 0 \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}.$$

**Corollario 6.17** Siano $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ tali che

$$\hat{f} \equiv \hat{g}.$$

Allora

$$f = g \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}.$$

**Osservazione 6.18** Definiamo l'operatore

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}) \to L^\infty(\mathbf{R})$$

nel seguente modo. Per ogni $f \in L^1(\mathbf{R})$ poniamo

$$\mathcal{F}(f) := \hat{f}.$$

Allora l'operatore $\mathcal{F}$ è iniettivo.

**Osservazione 6.19** Siano

$$A := \left\{ f \in L^1(\mathbf{R}) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbf{R}) \right\},$$

$$B := \left\{ g \in L^1(\mathbf{R}) \mid \text{esiste } f \in L^1(\mathbf{R}) \text{ tale che } \hat{f} = g \right\}.$$

Definiamo l'operatore $\mathcal{F} : A \to B$ nel seguente modo. Per ogni $f \in A$ poniamo

$$\mathcal{F}(f) := \hat{f}.$$

Allora l'operatore $\mathcal{F}$ è invertibile. L'operatore inverso è l'operatore

$$\mathcal{F}^{-1} : B \to A$$

definito nel seguente modo. Per ogni $g \in B$ definiamo la funzione $\mathcal{F}^{-1}(g)$ nel seguente modo. Per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$\left[\mathcal{F}^{-1}(g)\right](x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} g(x)\, e^{-ipx}\, dp.$$

**Teorema 6.20** *(Parseval)* Sia $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Allora

$$\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$$

e risulta

$$\left\|\hat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2 .$$

*Dimostrazione.* Definiamo l'applicazione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$g(x) := f(x) * f(-x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\, f(-y)\, dy.$$

Allora

$$g \in L^1(\mathbf{R}).$$

Mostriamo che

$$g \in L^\infty(\mathbf{R}).$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Hölder, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$|g(x)| \le \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)|\, |f(-y)|\, dy \le \|f\|_2\, \|f\|_2 = \|f\|_2^2 < \infty.$$

Mostriamo che

$$g \in C(\mathbf{R}).$$

Per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} |g(x_2) - g(x_1)| &= \left|\int_{\mathbf{R}} [f(x_2-y) - f(x_1-y)]\, f(-y)\, dy\right| = \\ &= |(f(x_2-y) - f(x_1-y), f(-y))| . \end{aligned}$$

Quindi la continuità di $g$ segue dalla continuità del prodotto scalare.
Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$(g * h_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} e^{-ipx} h\left(\frac{p}{n}\right) \hat{g}(p)\, dp.$$

In particolare per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$(g * h_n)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} h\left(\frac{p}{n}\right) \hat{g}(p)\, dp.$$

Per ogni $p \in \mathbf{R}$, poiché la successione $\left\{h\left(\frac{p}{n}\right)\right\}$ è crescente e poiché risulta

$$\lim_{n\to\infty} h\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

per il teorema di convergenza monotona si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (g * h_n)(0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} h\left(\frac{p}{n}\right) \hat{g}(p)\, dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} \left[\lim_{n\to\infty} h\left(\frac{p}{n}\right)\right] \hat{g}(p)\, dp = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{g}(p)\, dp. \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\hat{g} = \widehat{f(x) * f(-x)} = \hat{f} \cdot \bar{\hat{f}} = \left|\hat{f}\right|^2 .$$

Quindi

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{g}(p)\, dp = \int_{\mathbf{R}} \left|\hat{f}(p)\right|^2 dp = \left\|\hat{f}\right\|_2^2 .$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} (g * h_n)(0) = \frac{1}{2\pi}\left\|\hat{f}\right\|_2^2 .$$

D'altra parte si ha

$$\lim_{n\to\infty} (g * h_n)(0) = g(0) = \|f\|_2^2 .$$

Quindi

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\hat{f}\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 ,$$

da cui segue la tesi. ∎

**Osservazione 6.21** Definiamo l'operatore

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$$

nel seguente modo. Per ogni $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ poniamo

$$\mathcal{F}(f) := \hat{f}.$$

Allora l'operatore $\mathcal{F}$, a meno del fattore $\frac{1}{2\pi}$, è un'isometria.

**Esempio 6.22** Sia $u_0 \in L^1(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ limitata. Il problema di Cauchy per l'equazione del calore con dato iniziale $u_0$ è il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

nell'incognita $u \in C(\mathbf{R} \times (0,\infty))$.
Per ogni $p \in \mathbf{R}$ e per ogni $t > 0$ si ha

$$\hat{u}(p,t) = \int_{\mathbf{R}} u(x,t)\, e^{ipx}\, dx.$$

Per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{u}_0(p) = \int_{\mathbf{R}} u_0(x)\, e^{ipx}\, dx.$$

Per ogni $p \in \mathbf{R}$ e per ogni $t > 0$ si ha

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(p,t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, e^{ipx}\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(p,t).$$

e

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(p,t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{ipx}\, dx = (-ip)^2\, \hat{u}(p,t) = -p^2 \hat{u}(p,t).$$

Quindi il problema diventa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(p,t) = -p^2 \hat{u}(p,t) & p \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ \hat{u}(p,0) = \hat{u}_0(p) & p \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Tale problema ha soluzione

$$\hat{u}(p,t) = e^{-p^2 t}\hat{u}_0(p).$$

Allora, poiché

$$\widehat{\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right)} = e^{-p^2 t},$$

la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(x,t) = \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}\right) * u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\, dy.$$

La *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore è la funzione

$$G : \mathbf{R} \times (0, \infty) \to \mathbf{R}$$

definita nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $t > 0$ poniamo

$$G(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Allora la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(x,t) = G(x,t) * u_0(x).$$

# Capitolo 9
# Derivazione

## 9.1 Derivazione di funzioni monotone

**Definizione 1.1** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $x_0 \in [a,b]$. Si dicono *derivate generalizzate* (nel senso di Dini) di $f$ in $x_0$ le quantità

$$D^+ f(x_0) := \overline{\lim_{x \to x_0^+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$D_+ f(x_0) := \underline{\lim_{x \to x_0^+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$D^- f(x_0) := \overline{\lim_{x \to x_0^-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$D_- f(x_0) := \underline{\lim_{x \to x_0^-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dette nell'ordine *derivata superiore destra*, *derivata inferiore destra*, *derivata superiore sinistra*, *derivata inferiore sinistra*.
La funzione $f$ si dice *derivabile* in $x_0$ se le quattro derivate generalizzate in $x_0$ coincidono ed hanno un valore finito:

$$D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0) = D^- f(x_0) = D_- f(x_0) < \infty.$$

In tal caso si dice *derivata* di $f$ in $x_0$ la quantità

$$f'(x_0) := D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0) = D^- f(x_0) = D_- f(x_0).$$

**Osservazione 1.2** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Allora

$$D_+ f \leq D^+ f, \quad D_- f \leq D^- f.$$

**Definizione 1.3** Sia $g : (a,b) \to \mathbf{R}$. Sia $\overline{g} : (a,b) \to \mathbf{R}$ il limite superiore di $g$ in $[a,b]$. Sia $(c,d) \subseteq (a,b)$. Poniamo

$$E_+(g;c,d) := \{x \in (c,d) \mid \exists \xi \in (x,d) \text{ tale che } \overline{g}(x) < g(\xi)\},$$

$$E_-(g;c,d) := \{x \in (c,d) \mid \exists \xi \in (c,x) \text{ tale che } \overline{g}(x) < g(\xi)\}.$$

**Osservazione 1.4** Se $g$ è continua in $(a,b)$ si ha

$$E_+(g;c,d) := \{x \in (c,d) \mid \exists \xi \in (x,d) \text{ tale che } g(x) < g(\xi)\},$$

$$E_-(g;c,d) := \{x \in (c,d) \mid \exists \xi \in (c,x) \text{ tale che } g(x) < g(\xi)\}.$$

Allora i punti dell'insieme $E_+(g;c,d)$ sono detti *non visibili da destra* e i punti dell'insieme $E_-(g;c,d)$ sono detti *non visibili da sinistra*.

**Lemma 1.5** *(Riesz)* Sia $g : (a,b) \to \mathbf{R}$. Sia $(c,d) \subseteq (a,b)$. Allora gli insiemi $E_+(g;c,d)$ e $E_-(g;c,d)$ sono aperti. Inoltre

(i) se $E_+(g;c,d) \neq \emptyset$, esiste una successione disgiunta $\{(a_n,b_n)\}$ di intervalli contenuti in $(c,d)$ tale che

(a) $E_+(g;c,d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n)$;

(b) per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in (a_n,b_n)$ risulta

$$g(x) \leq \overline{g}(b_n);$$

(ii) se $E_-(g;c,d) \neq \emptyset$, esiste una successione disgiunta $\{(c_n,d_n)\}$ di intervalli contenuti in $(c,d)$ tale che

(a) $E_-(g;c,d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n,d_n)$;

(b) per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in (c_n,d_n)$ risulta

$$g(x) \leq \overline{g}(c_n).$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che l'insieme $E_+(g;c,d)$ è aperto.
Se $E_+(g;c,d)$ è vuoto allora è aperto.
Sia $E_+(g;c,d)$ non vuoto. Sia $x_0 \in E_+(g;c,d)$ arbitrario. Sia $\xi \in (x_0,d)$ tale che

$$\overline{g}(x_0) < g(\xi).$$

Poiché $\overline{g}$ è superiormente semicontinua in $x_0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (c,d)$, con

$$|x - x_0| < \delta,$$

risulta

$$\overline{g}(x) < \overline{g}(x_0) < g(\xi),$$

ovvero $x \in E_+(g;c,d)$. Quindi $x_0$ è un punto interno di $E_+(g;c,d)$.
Per l'arbitrarietà di $x_0 \in E_+(g;c,d)$ l'insieme $E_+(g;c,d)$ è aperto.
$(i)$ $(a)$ Ogni aperto è unione numerabile di intervalli aperti disgiunti.
Quindi ogni aperto limitato è unione numerabile di intervalli aperti limitati disgiunti.
$(i)$ $(b)$ Sia $n \in \mathbf{N}$. Sia $x \in (a_n,b_n)$. Poniamo

$$F := \{y \in [x,b_n) \mid g(x) \leq \overline{g}(y)\}.$$

Poiché

$$g(x) \leq \overline{g}(x)$$

si ha $x \in F$ quindi

$$F \neq \emptyset.$$

Poniamo

$$x_1 := \sup F.$$

Mostriamo che

$$x_1 \in F,$$

ovvero che

$$g(x) \leq \overline{g}(x_1).$$

Supponiamo per assurdo che

$$g(x) > \overline{g}(x_1).$$

Poiché $\overline{g}$ è superiormente semicontinua, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $y \in (c,d)$, con

$$|y - x_1| < \delta,$$

risulta

$$g(x) > \overline{g}(x_1) > \overline{g}(y),$$

in contrasto con la definizione di $x_1$.
Mostriamo che

$$x_1 = b_n.$$

Supponiamo per assurdo

$$x_1 < b_n.$$

Allora, per ogni $y \in (x_1,b_n)$ si ha

$$\overline{g}(y) < g(x) \leq \overline{g}(x_1).$$

Poiché $\overline{g}$ è superiormente semicontinua, si ha

$$\overline{g}(b_n) \leq \overline{g}(x_1).$$

D'altra parte si ha

$$x_1 \in (a_n,b_n) \subseteq E_+(g;c,d),$$

quindi esiste $\xi_1 \in (x_1,d)$ tale che

$$\overline{g}(x_1) < g(\xi_1).$$

Allora

$$\overline{g}(x_1) < g(\xi_1) \leq \overline{g}(\xi_1).$$

Se per assurdo fosse $\xi_1 \in (x_1,b_n]$ si avrebbe

$$\overline{g}(\xi_1) < g(x) \leq \overline{g}(x_1).$$

Quindi $\xi_1 \in (b_n, d)$. Poiché

$$b_n \notin E_+(g; c, d),$$

si ha

$$g(\xi_1) \leq \overline{g}(b_n).$$

Allora

$$\overline{g}(x_1) < g(\xi_1) \leq \overline{g}(b_n),$$

da cui l'assurdo.
Quindi

$$b_n \in F,$$

ovvero

$$g(x) \leq \overline{g}(b_n).$$

$(ii)(a)$ $(ii)(b)$. Definiamo la funzione $g_1 : (-b, -a) \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in (-b, -a)$ poniamo

$$g_1(x) := g(-x).$$

Poiché

$$E_-(g; c, d) = E_+(g; c, d),$$

la tesi segue da $(i)(a)$ e $(i)(b)$. ■

**Definizione 1.6** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Sia $\alpha > 0$. Definiamo la funzione $g_\alpha : (a, b) \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in (a, b)$ poniamo

$$g_\alpha(x) := f(x) - \alpha x.$$

**Definizione 1.7** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Sia $\alpha > 0$. Sia $(c, d) \subseteq (a, b)$. Poniamo

$$E_+(\alpha; c, d) := E_+(g_\alpha; c, d), \quad E_-(\alpha; c, d) := E_-(g_\alpha; a, d).$$

**Osservazione 1.8** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Sia $\alpha > 0$. Sia $(c, d) \subseteq (a, b)$. Allora

$$x \in E_+(\alpha; c, d)$$

se e solo se esiste $\xi \in (x, d)$ tale che

$$\frac{\overline{f}(x) - f(\xi)}{x - \xi} < \alpha.$$

Analogamente

$$x \in E_-(\alpha; c, d)$$

se e solo se esiste $\xi \in (c, x)$ tale che

$$\frac{\overline{f}(x) - f(\xi)}{x - \xi} < \alpha.$$

**Lemma 1.9** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ limitata non decrescente. Sia $\alpha > 0$. Sia $(c, d) \subseteq (a, b)$. Sia $\{(a_n, b_n)\}$ una successione disgiunta di intervalli aperti tale che

$$E_+(\alpha; c, d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Sia $\{(c_n, d_n)\}$ una successione disgiunta di intervalli aperti tale che

$$E_-(\alpha; c, d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n).$$

Allora

(i) risulta

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq f(d^-) - f(c^+);$$

(ii) per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$f(d_n^-) - f(c_n^+) \leq \alpha (d_n - c_n).$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\overline{g}_\alpha(c) = \overline{\lim_{x \to c^+}} g_\alpha(x) = \overline{\lim_{x \to c^+}} [f(x) - \alpha x] = f\left(c^+\right) - \alpha c$$

e

$$\overline{g}_\alpha(d) = \overline{\lim_{x \to d^-}} g_\alpha(x) = \overline{\lim_{x \to d^-}} [f(x) - \alpha x] = f\left(d^-\right) - \alpha d.$$

Poiché $f$ è limitata i limiti $f(c^+)$ e $f(d^-)$ sono finiti.
Inoltre, poiché $f$ è non decrescente, per ogni $x \in (c, d)$ si ha

$$\overline{g}_\alpha(x) = \overline{f}(x) - \alpha x \leq f\left(x^+\right) - \alpha x.$$

$(i)$ Per il lemma precedente per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in (a_n, b_n)$ si ha

$$g_\alpha(x) \leq \overline{g}_\alpha(b_n).$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$g_\alpha\left(a_n^+\right) \leq \overline{g}_\alpha(b_n).$$

ovvero

$$\alpha(b_n - a_n) \leq f(b_n^-) - f(a_n^+), \quad \text{se } b_n = d,$$

$$\alpha(b_n - a_n) \leq f(b_n^+) - f(a_n^+), \quad \text{se } b_n \neq d.$$

Allora, poiché gli intervalli $(a_n, b_n)$ sono disgiunti e poiché $f$ è non decrescente, si ha

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq f\left(d^-\right) - f\left(c^+\right).$$

$(ii)$ Per il lemma precedente per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in (c_n, d_n)$ si ha

$$\overline{g}_\alpha(c_n) \geq g_\alpha(x).$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\overline{g}_\alpha(c_n) \geq g_\alpha\left(d_n^-\right),$$

ovvero

$$f\left(d_n^-\right) - f\left(c_n^+\right) \leq \alpha(d_n - c_n). \quad ■$$

**Definizione 1.10** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Denotiamo con $S$ l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ in $(a, b)$.

**Osservazione 1.11** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ non decrescente. Allora l'insieme $S$ è al più numerabile.

**Definizione 1.12** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Sia $(c, d) \subseteq (a, b)$. Poniamo

$$A(\alpha; c, d) := \{x \in (c, d) \mid D_- f(x) < \alpha\},$$

$$B(\beta; c, d) := \{x \in (c, d) \mid \beta < D^+ f(x)\}.$$

**Proposizione 1.13** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ limitata non decrescente. Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Sia $(c, d) \subseteq (a, b)$. Allora

(i) $A(\alpha; c, d) \backslash S \subseteq E_-(\alpha; c, d)$;
(ii) $B(\beta; c, d) \backslash S \subseteq E_+(\beta; c, d)$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $x_0 \in A(\alpha; c, d) \backslash S$. Allora si ha

$$D_- f(x_0) < \alpha.$$

Quindi esiste $\xi \in (c, x_0)$ tale che

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > \alpha,$$

ovvero tale che

$$g_\alpha(\xi) > g_\alpha(x_0).$$

Poiché $x_0 \notin S$, la funzione $f$ è continua in $x_0$. Quindi

$$g_\alpha(x_0) = \overline{g}_\alpha(x_0).$$

Allora esiste $\xi \in (c, x_0)$ tale che

$$g_\alpha(\xi) > \overline{g}_\alpha(x_0),$$

ovvero

$$x_0 \in E_-(\alpha; c, d).$$

$(ii)$ Sia $x_0 \in B(\alpha; c, d) \setminus S$. Allora si ha

$$\beta < D^+ f(x_0).$$

Quindi esiste $\xi \in (x_0, d)$ tale che

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > \beta,$$

ovvero tale che

$$g_\beta(\xi) > g_\beta(x_0).$$

Poiché $x_0 \notin S$, la funzione $f$ è continua in $x_0$. Quindi

$$g_\beta(x_0) = \overline{g}_\beta(x_0).$$

Allora esiste $\xi \in (x_0, d)$ tale che

$$g_\beta(\xi) > \overline{g}_\beta(x_0),$$

ovvero

$$x_0 \in E_+(\beta; c, d). \quad \blacksquare$$

**Lemma 1.14** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ limitata non decrescente. Allora l'insieme

$$\{D_- f < D^+ f\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

*Dimostrazione.* Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$, con $\alpha < \beta$, poniamo

$$E_{\alpha,\beta} := A(\alpha; a, b) \cap B(\beta; a, b) = \{D_- f < \alpha\} \cap \left\{\beta < D^+ f\right\}.$$

Allora si ha

$$\left\{D_- f < D^+ f\right\} = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbf{Q} \\ \alpha < \beta}} E_{\alpha,\beta}.$$

$(a)$ Mostriamo che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$, con $\alpha < \beta$, e per ogni $(c, d) \subseteq (a, b)$ si ha

$$\lambda^*(E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)) \le \frac{\alpha}{\beta}(d - c).$$

Siano $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$, con $\alpha < \beta$ arbitrari. Sia $(c, d) \subseteq (a, b)$ arbitrario.
Mostriamo che

$$\lambda^*(E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)) = \lambda^*([E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S).$$

Poichè

$$[E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S \subseteq E_{\alpha,\beta} \cap (c, d),$$

si ha

$$\lambda^*([E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S) \le \lambda^*(E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)).$$

Inoltre si ha

$$E_{\alpha,\beta} \cap (c, d) = \{[E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S\} \cup S$$

Poiché $S$ è numerabile si ha $S \in \mathcal{L}((a, b))$ e risulta

$$\lambda(S) = 0.$$

Quindi

$$\lambda^*(E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)) \le \lambda^*([E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S).$$

Mostriamo che

$$\lambda^*([E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S) \le \frac{\alpha}{\beta}(d - c).$$

Si ha

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta} \cap (c, d) &= [A(\alpha; a, b) \cap (c, d)] \cap [B(\beta; a, b) \cap (c, d)] = \\ &= A(\alpha; c, d) \cap B(\beta; c, d). \end{aligned}$$

Quindi

$$[E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S = [A(\alpha; c, d) \setminus S] \cap [B(\beta; c, d) \setminus S].$$

Per la proposizione precedente si ha

$$A(\alpha; c, d) \setminus S \subseteq E_-(\alpha; c, d).$$

Se $E_-(\alpha; c, d) = \emptyset$ si ha

$$A(\alpha; c, d) \setminus S = \emptyset,$$

quindi

$$[E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S = \emptyset$$

e

$$\lambda^*([E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S) = 0 \le \frac{\alpha}{\beta}(d - c).$$

Sia $E_-(\alpha; c, d) \neq \emptyset$. Sia $\{(c_n, d_n)\}$ una successione disgiunta di intervalli contenuti in $(c, d)$ tali che

$$E_-(\alpha; c, d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n).$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f\left(d_n^-\right) - f\left(c_n^+\right) \le \alpha(d_n - c_n).$$

Allora risulta

$$A(\alpha; c, d) \setminus S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n),$$

da cui segue

$$\begin{aligned} [E_{\alpha,\beta} \cap (c, d)] \setminus S &\subseteq \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n)\right] \cap [B(\beta; c, d) \setminus S] = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [B(\beta; c_n, d_n) \setminus S]. \end{aligned}$$

Per la proposizione precedente per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$B(\beta; c_n, d_n) \setminus S \subseteq E_+(\beta; c_n, d_n).$$

Poniamo

$$N_1 := \{n \in \mathbf{N} \mid E_+(\beta; c_n, d_n) = \emptyset\},$$

$$N_2 := \{n \in \mathbf{N} \mid E_+(\beta; c_n, d_n) \neq \emptyset\}.$$

Allora

$$\mathbf{N} = N_1 \cup N_2,$$

dove l'unione è disgiunta.
Per ogni $n \in N_1$ si ha

$$B(\beta; c_n, d_n) = \emptyset$$

Per ogni $n \in N_2$ sia $\{(a_{nm}, b_{nm})\}_{m \in \mathbf{N}}$ una successione disgiunta di intervalli contenuti in $(c_n, d_n)$ tali che

$$E_+(\beta; c_n, d_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_{nm}, b_{nm}).$$

Inoltre per ogni $n \in N_2$ risulta

$$\beta \sum_{m=1}^{\infty} (b_{nm} - a_{nm}) \le f\left(d_n^-\right) - f\left(c_n^+\right).$$

Per ogni $n \in N_2$ risulta

$$B(\beta; c_n, d_n) \setminus S \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_{nm}, b_{nm}).$$

Quindi

$$\begin{aligned}[E_{\alpha,\beta}\cap(c,d)]\setminus S &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}[B(\beta;c_n,d_n)\setminus S]=\\ &= \bigcup_{n\in N_2}[B(\beta;c_n,d_n)\setminus S]=\\ &= \bigcup_{n\in N_2}\bigcup_{m=1}^{\infty}(a_{nm},b_{nm})\subseteq\\ &\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(a_{nm},b_{nm}).\end{aligned}$$

Allora per la $\sigma$-subadditività di $\lambda^*$ e risulta

$$\begin{aligned}\lambda^*([E_{\alpha,\beta}\cap(c,d)]\setminus S) &\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(b_{nm}-a_{nm})\le\\ &\le \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(d_n^-\right)-f\left(c_n^+\right)\right]\le\\ &\le \frac{\alpha}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(d_n-c_n)\le\frac{\alpha}{\beta}(d-c).\end{aligned}$$

$(b)$ Mostriamo che per ogni $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}$, con $\alpha<\beta$, si ha

$$\lambda^*(E_{\alpha,\beta})=0.$$

Per definizione di $\lambda^*$ per ogni $\varepsilon>0$ esiste una successione disgiunta $\{(c_n,d_n)\}$ di intervalli contenuti in $(a,b)$, con

$$E_{\alpha,\beta}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(c_n,d_n),$$

tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(d_n-c_n)<\lambda^*(E_{\alpha,\beta})+\varepsilon.$$

Allora, tenendo conto del punto $(a)$, per ogni $\varepsilon>0$ si ha

$$\begin{aligned}\lambda^*(E_{\alpha,\beta}) &\le \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(E_{\alpha,\beta}\cap(c_n,d_n))\le\\ &\le \frac{\alpha}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}(d_n-c_n)<\frac{\alpha}{\beta}\left[\lambda^*(E_{\alpha,\beta})+\varepsilon\right].\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$ si ha

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\lambda^*(E_{\alpha,\beta})\le 0,$$

da cui segue

$$\lambda^*(E_{\alpha,\beta})=0.$$

$(c)$ Mostriamo che

$$\lambda\left(\left\{D_-f<D^+f\right\}\right)=0.$$

Poiché

$$\left\{D_-f<D^+f\right\}=\bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbf{Q}\\ \alpha<\beta}}E_{\alpha,\beta},$$

per la $\sigma$-subadditività di $\lambda^*$ si ha

$$\lambda\left(\left\{D_-f<D^+f\right\}\right)=\lambda^*\left(\left\{D_-f<D^+f\right\}\right)\le\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbf{Q}\\ \alpha<\beta}}\lambda^*(E_{\alpha,\beta}).$$

Allora per il punto $(b)$ si ha

$$\lambda\left(\left\{D_-f<D^+f\right\}\right)=0. \quad\blacksquare$$

**Lemma 1.15** Sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ limitata non decrescente. Allora l'insieme

$$\{D_+f<D^-f\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

*Dimostrazione.* Definiamo la funzione $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x\in(a,b)$ poniamo

$$F(x):=-f(a+b-x).$$

Allora $F$ è limitata non decrescente e per ogni $x\in(a,b)$ risulta

$$D_+f(x)=D_-F(a+b-x),\quad D^-f(x)=D^+F(a+b-x).$$

Quindi per il lemma precedente l'insieme

$$\left\{D_+f<D^-f\right\}=\left\{D_-F<D^+F\right\}$$

ha misura di Lebesgue nulla. $\blacksquare$

**Lemma 1.16** Sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ limitata non decrescente. Allora l'insieme

$$\{D^+f=\infty\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

*Dimostrazione.* Per ogni $\beta>0$ si ha

$$\left\{D^+f=\infty\right\}\subseteq B(\beta;a,b).$$

$(a)$ Mostriamo che per ogni $\beta>0$ risulta

$$\lambda^*(B(\beta;a,b))\le\frac{1}{\beta}\left[f\left(b^-\right)-f\left(a^+\right)\right].$$

Sia $\beta>0$ arbitrario.
Mostriamo che

$$\lambda^*(B(\beta;a,b))=\lambda^*(B(\beta;a,b)\setminus S).$$

Poiché

$$B(\beta;a,b)\setminus S\subseteq B(\beta;a,b),$$

si ha

$$\lambda^*(B(\beta;a,b)\setminus S)\le\lambda^*(B(\beta;a,b)).$$

Inoltre si ha

$$B(\beta;a,b)=[B(\beta;a,b)\setminus S]\cup S$$

Poiché $S$ è numerabile si ha $S\in\mathcal{L}((a,b))$ e risulta

$$\lambda(S)=0.$$

Quindi

$$\lambda^*(B(\beta;a,b))\le\lambda^*(B(\beta;a,b)\setminus S).$$

Mostriamo che

$$\lambda^*(B(\beta;a,b)\setminus S)\le\frac{1}{\beta}\left[f\left(b^-\right)-f\left(a^+\right)\right].$$

Si ha

$$B(\beta;a,b)\setminus S\subseteq E_+(\beta;a,b).$$

Se $E_+(\beta;a,b)=\emptyset$ si ha

$$B(\beta;a,b)\setminus S=\emptyset,$$

quindi

$$\lambda^*(B(\beta;a,b)\setminus S)=0.$$

Sia $E_+(\beta;a,b)\neq\emptyset$. Sia $\{(a_n,b_n)\}$ una successione disgiunta di intervalli contenuti in $(a,b)$ tali che

$$E_+(\beta;a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n).$$

Inoltre per ogni $n\in\mathbf{N}$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\le\frac{1}{\beta}\left[f\left(b^-\right)-f\left(a^+\right)\right].$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}\lambda^*(B(\beta;a,b)\setminus S) &\le \lambda^*(E_+(\beta;a,b))\le\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\le\frac{1}{\beta}\left[f\left(b^-\right)-f\left(a^+\right)\right].\end{aligned}$$

$(b)$ Mostriamo che

$$\left(\left\{D^+f=\infty\right\}\right)=0.$$

Poiché per ogni $\beta>0$ si ha

$$\left\{D^+f=\infty\right\}\subseteq B(\beta;a,b),$$

per la monotonia di $\lambda^*$ per ogni $\beta>0$ si ha

$$\lambda\left(\left\{D^+f=\infty\right\}\right)=\lambda^*\left(\left\{D^+f=\infty\right\}\right)\le\lambda^*\left(B(\beta;a,b)\right).$$

Allora per il punto $(a)$ per ogni $\beta>0$ si ha

$$\lambda\left(\left\{D^+f=\infty\right\}\right)\le\frac{1}{\beta}\left[f\left(b^-\right)-f\left(a^+\right)\right].$$

Per l'arbitrarietà di $\beta>0$ si ha

$$\lambda\left(\left\{D^+f=\infty\right\}\right)=0. \quad\blacksquare$$

**Teorema 1.17** *(Lebesgue)* Sia $f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ monotona. Allora $f$ è derivabile q.o. in $[a,b]$.

*Dimostrazione.* Poiché $f$ è monotona per ogni $x\in[a,b]$ si ha

$$f(a)\le f(x)\le f(b).$$

Quindi $f$ è limitata. Supponiamo $f$ non decrescente. Allora le quattro derivate generalizzate di $f$ sono non negative in $[a,b]$. Poniamo

$$E:=\left\{D^+f\le D_-f\right\}\cap\left\{D^-f\le D_+f\right\}\cap\left\{D^+f<\infty\right\}.$$

Per ogni $x\in E$ si ha

$$D_-f\le D^-f\le D_+f\le D^+f\le D_-f,\quad D^+f<\infty,$$

da cui segue

$$D_-f=D^-f=D_+f=D^+f<\infty.$$

Quindi $f$ è derivabile in $E$. Inoltre, poiché

$$\mathcal{C}E=\left\{D_-f<D^+f\right\}\cup\left\{D_+f<D^-f\right\}\cup\left\{D^+f=\infty\right\},$$

per i tre lemmi precedenti si ha

$$\lambda(\mathcal{C}E)=0. \quad\blacksquare$$

**Teorema 1.18** Sia $I=[a,b]$. Sia $f:I\longrightarrow\mathbf{R}$ non decrescente. Allora $f'\in L^1(I)$. Inoltre risulta:

$$\int_I f'\,d\lambda\le f(b)-f(a).$$

*Dimostrazione.* Poiché $f$ è non decrescente l'insieme $S$ dei suoi punti di discontinuità è numerabile e quindi verifica

$$\lambda(S)=0.$$

Quindi $f$ è continua q.o. in $I$. Allora $f$ è integrabile secondo Riemann in $I$. Quindi in particolare

$$f\in\mathcal{M}(I,\mathcal{L}(I)).$$

Estendiamo la definizione di $f$ ponendo per ogni $x>b$

$$f(x):=f(b).$$

Per ogni $n\in\mathbf{N}$ definiamo la funzione $g_n:I\longrightarrow\mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x\in I$ poniamo

$$g_n(x):=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

Poiché $f$ è integrabile secondo Riemann e poiché $f\in\mathcal{M}(I,\mathcal{L}(I))$, per ogni $n\in\mathbf{N}$ la funzione $g_n$ è integrabile secondo Riemann e risulta

$$g_n\in\mathcal{M}(I,\mathcal{L}(I)).$$

Per il teorema precedente $f$ è derivabile q.o. in $I$. Allora per quasi ogni $x\in I$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Quindi

$$f'\in\mathcal{M}(I,\mathcal{L}(I)).$$

Inoltre, tenendo conto del lemma di Fatou, si ha

$$\begin{aligned}\int_I f'\,d\lambda &\le \underline{\lim}\int_I g_n\,d\lambda=\underline{\lim}\int_a^b g_n(x)\,dx=\\ &= \underline{\lim}\left[n\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx-n\int_a^b f(x)\,dx\right]=\\ &= \underline{\lim}\left[n\int_b^{b+1/n}f(x)\,dx-n\int_a^{a+1/n}f(x)\,dx\right].\end{aligned}$$

Per ogni $c\in[a,b]$ si ha

$$\underline{\lim}\,n\int_c^{c+1/n}f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}n\int_c^{c+1/n}f(x)\,dx=f(c).$$

Quindi

$$\int_I f'\,d\lambda\le f(b)-f(a). \quad\blacksquare$$

**Definizione 1.19** Una funzione $f:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}$ si dice singolare se:

(i) $f$ è derivabile q.o. in $(a,b)$;
(ii) risulta $f'=0$ q.o. in $(a,b)$.

**Esempio 1.20** La funzione Heavyside $H$ è singolare in ogni intervallo $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$.
Infatti $H$ è derivabile con derivata nulla in ogni $x\ne0$. Inoltre si ha

$$D_+H(0)=D^+H(0)=0,\quad D_-H(0)=D^-H(0)=\infty.$$

**Esempio 1.21** La funzione di Lebesgue-Vitali $L$ è singolare in $[0,1]$. Infatti poiché $L$ è non decrescente in $[0,1]$, è derivabile q.o. in $[0,1]$. Inoltre, poiché negli intervalli aperti $I_{n,k}$ rimossi nella costruzione dell'insieme di Cantor la funzione $L$ è costante, si ha

$$L'=0$$

nell'insieme

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n}I_{n,k}.$$

Allora poiché

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n}I_{n,k}\right)=K$$

e poiché

$$\lambda(K)=0,$$

si ha

$$L'=0\quad\text{q.o. in }[0,1].$$

**Osservazione 1.22** Esitono funzioni singolari, continue, non decrescenti, ma non costanti. Un esempio è dato dalla funzione di Lebesgue-Vitali.

**Osservazione 1.23** Esistono funzioni singolari, continue e strettamente crescenti (non le vediamo).

## 9.2 Funzioni a variazione limitata

**Definizione 2.1** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Sia

$$\Delta := \{a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b\}$$

una partizione di $[a,b]$. Poniamo

$$t_{ab}(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| .$$

**Notazione 2.2** Denotiamo con $\Pi$ l'insieme delle partizioni di $[a,b]$.

**Definizione 2.3** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Si dice variazione totale di $f$ in $[a,b]$ la quantità

$$T_{ab}(f) := \sup_{\Delta \in \Pi} t_{ab}(f,\Delta) .$$

**Definizione 2.4** La funzione $f$ si dice a variazione limitata in $[a,b]$ se

$$T_{ab}(f) < \infty.$$

Denotiamo con $BV[a,b]$ l'insieme delle funzioni a variazione limitata in $[a,b]$.

**Definizione 2.5** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Si dice variazione totale di $f$ in $\mathbf{R}$ la quantità

$$T(f) := \sup_{-\infty < a < b < \infty} T_{ab}(f) .$$

**Definizione 2.6** La funzione $f$ si dice a variazione limitata in $\mathbf{R}$ se

$$T(f) < \infty.$$

Denotiamo con $BV(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni a variazione limitata in $\mathbf{R}$.

**Osservazione 2.7** Se $f \in BV(\mathbf{R})$ allora per ogni $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$f|_{[a,b]} \in BV[a,b] .$$

Viceversa se per ogni $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$f|_{[a,b]} \in BV[a,b] .$$

non necessariamente $f \in BV(\mathbf{R})$, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 2.8** Sia

$$f(x) = \sin x.$$

Per ogni $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$f|_{[a,b]} \in BV[a,b] .$$

D'altra parte

$$f \notin BV(\mathbf{R}) .$$

**Osservazione 2.9** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ monotona. Allora $f \in BV[a,b]$ e risulta

$$T_{ab}(f) = |f(b) - f(a)| .$$

**Osservazione 2.10** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monotona. Allora $f \in BV(\mathbf{R})$ se e solo se $f$ è limitata. In tal caso risulta

$$T(f) = |f(\infty) - f(-\infty)| .$$

**Osservazione 2.11** Sia $f \in BV[a,b]$ oppure $f \in BV(\mathbf{R})$. Allora $f$ è limitata.

Infatti se $f \in BV[a,b]$ si ha

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le |f(a)| + T_{ab}(f) < \infty,$$

e se $f \in BV(\mathbf{R})$ si ha

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \le |f(-\infty)| + T(f) < \infty.$$

**Osservazione 2.12** Sia $f \in BV[a,b]$ tale che

$$T_{ab}(f) = 0.$$

Allora $f$ è costante in $[a,b]$.

**Proposizione 2.13**

(i) Siano $f \in BV[a,b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$T_{ab}(\lambda f) = |\lambda|\, T_{ab}(f) .$$

(ii) Siano $f,g \in BV[a,b]$. Allora

$$T_{ab}(f+g) \le T_{ab}(f) + T_{ab}(g) .$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Per ogni $\Delta \in \Pi$ si ha

$$\begin{aligned} t_{ab}(\lambda f,\Delta) &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda f(x_k) - \lambda f(x_{k-1})| = \\ &= |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \\ &= |\lambda|\, t_{ab}(f,\Delta) \le |\lambda|\, T_{ab}(f) . \end{aligned}$$

Quindi

$$T_{ab}(\lambda f) \le |\lambda|\, T_{ab}(f) .$$

$(ii)$ Per ogni $\Delta \in \Pi$ si ha

$$\begin{aligned} t_{ab}(f+g,\Delta) &= \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(x_{k-1}) + g(x_k) - g(x_{k-1})| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \\ &= t_{ab}(f,\Delta) + t_{ab}(g,\Delta) \le T_{ab}(f) + T_{ab}(g) . \end{aligned}$$

Allora

$$T_{ab}(f+g) \le T_{ab}(f) + T_{ab}(g) . \quad \blacksquare$$

**Proposizione 2.14** Siano $f,g \in BV[a,b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$f + \lambda g \in BV[a,b] .$$

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente si ha

$$T_{ab}(f+\lambda g) \le T_{ab}(f) + |\lambda|\, T_{ab}(g) < \infty. \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.15** Definiamo l'applicazione $\|\cdot\| : BV[a,b] \to \mathbf{R}_+$ nel seguente modo. Per ogni $f \in BV[a,b]$ poniamo

$$\|f\| := T_{ab}(f) .$$

**Proposizione 2.16** L'applicazione $\|\cdot\| : BV[a,b] \to \mathbf{R}_+$ è una seminorma.

*Dimostrazione.* $(i)$ Siano $f \in BV[a,b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora si ha

$$\|\lambda f\| = T_{ab}(\lambda f) = |\lambda|\, T_{ab}(f) = |\lambda|\, \|f\| .$$

$(ii)$ Siano $f,g \in BV[a,b]$. Allora si ha

$$\|f+g\| = T_{ab}(f+g) \le T_{ab}(f) + T_{ab}(g) = \|f\| + \|g\| . \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.17** *(Additività della variazione totale)* Sia $f \in BV[a,b]$. Sia $c \in (a,b)$. Allora

$$T_{ab}(f) = T_{ac}(f) + T_{cb}(f).$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che vale la disuguaglianza

$$T_{ab}(f) \leq T_{ac}(f) + T_{cb}(f).$$

Sia $\Delta$ una partizione di $[a,b]$ arbitraria. Allora $\Delta$ individua una partizione $\Delta_1$ di $[a,c]$ e una partizione $\Delta_2$ di $[c,b]$ e risulta

$$t_{ab}(f,\Delta) \leq t_{ac}(f,\Delta_1) + t_{cb}(f,\Delta_2) \leq T_{ac}(f) + T_{cb}(f).$$

Allora

$$T_{ab}(f) \leq T_{ac}(f) + T_{cb}(f).$$

Mostriamo che vale la disuguaglianza inversa

$$T_{ac}(f) + T_{cb}(f) \leq T_{ab}(f).$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una partizione $\Delta_1$ di $[a,c]$ e una partizione $\Delta_2$ di $[c,b]$ tali che

$$t_{ac}(f,\Delta_1) > T_{ac}(f) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad t_{cb}(f,\Delta_2) > T_{cb}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo

$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$$

Allora $\Delta$ è una partizione di $[a,b]$ e risulta

$$t_{ab}(f,\Delta) = t_{ac}(f,\Delta_1) + t_{cb}(f,\Delta_2) > T_{ac}(f) + T_{cb}(f) - \varepsilon.$$

Quindi

$$T_{ab}(f,\Delta) \geq T_{ac}(f) + T_{cb}(f) - \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, si ha

$$T_{ab}(f,\Delta) \geq T_{ac}(f) + T_{cb}(f). \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.18** Sia $f \in BV[a,b]$. Definiamo l'applicazione $T_a^{(f)} : [a,b] \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in [a,b]$ poniamo

$$T_a^{(f)}(x) := T_{ax}(f).$$

**Teorema 2.19** Sia $f \in BV[a,b]$. Allora

(i) $T_a^{(f)}$ è non decrescente;

(ii) $T_a^{(f)}$ è continua da destra (o da sinistra) in ogni punto in cui lo sia la funzione $f$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Per ogni $x, y \in [a,b]$, con $x \leq y$, si ha

$$T_{ay}(f) - T_{ax}(f) = T_{xy}(f) \geq 0,$$

quindi

$$T_{ax}(f) \leq T_{ay}(f),$$

ovvero

$$T_a^{(f)}(x) \leq T_a^{(f)}(y).$$

Quindi $T_a^{(f)}$ è non decrescente.
$(ii)$ Sia $x_0 \in [a,b)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia

$$\Delta = \{x_0 \equiv y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b\}$$

una partizione di $[x_0, b]$ tale che

$$t_{x_0 b}(f,\Delta) > T_{x_0 b}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $x_1 \in (x_0, y_1)$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo

$$\Delta_1 := \Delta \cup \{x_1\}.$$

Allora $\Delta_1$ è ancora una partizione di $[x_0, b]$ e poiché

$$\Delta_1 \supseteq \Delta,$$

risulta

$$t_{x_0 b}(f,\Delta_1) \geq t_{x_0 b}(f,\Delta) > T_{x_0 b}(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo

$$\Delta_2 := \Delta_1 \setminus \{x_0\}.$$

Allora $\Delta_2$ è una partizione di $[x_1, b]$ e risulta

$$t_{x_1 b}(f,\Delta_2) = t_{x_0 b}(f,\Delta_1) - |f(x_1) - f(x_0)|.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}
T_{x_1 b}(f) &\geq t_{x_1 b}(f,\Delta_2) = \\
&= t_{x_0 b}(f,\Delta_1) - |f(x_1) - f(x_0)| \geq \\
&\geq t_{x_0 b}(f,\Delta) - |f(x_1) - f(x_0)| > \\
&> T_{x_0 b}(f) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

cioè

$$T_{x_0 b} < T_{x_1 b} + \varepsilon$$

Allora, per il teorema precedente si ha

$$\begin{aligned}
T_{a x_1}(f) &= T_{ab}(f) - T_{x_1 b}(f) < \\
&< T_{ab}(f) - T_{x_0 b}(f) + \varepsilon = T_{a x_0}(f) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

cioè

$$T_a^{(f)}(x_1) < T_a^{(f)}(x_0) + \varepsilon$$

Poiché $T_a^{(f)}$ è non decrescente, per ogni $x \in (x_0, x_1)$ si ha

$$T_a^{(f)}(x_0) \leq T_a^{(f)}(x) \leq T_a^{(f)}(x_1) < T_a^{(f)}(x_0) + \varepsilon.$$

Quindi

$$\lim_{x \to x_0^+} T_a^{(f)}(x) = T_a^{(f)}(x_0). \quad \blacksquare$$

**Definizione 2.20** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Sia

$$\Delta = \{a \equiv x_0, x_1, \ldots, x_n \equiv b\}$$

una partizione di $[a,b]$. Poniamo

$$p_{ab}(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]_+,$$

$$n_{ab}(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]_-.$$

**Definizione 2.21** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Si dicono <u>*variazione positiva*</u> e <u>*variazione negativa*</u> di $f$ in $[a,b]$ rispettivamente le quantità

$$P_{ab}(f) := \sup_{\Delta \in \Pi} p_{ab}(f,\Delta),$$

$$N_{ab}(f) := \sup_{\Delta \in \Pi} n_{ab}(f,\Delta).$$

**Proposizione 2.22** Sia $f \in BV[a,b]$. Allora

$$P_{ab}(f) = \frac{1}{2}T_{ab}(f) + \frac{f(b) - f(a)}{2},$$

$$N_{ab}(f) = \frac{1}{2}T_{ab}(f) - \frac{f(b) - f(a)}{2},$$

$$T_{ab}(f) = P_{ab}(f) + N_{ab}(f),$$

$$P_{ab}(f) - N_{ab}(f) = f(b) - f(a).$$

*Dimostrazione.* Sia

$$\Delta = \{a \equiv x_0, x_1, ..., x_n \equiv b\}$$

una partizione di $[a, b]$ arbitraria. Si ha

$$p_{ab}(f, \Delta) + n_{ab}(f, \Delta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ [f(x_k) - f(x_{k-1})]_+ + [f(x_k) - f(x_{k-1})]_- \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = t_{ab}(f, \Delta).$$

$$p_{ab}(f, \Delta) - n_{ab}(f, \Delta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ [f(x_k) - f(x_{k-1})]_+ - [f(x_k) - f(x_{k-1})]_- \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

Allora

$$p_{ab}(f, \Delta) = \frac{1}{2} t_{ab}(f, \Delta) + \frac{f(b) - f(a)}{2},$$

$$n_{ab}(f, \Delta) = \frac{1}{2} t_{ab}(f, \Delta) - \frac{f(b) - f(a)}{2}.$$

Per l'arbitrarietà di $\Delta$ si ha

$$P_{ab}(f) = \frac{1}{2} T_{ab}(f) + \frac{f(b) - f(a)}{2},$$

$$N_{ab}(f) = \frac{1}{2} T_{ab}(f) - \frac{f(b) - f(a)}{2}.$$

Da queste seguono le altre due relazioni. ■

**Teorema 2.23** Sia $f \in BV[a, b]$. Sia $c \in (a, b)$. Allora

$$P_{ab}(f) = P_{ac}(f) + P_{cb}(f).$$

$$N_{ab}(f) = N_{ac}(f) + N_{cb}(f).$$

*Dimostrazione.* Segue dall'additività della variazione totale, tenendo conto della proposizione precedente. ■

**Definizione 2.24** Sia $f \in BV[a, b]$. Definiamo le applicazioni

$$P_a^{(f)} : [a, b] \to \mathbf{R}, \quad N_a^{(f)} : [a, b] \to \mathbf{R}$$

nel seguente modo. Per ogni $x \in [a, b]$ poniamo

$$P_a^{(f)}(x) := P_{ax}(f), \quad N_a^{(f)}(x) := N_{ax}(f).$$

**Proposizione 2.25** Sia $f \in BV[a, b]$. Allora

$$P_a^{(f)} = \frac{1}{2}\left(T_a^{(f)} + f\right) - \frac{f(a)}{2},$$

$$N_a^{(f)} = \frac{1}{2}\left(T_a^{(f)} - f\right) + \frac{f(a)}{2},$$

$$T_a^{(f)} = P_a^{(f)} + N_a^{(f)},$$

$$f = P_a^{(f)} - N_a^{(f)} + f(a).$$

*Dimostrazione.* Segue dalla proposizione 2.22. ■

**Teorema 2.26** Sia $f \in BV[a, b]$. Allora

(i) $P_a^{(f)}, N_a^{(f)}$ sono non decrescenti;

(ii) $P_a^{(f)}, N_a^{(f)}$ sono continue da destra (o da sinistra) in ogni punto in cui lo sia la funzione $f$.

*Dimostrazione.* Segue dal teorema 2.19, tenendo conto della proposizione precedente. ■

**Teorema 2.27** Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in BV[a, b]$;

(ii) esistono $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbf{R}$ non decrescenti tali che

$$f = f^+ - f^-.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Poniamo

$$f^+ := P_a^{(f)} + [f(a)]_+, \quad f^- := N_a^{(f)} + [f(a)]_-.$$

Allora $f^+$ e $f^-$ sono non decrescenti e risulta

$$f^+ - f^- = P_a^{(f)} - N_a^{(f)} + f(a) = f.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia

$$\Delta = \{a \equiv x_0, x_1, ..., x_n \equiv b\}$$

una partizione di $[a, b]$ arbitraria. Si ha

$$t_{ab}(f, \Delta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left[f^+(x_k) - f^+(x_{k-1})\right] - \left[f^-(x_k) - f^-(x_{k-1})\right] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[f^+(x_k) - f^+(x_{k-1})\right] + \sum_{k=1}^{n} \left[f^-(x_k) - f^-(x_{k-1})\right] =$$

$$= \left[f^+(b) - f^+(a)\right] + \left[f^-(b) - f^-(a)\right].$$

Per l'arbitrarietà di $\Delta$ si ha

$$T_{ab}(f, \Delta) \leq \left[f^+(b) - f^+(a)\right] + \left[f^-(b) - f^-(a)\right] < \infty. \ ■$$

**Definizione 2.28** Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Siano $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbf{R}$ non decrescenti tali che

$$f = f^+ - f^-.$$

La precedente uguaglianza è detta <u>*decomposizione di Jordan*</u> di $f$.

**Osservazione 2.29** La decomposizione di Jordan di una funzione non è unica.

**Corollario 2.30** Sia $f \in BV[a, b]$. Allora $f$ ha al più discontinuità di prima specie in $[a, b]$. Inoltre l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ è al più numerabile.

*Dimostrazione.* Siano $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbf{R}$ non decrescenti tali che

$$f = f^+ - f^-.$$

Poiché $f^+$ e $f^-$ sono non decrescenti, gli insiemi dei punti di discontinuità di $f^+$ e $f^-$ sono al più numerabili. Quindi si ha la tesi. ■

**Teorema 2.31** Sia $f \in BV[a, b]$. Allora $f$ è derivabile q.o. in $[a, b]$.

*Dimostrazione.* Siano $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbf{R}$ non decrescenti tali che

$$f = f^+ - f^-.$$

Per il teorema 1.17 le funzioni $f^+$ ed $f^-$ sono derivabili q.o. in $[a,b]$. Allora si ha la tesi. ■

**Teorema 2.32** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in BV[a,b]$. Allora $f' \in L^1(I)$ e risulta:

$$\int_I |f'| \, d\lambda \leq T_{ab}(f).$$

*Dimostrazione.* Poiché $T_a^{(f)}, N_a^{(f)}, P_a^{(f)}$ sono non decrescenti, per il teorema 1.17 sono derivabili q.o. in $[a,b]$ con derivata non negativa. Inoltre ricordando che

$$T_a^{(f)} = P_a^{(f)} + N_a^{(f)},$$

$$f = P_a^{(f)} - N_a^{(f)} + f(a),$$

si ha

$$\left(T_a^{(f)}\right)' = \left(P_a^{(f)}\right)' + \left(N_a^{(f)}\right)',$$

$$f' = \left(P_a^{(f)}\right)' - \left(N_a^{(f)}\right)'.$$

Allora

$$|f'| \leq \left|\left(P_a^{(f)}\right)'\right| + \left|\left(N_a^{(f)}\right)'\right| = \left(P_a^{(f)}\right)' + \left(N_a^{(f)}\right)' = \left(T_a^{(f)}\right)'.$$

Quindi

$$\int_I |f'| \, d\lambda \leq \int_I \left(T_a^{(f)}\right)' d\lambda \leq T_a^{(f)}(b) - T_a^{(f)}(a) = T_{ab}(f). \quad ■$$

**Definizione 2.33** Una curva piana si dice <u>*rettificabile*</u> se l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte nel sostegno della curva è finito. In tal caso tale estremo superiore si dice <u>*lunghezza*</u> della curva.

**Teorema 2.34** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continua. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in BV[a,b]$;

(ii) il grafico di $f$ è una curva rettificabile.

*Dimostrazione.* Definiamo la funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ nel seguente modo. Per ogni $x \in [a,b]$ poniamo

$$\varphi(x) := (x, f(x)).$$

L'applicazione $\varphi$ realizza una corrispondenza biunivoca tra l'intervallo $[a,b]$ e il grafico di $f$. Quindi esiste una corrispondenza biunivoca tra partizioni di $[a,b]$ e poligonali inscritte nel grafico di $f$. Sia

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

una partizione di $[a,b]$ arbitraria. Sia $\pi(\Delta)$ la poligonale corrispondente. La lunghezza di tale poligonale è

$$l(\pi(\Delta)) = \sum_{k=1}^n \left\{[x_k - x_{k-1}]^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2\right\}^{1/2}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| &\leq l(\pi(\Delta)) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \{[x_k - x_{k-1}] + |f(x_k) - f(x_{k-1})|\},\end{aligned}$$

ovvero

$$t_{ab}(f,\Delta) \leq l(\pi(\Delta)) \leq t_{ab}(f,\Delta) + b - a.$$

Per l'arbitrarietà di $\Delta$ si ha

$$T_{ab}(f) \leq \sup_{\Delta \in \Pi} l(\pi(\Delta)) \leq T_{ab}(f) + b - a.$$

Quindi

$$T_{ab}(f) < \infty \quad \text{se e solo se} \quad \sup_{\Delta\in\Pi} l(\pi(\Delta)) < \infty. \quad ■$$

## 9.3 Funzioni assolutamente continue

**Notazione 3.1** Sia $J \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo. Denotiamo con $\mathcal{F}(J)$ l'insieme delle famiglie finite di sottointervalli chiusi di $J$ privi di punti interni comuni.

**Definizione 3.2** Una funzione $f : J \to \mathbf{R}$ si dice <u>*assolutamente continua*</u> in $J$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia

$$\{[a_1,b_1], \ldots, [a_n,b_n]\} \in \mathcal{F}(J),$$

con

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta,$$

risulti

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Denotiamo con $AC(J)$ l'insieme delle funzioni assolutamente continue in $J$. Se $J = [a,b]$ scriviamo $AC[a,b]$.

**Osservazione 3.3** Sia $f \in AC(J)$. Allora $f$ è uniformemente continua in $J$.

**Osservazione 3.4** Se $f \in AC(\mathbf{R})$ allora per ogni $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$f|_{[a,b]} \in AC[a,b].$$

Viceversa se per ogni $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$f|_{[a,b]} \in AC[a,b].$$

non necessariamente $f \in AC(\mathbf{R})$, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 3.5** Sia

$$f(x) = x^2.$$

Per ogni $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$f|_{[a,b]} \in AC[a,b].$$

D'altra parte, poiché $f$ non è uniformemente continua in $\mathbf{R}$, si ha

$$f \notin AC(\mathbf{R}).$$

**Osservazione 3.6** Se $f : J \to \mathbf{R}$ è lipschitziana si ha

$$f \in AC(J).$$

In particolare se $f \in C^1(J)$ si ha

$$f \in AC(J).$$

**Definizione 3.7** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in L^1(I)$. La <u>*funzione integrale*</u> relativa ad $f$ è la funzione $F : I \to \mathbf{R}$ definita nel seguente modo. Per ogni $x \in I$ poniamo

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \, d\lambda.$$

**Proposizione 3.8** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in L^1(I)$. Sia $F$ la funzione integrale relativa ad $f$. Allora

$$F \in AC[a,b].$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che, per ogni $E \in \mathcal{L}(I)$, con

$$\lambda(E) < \delta,$$

risulti

$$\int_E |f| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Sia $\{[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\} \in \mathcal{F}(J)$ tale che

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta.$$

Poniamo

$$E := \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k].$$

Allora

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta.$$

Quindi

$$\int_E |f| \, d\lambda < \varepsilon,$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k, b_k]} |f| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{[a_k, b_k]} f \, d\lambda \right| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k, b_k]} |f| \, d\lambda < \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposizione 3.9** Siano $f, g \in AC(J)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$f + \lambda g \in AC(J).$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$h := f + \lambda g.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta_1 > 0$ tale che per ogni famiglia

$$\{[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\} \in \mathcal{F}(J),$$

con

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta_1,$$

risulti

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia $\delta_2 > 0$ tale che per ogni famiglia

$$\{[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\} \in \mathcal{F}(J),$$

con

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta_2,$$

risulti

$$\sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}.$$

Poniamo

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Allora per ogni famiglia

$$\{[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\} \in \mathcal{F}(J),$$

con

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{n} |h(b_k) - h(a_k)| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Teorema 3.10** Sia $f \in AC[a, b]$. Allora $f \in BV[a, b]$.

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia

$$\{[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]\} \in \mathcal{F}([a, b]),$$

con

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

risulti

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Sia

$$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

una partizione di $[a, b]$ tale che per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ risulti

$$x_k - x_{k-1} < \delta.$$

Per l'additività della variazione totale si ha

$$T_{ab}(f) = \sum_{k=1}^{n} T_{x_{k-1}x_k}(f).$$

Sia $k \in \{1, \ldots, n\}$. Sia

$$\Delta_k := \left\{x_{k-1} = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = x_k\right\}$$

una partizione di $[x_{k-1}, x_k]$ arbitraria. Poiché

$$\left\{\left[x_0^k, x_1^k\right], \ldots, \left[x_{n_k-1}^k, x_{n_k}^k\right]\right\} \in \mathcal{F}([a, b])$$

e poiché risulta

$$\sum_{l=1}^{n_k} \left(x_l^k - x_{l-1}^k\right) = x_k - x_{k-1} < \delta,$$

si ha

$$\sum_{l=1}^{n_k} \left| f\left(x_{l-1}^k\right) - f\left(x_l^k\right) \right| < \varepsilon,$$

cioè

$$t_{x_{k-1}x_k}(f, \Delta_k) < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\Delta_k$ si ha

$$T_{x_{k-1}x_k}(f) \le \varepsilon.$$

Allora

$$T_{ab}(f) = \sum_{k=1}^{n} T_{x_{k-1}x_k}(f) \le n\varepsilon < \infty.$$

Quindi si ha la tesi. $\blacksquare$

**Osservazione 3.11** Se $f \in AC(\mathbf{R})$ in generale non è vero che $f \in BV(\mathbf{R})$, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 3.12** Sia

$$f(x) = \sin x.$$

Poiché $f$ è lipschitziana in $\mathbf{R}$ si ha

$$f \in AC(\mathbf{R}).$$

D'altra parte abbiamo visto che
$$f \notin BV(\mathbf{R}).$$

**Teorema 3.13** Sia $f \in AC[a,b]$. Allora $f$ è derivabile q.o. in $[a,b]$

*Dimostrazione.* Segue dai teoremi 3.10 e 2.31. ∎

**Proposizione 3.14** Sia $f \in AC[a,b]$. Allora $T_a^{(f)}, P_a^{(f)}, N_a^{(f)} \in AC[a,b]$.

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia
$$\{[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]\} \in \mathcal{F}([a,b]),$$
con
$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$
risulti
$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$
Sia $\{[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]\} \in \mathcal{F}([a,b])$ tale che
$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta.$$
Per ogni $k \in \{1,...,n\}$ sia
$$\Delta_k := \left\{a_k = x_0^k < x_1^k < ... < x_{n_k}^k = b_k\right\}$$
una partizione di $[a_k,b_k]$ arbitraria. Poiché
$$\left\{\left[x_{l-1}^k, x_l^k\right]\right\}_{k\in\{1,...,n\},\ l\in\{1,...,n_k\}} \subseteq \mathcal{F}([a,b])$$
e poiché risulta
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k}\left(x_l^k - x_{l-1}^k\right) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$
si ha
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k}\left|f\left(x_l^k\right) - f\left(x_{l-1}^k\right)\right| < \varepsilon,$$
ovvero
$$\sum_{k=1}^{n} t_{a_k b_k}(f,\Delta_l) < \varepsilon.$$
Per l'arbitrarietà delle $\Delta_k$ si ha
$$\sum_{k=1}^{n} T_{a_k b_k}(f) \le \varepsilon.$$
Allora
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left|T_a^{(f)}(b_k) - T_a^{(f)}(a_k)\right| &= \sum_{k=1}^{n}\left|T_{ab_k}(f) - T_{aa_k}(f)\right| = \\ &= \sum_{k=1}^{n} T_{a_k b_k}(f) \le \varepsilon.\end{aligned}$$
Quindi
$$T_a^{(f)} \in AC[a,b].$$
Infine
$$P_a^{(f)} = \frac{1}{2}\left(T_a^{(f)} + f\right) - \frac{f(a)}{2} \in AC[a,b],$$
$$N_a^{(f)} = \frac{1}{2}\left(T_a^{(f)} - f\right) + \frac{f(a)}{2} \in AC[a,b]. \quad ∎$$

**Teorema 3.15** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in AC[a,b]$;
(ii) esistono $f^+, f^- \in AC[a,b]$ non decrescenti tali che
$$f = f^+ - f^-.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Poniamo
$$f^+ := P_a^{(f)} + [f(a)]_+, \quad f_- := N_a^{(f)} + [f(a)]_-.$$
Allora per la proposizione precedente si ha
$$f^+, f^- \in AC[a,b].$$
Inoltre $f^+$ e $f^-$ sono non decrescenti e risulta
$$f^+ - f^- = P_a^{(f)} - N_a^{(f)} + f(a) = f.$$
$(ii) \Rightarrow (i)$ Segue dalla proposizione 3.9. ∎

**Teorema 3.16** Sia $f \in AC[a,b]$ non decrescente. Sia $E \subseteq [a,b]$ misurabile secondo Lebesgue tale che
$$\lambda(E) = 0.$$
Allora risulta
$$\lambda(f(E)) = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia
$$\{[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]\} \in \mathcal{F}(J),$$
con
$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$
risulti
$$\sum_{k=1}^{n}[f(b_k) - f(a_k)] < \varepsilon.$$
Poiché
$$\lambda^*(E) = \lambda(E) = 0,$$
esiste una successione disgiunta $\{(a_n,b_n]\}$ di intervalli contenuti in $[a,b]$, con
$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n],$$
tale che
$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta.$$
Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha
$$\{[a_1,b_1],...,[a_n,b_n]\} \in \mathcal{F}(J)$$
e risulta
$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta.$$
Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta
$$\sum_{k=1}^{n}[f(b_k) - f(a_k)] < \varepsilon.$$
Per l'arbitrarietà di $n \in \mathbf{N}$ si ha
$$\sum_{k=1}^{\infty}[f(b_k) - f(a_k)] < \varepsilon.$$
Poiché $f$ è continua e non decrescente risulta
$$f(E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k,b_k]) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[f(a_k), f(b_k)].$$

Quindi

$$\lambda^* (f(E)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [f(b_k) - f(a_k)] < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lambda^* (f(E)) = 0,$$

da cui segue

$$\lambda (f(E)) = 0. \blacksquare$$

**Osservazione 3.17** La funzione di Lebesgue-Vitali non è assolutamente continua in $[0, 1]$.
Infatti supponiamo per assurdo

$$L \in AC[0, 1].$$

Allora, per il teorema precedente, poiché

$$\lambda(K) = 0,$$

si ha

$$\lambda(L(K)) = 0.$$

D'altra parte poiché

$$L(K) = [0, 1],$$

si ha

$$\lambda(L(K)) = 1,$$

da cui l'assurdo.

**Osservazione 3.18** Sia $f \in AC(\mathbf{R})$ non decrescente. Allora la misura di Lebesgue-Stieltjes $\lambda_f$ associata ad $f$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Infatti per il teorema precedente per ogni $E \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tale che

$$\lambda(E) = 0,$$

si ha

$$\lambda_f(E) = \lambda(f(E)) = 0.$$

**Teorema 3.19** Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ non decrescente e continua. Allora l'insieme

$$f(\{f' = 0\})$$

ha misura di Lebesgue nulla.

*Dimostrazione.* Poniamo

$$E := \{f' = 0\}.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitario. Sia $x_0 \in E$. Sia $\xi \in (a, x_0)$ tale che

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} < \varepsilon,$$

ovvero tale che

$$g_\varepsilon(\xi) > g_\varepsilon(x_0).$$

Poiché $f$ è continua, anche $g_\varepsilon$ lo è, quindi

$$g_\varepsilon(x_0) = \overline{g}_\varepsilon(x_0).$$

Allora

$$g_\varepsilon(\xi) > \overline{g}_\varepsilon(x_0),$$

ovvero

$$x_0 \in E_-(\varepsilon; a, b).$$

Quindi

$$E \subseteq E_-(\varepsilon; a, b).$$

Sia $\{(c_n, d_n)\}$ una successione di intervalli disgiunti contenuti in $(a, b)$ tali che

$$E_-(\varepsilon; a, b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n).$$

Allora si ha

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n).$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f(d_n) - f(c_n) \leq \varepsilon (d_n - c_n).$$

Poiché $f$ è continua e non decrescente si ha

$$f(E) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f((c_n, d_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f(c_n), f(d_n)).$$

Allora per la definizione di $\lambda^*$ si ha

$$\begin{aligned} \lambda^*(f(E)) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} [f(d_n) - f(c_n)] \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} (d_n - c_n) \leq \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lambda^*(f(E)) = 0,$$

da cui segue

$$\lambda(f(E)) = 0. \blacksquare$$

**Teorema 3.20** Sia $f \in AC[a, b]$ non decrescente singolare. Allora $f$ è costante in $[a, b]$.

*Dimostrazione.* Sia $c \in (a, b]$ arbitrario. Poniamo

$$E_1 := [a, c] \cap \{f' = 0\}, \quad E_2 := [a, c] \cap \{f' \neq 0\}.$$

Allora

$$[a, c] = E_1 \cup E_2,$$

da cui segue

$$f([a, c]) = f(E_1) \cup f(E_2).$$

Per il teorema precedente si ha

$$\lambda(f(E_1)) = 0.$$

Inoltre poiché $f$ è singolare si ha

$$\lambda(E_2) = 0,$$

quindi, per il teorema 3.16, si ha

$$\lambda(f(E_2)) = 0.$$

Allora

$$\lambda(f([a, c])) = 0.$$

Poiché $f$ è continua e non decrescente si ha

$$f([a, c]) = [f(a), f(c)].$$

Quindi si ha

$$\lambda([f(a), f(c)]) = 0,$$

da cui segue

$$[f(a), f(c)] = \{f(a)\},$$

ovvero

$$f(c) = f(a).$$

Per l'arbitrarietà di $c \in (a, b]$ si ha la tesi. $\blacksquare$

**Osservazione 3.21** Il teorema precedente mostra di nuovo che la funzione di Lebesgue-Vitali $L$ non è assolutamente continua in $[a, b]$.
Infatti supponiamo per assurdo

$$L \in AC[a, b].$$

Allora, poiché $L$ è non decrescente e singolare, per il teorema precedente $L$ è costante in $[a, b]$, da cui l'assurdo.

**Osservazione 3.22** La funzione di Heavyside $H$ non è assolutamente continua in $\mathbf{R}$.
Infatti supponiamo per assurdo

$$H \in AC(\mathbf{R}).$$

Allora per ogni $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ si ha

$$H \in AC[a,b].$$

Quindi, poiché $H$ è non decrescente e singolare, per il teorema precedente per ogni $[a,b] \in \mathbf{R}$ la funzione $H$ è costante in $[a,b]$, da cui l'assurdo.

**Osservazione 3.23** L'inclusione

$$AC[a,b] \subseteq BV[a,b]$$

è stretta, ovvero esistono funzioni a variazione limitata che non sono assolutamente continue, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 3.24** La funzione di Lebesgue-Vitali $L$ e la funzione di Heavyside $H$ sono monotone, quindi a variazione limitata, ma non sono assolutamente continue, per quanto visto nelle precedenti osservazioni.

## 9.4 Derivazione e integrazione

**Definizione 4.1** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in L^1(I)$. La *funzione integrale* relativa ad $f$ è la funzione $F : I \to \mathbf{R}$ definita nel seguente modo. Per ogni $x \in I$ poniamo

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \, d\lambda.$$

**Lemma 4.2** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in L^1(I)$. Sia $F$ la funzione integrale relativa ad $f$. Sia $F$ identicamente nulla in $I$. Allora

$$f = 0 \quad \text{q.o. in } I.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$E_+ := \{f > 0\}, \quad E_- := \{f < 0\}.$$

Mostriamo che

$$\lambda(E_+) = 0.$$

Supponiamo per assurdo

$$\lambda(E_+) > 0.$$

Allora risulta

$$\int_{E_+} f \, d\lambda = \int_{E_+} f_+ \, d\lambda > 0.$$

Poniamo

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \int_{E_+} f \, d\lambda.$$

Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}$, con

$$\lambda(E) < \delta,$$

risulta

$$\int_E f \, d\lambda < \varepsilon.$$

Sia $C \subseteq E_+$ un insieme chiuso tale che

$$\lambda(E_+ \backslash C) < \delta.$$

Allora si ha

$$\int_{E_+ \backslash C} f \, d\lambda < \varepsilon,$$

cioè

$$\int_{E_+} f \, d\lambda - \int_C f \, d\lambda < \varepsilon,$$

ovvero

$$2\varepsilon - \int_C f \, d\lambda < \varepsilon.$$

Da questa segue

$$\int_C f \, d\lambda > \varepsilon.$$

Poniamo

$$A := (a,b) \backslash C.$$

Allora

$$\int_C f \, d\lambda = \int_I f \, d\lambda - \int_A f \, d\lambda.$$

Si ha

$$\int_I f \, d\lambda = F(b) = 0.$$

Inoltre $A$ è aperto. Sia $\{(x_n, y_n)\} \subseteq \mathcal{P}(I)$ una successione disgiunta di intervalli aperti tale che

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n).$$

Allora

$$\int_A f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(c_n, d_n)} f \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} [F(d_n) - F(c_n)] = 0,$$

Quindi

$$\int_C f \, d\lambda = \int_I f \, d\lambda - \int_A f \, d\lambda = 0,$$

da cui l'assurdo.
Analogamente si prova che

$$\lambda(E_-) = 0.$$

Quindi si ha la tesi. ■

**Teorema 4.3** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in L^1(I)$. Sia $F$ la funzione integrale relativa ad $f$. Allora

$$F' = f \quad \text{q.o. in } I.$$

*Dimostrazione.* $(a)$ Supponiamo che esista $M > 0$ tale che

$$|f| \leq M \quad \text{q.o. in } I.$$

Estendiamo la definizione di $F$. Per ogni $x > b$ poniamo

$$F(x) := \int_I f \, d\lambda.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ definiamo la funzione $F_n : I \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in I$ poniamo

$$F_n(x) := n \left[ F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right] = n \int_{\left[x, x+\frac{1}{n}\right]} f \, d\lambda.$$

Sia $y \in I$ arbitrario. Per quasi ogni $x \in [a,y]$ risulta

$$F'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} F_n(x).$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$|F_n| \leq M.$$

Allora per il teorema di Lebesgue si ha

$$\int_{[a,y]} F' \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{[a,y]} F_n \, d\lambda$$

Poiché $F$ è continua in $I$ si ha

$$F \in \mathcal{R}(I),$$

quindi si ha

$$\{F_n\} \subseteq \mathcal{R}(I).$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\int_{[a,y]} F_n \, d\lambda = \int_a^y F_n(x) \, dx.$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_{[a,y]} F' \, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,y]} F_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^y F_n(x) \, dx = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ n \int_a^y F\left(x+\frac{1}{n}\right) dx - n \int_a^y F(x) \, dx \right] = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ n \int_{a+1/n}^{y+1/n} F(x) \, dx - n \int_a^y F(x) \, dx \right] = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ n \int_y^{y+1/n} F(x) \, dx - n \int_a^{a+1/n} F(x) \, dx \right].\end{aligned}$$

Poiché per ogni $z \in I$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} n \int_z^{z+1/n} F(x) \, dx = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} F(x) \, dx = F(z),$$

si ha

$$\int_{[a,y]} F' \, d\lambda = F(y) - F(a) = \int_{[a,y]} f \, d\lambda.$$

Quindi per ogni $y \in I$ si ha

$$\int_{[a,y]} (F' - f) \, d\lambda = 0,$$

ovvero la funzione integrale relativa ad $F' - f$ è identicamente nulla in $I$. Allora per il teorema precedente si ha

$$F' = f \quad \text{q.o. in } I.$$

$(b)$ Supponiamo $f \geq 0$ in $I$. Allora $F$ è non decrescente in $I$ e risulta

$$\int_I F' \, d\lambda \leq F(b) - F(a).$$

Mostriamo che

$$F' \geq f \quad \text{q.o. in } I.$$

Sia $n \in \mathbf{N}$ arbitrario. Poniamo

$$f_n := \min\{f, n\}.$$

Sia $F_n$ la funzione integrale relativa ad $f_n$. Poiché $f_n$ è limitata, per quanto visto in $(i)$ si ha

$$F_n' = f_n \quad \text{q.o. in } I.$$

Poniamo

$$G_n := F - F_n.$$

Allora per ogni $x \in I$ si ha

$$G_n(x) := \int_{[a,x]} (f - f_n) \, d\lambda.$$

Poiché

$$f - f_n \geq 0,$$

l'applicazione $G_n$ è non decrescente, quindi è derivabile q.o. in $I$ e risulta

$$G_n' \geq 0 \quad \text{q.o. in } I.$$

Allora

$$F' = F_n' + G_n' = f_n + G_n' \geq f_n \quad \text{q.o. in } I.$$

Per l'arbitrarietà di $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$F' \geq f \quad \text{q.o. in } I.$$

Allora si ha

$$F(b) - F(a) \geq \int_I F' \, d\lambda \geq \int_I f \, d\lambda = F(b) - F(a),$$

quindi

$$\int_I (F' - f) \, d\lambda = 0.$$

Allora, poiché

$$F' - f \geq 0 \quad \text{q.o. in } I,$$

si ha

$$F' = f \quad \text{q.o. in } I.$$

$(c)$ Nel caso generale si ha

$$f = f_+ - f_-,$$

con

$$f_+, f_- \geq 0.$$

Siano $F_+, F_-$ le funzioni integrali relative ad $f_+, f_-$ rispettivamente. Allora per ogni $x \in I$ si ha

$$F(x) = \int_{[a,x]} f \, d\lambda = \int_{[a,x]} f_+ \, d\lambda - \int_{[a,x]} f_- \, d\lambda = F_+(x) - F_-(x).$$

Quindi

$$F = F_+ - F_-.$$

Inoltre per quanto visto nel punto $(b)$ si ha

$$F_+' = f_+ \quad \text{q.o. in } I, \quad F_-' = f_- \quad \text{q.o. in } I.$$

Allora

$$F' = F_+' - F_-' = f_+ - f_- = f \quad \text{q.o. in } I. \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.4** Sia $I = [a,b]$. Sia $f : I \to \mathbf{R}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f \in AC[a,b]$;

(ii) $f$ è derivabile q.o. in $I$ con derivata $f' \in L^1(I)$ e per ogni $x \in I$ risulta

$$f(x) = \int_{[a,x]} f' \, d\lambda + f(a).$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Poiché $f \in AC[a,b]$ si ha $f \in BV[a,b]$, quindi $f$ è derivabile q.o. in $I$ e risulta

$$f' \in L^1(I).$$

$(a)$ Supponiamo $f$ non decrescente. Sia $g$ la funzione integrale relativa ad $f'$. Allora $g \in AC[a,b]$. Quindi

$$f - g \in AC[a,b].$$

Inoltre $g$ è derivabile q.o. in $I$ e risulta

$$f' = g' \quad \text{q.o. in } I,$$

ovvero

$$(f-g)' = 0 \quad \text{q.o. in } I.$$

Quindi $f - g$ è singolare.
Per ogni $x, y \in I$, con $x \leq y$, poiché risulta

$$\int_{[x,y]} f' \, d\lambda \leq f(y) - f(x),$$

si ha

$$\begin{aligned}&[f(y) - g(y)] - [f(x) - g(x)] = \\ &= [f(y) - f(x)] - [g(y) - g(x)] = \\ &= f(y) - f(x) - \int_{[x,y]} f' \, d\lambda \geq 0.\end{aligned}$$

Quindi $f - g$ è non decrescente.
Allora $f - g$ è costante in $I$. Quindi per ogni $x \in I$ risulta

$$f(x) - g(x) = f(a) - g(a) = f(a),$$

cioè

$$f(x) = g(x) + f(a) = \int_{[a,x]} f' \, d\lambda + f(a).$$

$(b)$ Nel caso generale, siano $f^+, f^- \in AC[a,b]$ non decrescenti tali che

$$f = f^+ - f^-.$$

Per il punto $(a)$ per ogni $x \in I$ si ha

$$f^+(x) = \int_{[a,x]} \left(f^+\right)' d\lambda + f^+(a),$$

$$f^-(x) = \int_{[a,x]} \left(f^-\right)' d\lambda + f^-(a).$$

Quindi per ogni $x \in I$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{[a,x]} \left(f^+ - f^-\right)' d\lambda + f^+(a) - f^-(a) = \\ &= \int_{[a,x]} f' d\lambda + f(a). \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Già dimostrato. ■

**Corollario 4.5** Sia $f \in AC[a,b]$ singolare. Allora $f$ è costante in $[a,b]$.

*Dimostrazione.* Sia $I = [a,b]$. Poiché $f \in AC[a,b]$, per il teorema precedente per ogni $x \in I$ si ha

$$f(x) = \int_{[a,x]} f' d\lambda + f(a).$$

Poiché $f$ è singolare si ha

$$f' = 0 \quad \text{q.o. in } I.$$

Allora per ogni $x \in I$ si ha

$$f(x) = f(a). \quad ■$$

**Teorema 4.6** Sia $I = [a,b]$. Sia $f \in BV[a,b]$. Allora esistono $g \in AC[a,b]$ e $h : I \longrightarrow \mathbf{R}$ singolare tali che

$$f = g + h.$$

Inoltre:

(i) la coppia $(g,h)$ è unica a meno di costanti additive;
(ii) se $f$ è non decrescente, anche $g$ e $h$ sono non decrescenti;
(iii) se $f$ è continua, anche $h$ è continua.

*Dimostrazione.* Poiché $f \in BV[a,b]$ si ha $f' \in L^1(I)$. Sia $g$ la funzione integrale relativa ad $f'$. Allora $g \in AC[a,b]$ e risulta

$$g' = f' \quad \text{q.o. in } I.$$

Poniamo

$$h = f - g.$$

Allora $h$ è derivabile q.o. in $I$ e risulta

$$h' = 0 \quad \text{q.o. in } I,$$

cioè $h$ è singolare.
Sia $f$ non decrescente. Allora

$$f' \geq 0 \quad \text{q.o. in } I.$$

Siano $x, y \in [a,b]$, con $x \leq y$, arbitrari. Si ha

$$g(y) - g(x) = \int_{[x,y]} f' d\lambda \geq 0.$$

Inoltre, poiché risulta

$$\int_{[x,y]} f' d\lambda \leq f(y) - f(x),$$

si ha

$$h(y) - h(x) = f(y) - f(x) - \int_{[x,y]} f' d\lambda \geq 0.$$

Quindi $g$ e $h$ sono non decrescenti.
Evidentemente se $f$ è continua, anche $h$ è continua.
Mostriamo che la coppia $(g,h)$ è unica a meno di costanti additive.

Siano $g_1 \in AC[a,b]$ e $h_1 : I \to \mathbf{R}$ singolare tali che

$$f = g_1 + h_1.$$

Allora si ha

$$g + h = g_1 + h_1,$$

da cui segue

$$g - g_1 = h - h_1.$$

Allora

$$g - g_1 = h - h_1 \in AC[a,b].$$

Inoltre la funzione

$$g - g_1 = h - h_1$$

è singolare. Quindi per il corollario precedente la funzione

$$g - g_1 = h - h_1$$

è costante in $[a,b]$. ■

**Definizione 4.7** Sia $f \in BV[a,b]$. Siano $g \in AC[a,b]$ e $h : I \longrightarrow \mathbf{R}$ singolare tali che

$$f = g + h.$$

La precedente uguaglianza è detta <u>*decomposizione di Lebesgue*</u> di $f$.

## 9.5 Integrazione per parti e per sostituzione

**Teorema 5.1** Siano $F \in AC[a,b]$, $g \in L^1([a,b])$. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$f = F' \quad \text{q.o. in } [a,b].$$

Sia $G : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ la funzione integrale relativa a $g$. Allora $Fg,\ fG \in L^1([a,b])$ e risulta

$$\int_{[a,b]} Fg\, d\lambda + \int_{[a,b]} fG\, d\lambda = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

*Dimostrazione.* Si ha $G \in AC[a,b]$. Allora $F$ e $G$ sono limitate in $[a,b]$. Quindi

$$FG \in AC[a,b].$$

Allora si ha

$$\int_{[a,b]} (FG)'\, d\lambda = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Inoltre, poiché

$$G' = g \quad \text{q.o. in } [a,b],$$

si ha

$$(FG)' = Fg + fG \quad \text{q.o. in } [a,b].$$

Poiché $f, g, F, G \in \mathcal{M}([a,b], \mathcal{L}([a,b]))$, si ha

$$Fg,\ fG \in \mathcal{M}([a,b], \mathcal{L}([a,b])).$$

Inoltre, poiché $F$ e $G$ sono limitate in $[a,b]$, si ha

$$\int_{[a,b]} |Fg|\, d\lambda \leq M \int_{[a,b]} |g|\, d\lambda = M \|g\|_1,$$

$$\int_{[a,b]} |fG|\, d\lambda \leq M \int_{[a,b]} |f|\, d\lambda = M \int_{[a,b]} |F'|\, d\lambda \leq M T_{ab}(F).$$

Quindi

$$Fg,\ fG \in L^1([a,b])$$

e risulta

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} Fg\, d\lambda + \int_{[a,b]} fG\, d\lambda &= \int_{[a,b]} (FG)'\, d\lambda = \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a). \quad ■ \end{aligned}$$

**Teorema 5.2** Siano $f \in AC[a,b]$ non decrescente, $g \in L^1([f(a), f(b)])$. Allora

$$\int_{[f(a),f(b)]} g\, d\lambda = \int_{[a,b]} (g \circ f) f'\, d\lambda.$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

## 9.6 Funzioni a salti

**Osservazione 6.1** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ non decrescente. Per ogni $x_0 \in [a,b]$ esistono finiti i limiti

$$f\left(x_0^+\right) := \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad f\left(x_0^-\right) := \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Inoltre esistono finiti i limiti

$$f(a^+) := \lim_{x \to a^+} f(x), \quad f(b^-) := \lim_{x \to b^-} f(x).$$

**Definizione 6.2** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ non decrescente. Sia $x_0 \in (a,b)$. Si dice <u>salto di discontinuità</u> di $f$ in $x_0$ la quantità

$$\left|f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)\right|.$$

Si dice <u>salto di discontinuità</u> di $f$ in $a$ la quantità

$$\left|f(a^+) - f(a)\right|.$$

Si dice <u>salto di discontinuità</u> di $f$ in $b$ la quantità

$$\left|f(b) - f(b^-)\right|.$$

**Notazione 6.3** Denotiamo con $S$ l'insieme dei punti di discontinuità di $f$.

**Osservazione 6.4** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ non decrescente. Sia $x \in (a,b]$. Allora la serie

$$\sum_{z \in [a,x) \cap S} \left|f(z^+) - f(z^-)\right|$$

è ben definita. Infatti l'insieme $[a,x) \cap S$ è al più numerabile e i termini della serie sono tutti non negativi.
Inoltre la serie è convergente. Infatti si ha

$$\sum_{z \in [a,x) \cap S} \left|f(z^+) - f(z^-)\right| \le f(b^-) - f(a^+).$$

**Definizione 6.5** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ non decrescente. La <u>funzione a salti</u> associata ad $f$ è la funzione $s : [a,b] \to \mathbf{R}_+$ definita nel seguente modo. Per ogni $x \in [a,b]$ poniamo

$$s(x) := \begin{cases} -\left[f(a^+) - f(a)\right] & \text{se } x = a, \\ f(x) - f(x^-) + \\ \quad + \displaystyle\sum_{z \in [a,x) \cap S} \left[f(z^+) - f(z^-)\right] & \text{se } x \in (a,b]. \end{cases}$$

**Osservazione 6.6** La funzione $s$ è costante in ogni intervallo aperto in cui la funzione $f$ è continua.

**Definizione 6.7** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ non decrescente. Sia $s$ la funzione a salti associata ad $f$. Poniamo

$$d := f - s.$$

**Teorema 6.8** Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ non decrescente. Allora:

(i) $s$ e $d$ sono non decrescenti in $[a,b]$;
(ii) $d$ è continua in $[a,b]$;
(iii) $s$ è continua da destra in ogni punto $x \in [a,b)$ in cui lo sia $f$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Siano $x, y \in [a,b]$, con $x < y$. Poiché

$$\sum_{z \in [x,y) \cap S} \left|f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right| =$$
$$= \sum_{z \in (x,y) \cap S} \left|f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right| + \left|f\left(x^+\right) - f\left(x^-\right)\right|,$$

si ha

$$\begin{aligned} s(y) - s(x) &= \left[f(y) - f\left(y^-\right)\right] + \sum_{z \in [a,y) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right] - \\ &\quad - \left[f(x) - f\left(x^-\right)\right] - \sum_{z \in [a,x) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right] \\ &= \left[f(y) - f\left(y^-\right)\right] - \left[f(x) - f\left(x^-\right)\right] + \\ &\quad + \sum_{z \in [x,y) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right] \\ &= \left[f(y) - f\left(y^-\right)\right] - \left[f(x) - f\left(x^-\right)\right] + \\ &\quad + \sum_{z \in (x,y) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right] + \left|f\left(x^+\right) - f\left(x^-\right)\right| \\ &= \left[f(y) - f\left(y^-\right)\right] - \left[f(x) - f\left(x^+\right)\right] + \\ &\quad + \sum_{z \in (x,y) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right]. \end{aligned}$$

Poiché

$$f(y) - f\left(y^-\right) \ge 0, \quad f(x) - f\left(x^+\right) \ge 0,$$

si ha

$$s(y) - s(x) \ge 0.$$

Quindi $s$ è non decrescente.
Poiché

$$\sum_{z \in (x,y) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right] \le f\left(y^-\right) - f\left(x^+\right),$$

si ha

$$\begin{aligned} s(y) - s(x) &= \left[f(y) - f\left(y^-\right)\right] - \left[f(x) - f\left(x^+\right)\right] + \\ &\quad + \sum_{z \in (x,y) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right] \\ &\le f\left(y^-\right) - f\left(x^+\right) \le f(y) - f(x). \end{aligned}$$

Allora

$$d(y) - d(x) \ge 0.$$

Quindi $d$ è non decrescente.
$(ii)$ Mostriamo che $d$ è continua in $(a,b)$.
Sia $x \in (a,b)$ arbitrario. Si ha

$$\begin{aligned} s\left(x^+\right) &= f\left(x^+\right) - f\left(x^-\right) + \sum_{z \in [a,x) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right] = \\ &= \sum_{z \in [a,x] \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right], \end{aligned}$$

$$s\left(x^-\right) = \sum_{z \in [a,x) \cap S} \left[f\left(z^+\right) - f\left(z^-\right)\right].$$

Quindi

$$s\left(x^+\right) - s\left(x^-\right) = f\left(x^+\right) - f\left(x^-\right),$$

ovvero

$$d\left(x^{+}\right)=d\left(x^{-}\right).$$

Quindi $d$ è continua in $x$.
Mostriamo che $d$ è continua in $b$. Si ha

$$s(b)=f(b)-f\left(b^{-}\right)+\sum_{z\in[a,b)\cap S}\left[f\left(z^{+}\right)-f\left(z^{-}\right)\right],$$

$$s\left(b^{-}\right)=\sum_{z\in[a,b)\cap S}\left[f\left(z^{+}\right)-f\left(z^{-}\right)\right].$$

Quindi

$$s(b)-s\left(b^{-}\right)=f(b)-f\left(b^{-}\right),$$

ovvero

$$d\left(b^{-}\right)=d(b).$$

Quindi $d$ è continua in $b$.
Mostriamo che $d$ è continua in $a$.
Per ogni $x\in(a,b]$ si ha

$$\begin{aligned} s(x) &= \left[f(x)-f\left(x^{-}\right)\right]+\sum_{z\in[a,x)\cap S}\left[f\left(z^{+}\right)-f\left(z^{-}\right)\right]\leq \\ &\leq \left[f(x)-f\left(x^{-}\right)\right]+\left[f\left(x^{-}\right)-f\left(a^{+}\right)\right]=f(x)-f\left(a^{+}\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$s\left(a^{+}\right)=0.$$

Allora

$$d\left(a^{+}\right)=f\left(a^{+}\right)-s\left(a^{+}\right)=f\left(a^{+}\right)=f(a)-s(a)=d(a).$$

Quindi $d$ è continua in $a$.
$(iii)$ Poiché

$$s=f-d,$$

e poiché $d$ è continua in $[a,b]$, si ha la tesi. ■

**Osservazione 6.9** Sia $f\in BV[a,b]$. Sia $x\in(a,b]$. Allora la serie

$$\sum_{z\in[a,x)\cap S}\left|f\left(z^{+}\right)-f\left(z^{-}\right)\right|$$

è ben definita. Infatti l'insieme $[a,x)\cap S$ è al più numerabile e i termini della serie sono tutti non negativi.
Inoltre la serie è convergente. Infatti si ha

$$\sum_{z\in[a,x)\cap S}\left|f\left(z^{+}\right)-f\left(z^{-}\right)\right|\leq T_{ab}(f).$$

**Definizione 6.10** Sia $f\in BV[a,b]$. La <u>*funzione a salti*</u> associata ad $f$ è la funzione $s:[a,b]\longrightarrow\mathbf{R}_{+}$ definita nel seguente modo. Per ogni $x\in[a,b]$ poniamo

$$s(x):=\begin{cases} -\left[f\left(a^{+}\right)-f(a)\right] & \text{se}\quad x=a, \\ f(x)-f\left(x^{-}\right)+ & \\ \quad+\displaystyle\sum_{z\in[a,x)\cap S}\left[f\left(z^{+}\right)-f\left(z^{-}\right)\right] & \text{se}\quad x\in(a,b]. \end{cases}$$

**Definizione 6.11** Sia $f\in BV[a,b]$. Sia $s$ la funzione a salti associata ad $f$. Poniamo

$$d:=f-s.$$

**Teorema 6.12** Sia $f\in BV[a,b]$. Allora:

(i) $s,d\in BV[a,b]$;
(ii) $d$ è continua in $[a,b]$;
(iii) $s$ è continua da destra in ogni punto $x\in[a,b)$ in cui lo sia $f$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Siano $f^{+},f^{-}:[a,b]\to\mathbf{R}$ non decrescenti tali che

$$f=f^{+}-f^{-}.$$

Siano $s^{+},s^{-}$ rispettivamente le funzioni a salti ad esse associate. Poniamo

$$d^{+}=f^{+}-s^{+},\quad d^{-}=f^{-}-s^{-}.$$

Allora si ha

$$s=s^{+}-s^{-},\quad d=d^{+}-d^{-}.$$

Per il teorema precedente $s^{+}$ e $s^{-}$ sono non decrescenti in $[a,b]$. Quindi $s\in BV[a,b]$. Inoltre

$$d=f-s\in BV[a,b].$$

$(ii)$ Per il teorema precedente $d^{+}$ e $d^{-}$ sono continue in $[a,b]$. Quindi $d$ è continua in $[a,b]$.
$(iii)$ Poiché

$$s=f-d,$$

e poiché $d$ è continua in $[a,b]$, si ha la tesi. ■

# Capitolo 10
# Spazi di Hilbert

## 10.1 Spazi euclidei

**Definizione 1.1** Sia $H$ uno spazio vettoriale reale. Un'applicazione $(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbf{R}$ si dice <u>*prodotto scalare*</u> su $H$ se

(i) per ogni $f, g \in H$ risulta
$$(f, g) = (g, f);$$

(ii) per ogni $f, g, h \in H$ risulta
$$(f + g, h) = (f, h) + (g, h);$$

(iii) per ogni $f, g \in H,\ \lambda \in \mathbf{R}$ risulta
$$(\lambda f, g) = \lambda (f, g);$$

(iv) per ogni $f \in H$ tale che $f \neq 0$ risulta
$$(f, f) > 0.$$

**Definizione 1.2** Sia $H$ uno spazio vettoriale complesso. Un'applicazione $(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbf{C}$ si dice <u>*prodotto scalare*</u> su $H$ se

(i) per ogni $f, g \in H$ risulta
$$(f, g) = \overline{(g, f)};$$

(ii) per ogni $f, g, h \in H$ risulta
$$(f + g, h) = (f, h) + (g, h);$$

(iii) per ogni $f, g \in H,\ \lambda \in \mathbf{C}$ risulta
$$(\lambda f, g) = \lambda (f, g);$$

(iv) per ogni $f \in H$ tale che $f \neq 0$ risulta
$$(f, f) > 0.$$

**Definizione 1.3** Uno spazio vettoriale $H$ reale o complesso dotato di un prodotto scalare si dice <u>*spazio euclideo*</u> rispettivamente <u>*reale*</u> o <u>*complesso*</u>.

**Esempio 1.4** Lo spazio $\mathbf{R}^n$ è uno spazio euclideo reale con il prodotto scalare definito nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$, se
$$x = (x_1, ..., x_n), \quad y = (y_1, ..., y_n),$$
poniamo
$$(x, y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$
Lo spazio $\mathbf{C}^n$ è uno spazio euclideo complesso con il prodotto scalare defiito nel seguente modo. Per ogni $z, w \in \mathbf{C}^n$, se
$$z = (z_1, ..., z_n), \quad w = (w_1, ..., w_n),$$
poniamo
$$(z, w) := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k.$$

**Esempio 1.5** Lo spazio $\mathbf{C}_0(\Omega)$ delle funzioni $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ continue a supporto compatto in un aperto $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ è uno spazio euclideo reale con il prodotto scalare definito nel seguente modo. Per ogni $f, g \in C_0(\Omega)$ poniamo
$$(f, g) := \int_{\Omega} f g \, d\lambda_n.$$
Lo spazio $\mathbf{C}_0(\Omega)$ delle funzioni $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ continue a supporto compatto in un aperto $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ è uno spazio euclideo complesso con il prodotto scalare definito nel seguente modo. Per ogni $f, g \in C_0(\Omega)$ poniamo
$$(f, g) := \int_{\Omega} f \overline{g} \, d\lambda_n.$$

**Definizione 1.6** Sia $H$ uno spazio euclideo. Definiamo l'applicazione $\|\cdot\| : H \longrightarrow \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $f \in H$ poniamo
$$\|f\| := (f, f)^{1/2}.$$

**Osservazione 1.7** Per la condizione $(iv)$ della definizione di prodotto scalare la precedente definizione è ben posta.

**Lemma 1.8**

(i) Sia $H$ uno spazio euclideo reale. Allora per ogni $f, g \in H$ si ha
$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2.$$
Inoltre per ogni $f, g \in H,\ \lambda \in \mathbf{R}$ si ha
$$\|f + \lambda g\|^2 = \|f\|^2 + 2\lambda (f, g) + \lambda^2 \|g\|^2.$$

(ii) Sia $H$ uno spazio euclideo complesso. Allora per ogni $f, g \in H$ si ha
$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}[(f, g)] + \|g\|^2.$$
Inoltre per ogni $f, g \in H,\ \lambda \in \mathbf{C}$ si ha
$$\|f + \lambda g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda} (f, g)\right] + |\lambda|^2 \|g\|^2.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Per ogni $f, g \in H$ si ha
$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = \\ &= (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) = \\ &= \|f\|^2 + (f, g) + (f, g) + \|g\|^2 = \\ &= \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2. \end{aligned}$$
Inoltre per ogni $f, g \in H,\ \lambda \in \mathbf{R}$ si ha
$$\begin{aligned} \|f + \lambda g\|^2 &= \|f\|^2 + 2(f, \lambda g) + \|\lambda g\|^2 = \\ &= \|f\|^2 + 2\lambda (f, g) + \lambda^2 \|g\|^2. \end{aligned}$$

$(ii)$ Per ogni $f, g \in H$ si ha
$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = \\ &= (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) = \\ &= \|f\|^2 + (f, g) + \overline{(f, g)} + \|g\|^2 = \\ &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}[(f, g)] + \|g\|^2. \end{aligned}$$
Inoltre per ogni $f, g \in H,\ \lambda \in \mathbf{C}$ si ha
$$\begin{aligned} \|f + \lambda g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}[(f, \lambda g)] + \|\lambda g\|^2 = \\ &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda} (f, g)\right] + |\lambda|^2 \|g\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 1.9** *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)* Sia $H$ uno spazio euclideo. Allora per ogni $f, g \in H$ risulta
$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

*Dimostrazione.* $(a)$ Sia $H$ uno spazio euclideo reale.

Siano $f, g \in H$. Se $g = 0$ la disuguaglianza è ovvia. Sia $g \neq 0$. Per il lemma precedente per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha

$$0 \leq \|f + \lambda g\|^2 = \|f\|^2 + 2\lambda (f, g) + \lambda^2 \|g\|^2 .$$

In particolare se poniamo

$$\lambda := -\frac{(f, g)}{\|g\|^2},$$

si ha

$$0 \leq \|f\|^2 - 2\frac{(f,g)^2}{\|g\|^2} + \frac{(f,g)^2}{\|g\|^4} \|g\|^2 = \|f\|^2 - \frac{(f,g)^2}{\|g\|^2}.$$

Quindi si ha la tesi.
$(b)$ Sia $H$ uno spazio euclideo complesso.
Siano $f, g \in H$. Se $g = 0$ la disuguaglianza è ovvia. Sia $g \neq 0$. Per la proposizione precedente, per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$ si ha

$$0 \leq \|f + \lambda g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda} (f, g)\right] + |\lambda|^2 \|g\|^2 .$$

In particolare se poniamo

$$\lambda := -\frac{|(f, g)|}{\|g\|^2},$$

si ha

$$0 \leq \|f\|^2 - 2\frac{|(f,g)|^2}{\|g\|^2} + \frac{|(f,g)|^2}{\|g\|^4} \|g\|^2 = \|f\|^2 - \frac{|(f,g)|^2}{\|g\|^2}.$$

Quindi

$$|(f, g)| \leq \|f\| \, \|g\| . \quad \blacksquare$$

**Teorema 1.10** Sia $H$ uno spazio euclideo. L'applicazione $\|\cdot\| : H \longrightarrow \mathbf{R}$ è una norma su $H$.

*Dimostrazione.* Verifichiamo la disuguaglianza triangolare. Tenendo conto del lemma precedente e della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, per ogni $f, g \in H$ si ha

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,|(f, g)| \leq \\ &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\|f\|\,\|g\| = \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2 . \end{aligned}$$

Allora per ogni $f, g \in H$ si ha

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| .$$

Le altre proprietà seguono direttamente dalla definizione di prodotto scalare. $\blacksquare$

**Definizione 1.11** Sia $H$ uno spazio euclideo. La norma $\|\cdot\| : H \times H \longrightarrow \mathbf{R}$ si dice <u>indotta</u> dal prodotto scalare.

**Definizione 1.12** Uno spazio euclideo completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare è detto <u>*spazio di Hilbert*</u>.

**Esempio 1.13** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Lo spazio $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio euclideo reale con il prodotto scalare definito nel seguente modo. Per ogni $f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ poniamo

$$(f, g) := \int_X f g \, d\mu.$$

La norma indotta da tale prodotto scalare è la norma $\|\cdot\|_2$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz segue in questo caso dalla disuguaglianza di Hölder con $p = 2$:

$$\left|\int_X f g \, d\mu\right| \leq \int_X |fg| \, d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 .$$

Lo spazio $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Hilbert, essendo completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$.

**Esempio 1.14** Sia $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu^{\#})$. Lo spazio

$$l^2 = L^2\left(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu^{\#}\right)$$

è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito nel seguente modo. Per ogni $f, g \in l^2$, se

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \chi_{\{n\}}, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} b_n \chi_{\{n\}},$$

con $\{a_n\}, \{a_n\} \subseteq \mathbf{N}$, poniamo

$$(f, g) := \sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n .$$

## 10.2 Identità del parallelogramma e di polarizzazione

**Teorema 2.1** *(Identità del parallelogramma)* Sia $H$ uno spazio euclideo. Allora per ogni $f, g \in H$ risulta

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

*Dimostrazione.* $(a)$ Sia $H$ uno spazio euclideo reale. Siano $f, g \in H$. Allora si ha

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 ,$$

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2(f, g) + \|g\|^2 .$$

Quindi si ha la tesi.
$(b)$ Sia $H$ uno spazio euclideo complesso. Siano $f, g \in H$. Allora si ha

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,[(f, g)] + \|g\|^2 ,$$

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,[(f, g)] + \|g\|^2 .$$

Quindi si ha la tesi. $\blacksquare$

**Teorema 2.2** Sia $H$ uno spazio euclideo. Allora la norma indotta dal prodotto scalare è uniformemente convessa.

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siano $f, g$ tali che

$$\|f\| \leq 1, \quad \|g\| \leq 1, \quad \|f - g\| \geq \varepsilon.$$

Allora, tenendo conto dell'identità del parallelogramma, si ha

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 = \frac{\|f\|^2 + \|g\|^2}{2} - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Se poniamo

$$\delta_\varepsilon := 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} > 0$$

si ha

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leq \delta_\varepsilon . \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.3** *(Identità di polarizzazione)*

(i) Sia $H$ uno spazio euclideo reale. Allora per ogni $f, g \in H$ risulta

$$(f, g) = \left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 .$$

(ii) Sia $H$ uno spazio euclideo complesso. Allora per ogni $f, g \in H$ risulta

$$(f, g) = \left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 + i\left(\left\|\frac{f+ig}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{f-ig}{2}\right\|^2\right).$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Si ha

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 = \frac{\|f\|^2+2(f,g)+\|g\|^2}{4} = \frac{\|f\|^2}{4} + \frac{(f,g)}{2} + \frac{\|g\|^2}{4},$$

$$\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 = \frac{\|f\|^2-2(f,g)+\|g\|^2}{4} = \frac{\|f\|^2}{4} - \frac{(f,g)}{2} + \frac{\|g\|^2}{4}.$$

Quindi si ha la tesi.

$(ii)$ Si ha

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 = \frac{\|f\|^2+2\,\mathrm{Re}[(f,g)]+\|g\|^2}{4} = \frac{\|f\|^2}{4} + \frac{\mathrm{Re}[(f,g)]}{2} + \frac{\|g\|^2}{4},$$

$$\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 = \frac{\|f\|^2-2\,\mathrm{Re}[(f,g)]+\|g\|^2}{4} = \frac{\|f\|^2}{4} - \frac{\mathrm{Re}[(f,g)]}{2} + \frac{\|g\|^2}{4}.$$

Allora

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 = \mathrm{Re}\,[(f,g)]\,.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f+ig}{2}\right\|^2 &= \frac{\|f\|^2+2\,\mathrm{Re}[(f,ig)]+\|ig\|^2}{4} = \\ &= \frac{\|f\|^2-2\,\mathrm{Re}[i(f,g)]+\|g\|^2}{4} = \\ &= \frac{\|f\|^2+2\,\mathrm{Im}[(f,g)]+\|g\|^2}{4} = \frac{\|f\|^2}{4} + \frac{\mathrm{Im}[(f,g)]}{2} + \frac{\|g\|^2}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f-ig}{2}\right\|^2 &= \frac{\|f\|^2-2\,\mathrm{Re}[(f,ig)]+\|ig\|^2}{4} = \\ &= \frac{\|f\|^2+2\,\mathrm{Re}[i(f,g)]+\|g\|^2}{4} = \\ &= \frac{\|f\|^2-2\,\mathrm{Im}[(f,g)]+\|g\|^2}{4} = \frac{\|f\|^2}{4} - \frac{\mathrm{Im}[(f,g)]}{2} + \frac{\|g\|^2}{4}.\end{aligned}$$

Allora

$$\left\|\frac{f+ig}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{f-ig}{2}\right\|^2 = \mathrm{Im}\,[(f,g)]\,.$$

Quindi si ha la tesi. ∎

**Teorema 2.4** Sia $H$ uno spazio vettoriale reale normato con norma $\|\cdot\|$. Supponiamo che per ogni $f, g \in H$ risulti

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

Sia $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita nel seguente modo. Per ogni $f, g \in H$ poniamo

$$(f,g) := \left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2.$$

Allora l'applicazione $(\cdot,\cdot)$ è un prodotto scalare.

*Dimostrazione.* Omessa. ∎

## 10.3 Decomposizione ortogonale

**Definizione 3.1** Sia $H$ uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme $S \subseteq H$ si dice <u>convesso</u> se per ogni $x, y \in S$, $\lambda \in [0,1]$ risulta

$$\lambda x + (1-\lambda)\,y \in S.$$

**Teorema 3.2** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $S \subseteq H$ un sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso. Allora esiste ed è unico un elemento $h \in S$ di norma minima, cioè tale che

$$\|h\| = \min_{s\in S} \|s\|\,.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$d := \inf_{s\in S} \|s\|\,.$$

Sia $\{s_n\} \subseteq S$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n\| = \|d\|\,.$$

Mostriamo che la successione $\{s_n\}$ è di Cauchy.
Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulti

$$\|s_n\|^2 - \|d\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Siano $n, m > \overline{n}$. Poiché $S$ è convesso si ha

$$\frac{s_n + s_m}{2} \in S.$$

Quindi

$$\left\|\frac{s_n + s_m}{2}\right\| \geq \|d\|\,.$$

Allora, tenendo conto dell'identità del parallelogramma, si ha

$$\begin{aligned}\|s_n - s_m\|^2 &= 2\left(\|s_n\|^2 + \|s_m\|^2\right) - \|s_n + s_m\|^2 \leq \\ &\leq 2\left(\|s_n\|^2 + \|s_m\|^2\right) - 4\,\|d\|^2 = \\ &= 2\left(\|s_n\|^2 - \|d\|^2\right) + 2\left(\|s_m\|^2 - \|d\|^2\right) < \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Quindi la successione $\{s_n\}$ è di Cauchy.
Allora, poiché lo spazio $H$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|$, esiste $h \in H$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - h\| = 0.$$

Inoltre, poiché $S$ è chiuso, si ha

$$h \in S.$$

Mostriamo che

$$\|h\| = d.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\big|\|s_n\| - \|h\|\big| \leq \|s_n - h\|\,.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \big|\|s_n\| - \|h\|\big| = 0,$$

da cui segue

$$\|h\| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\| = d.$$

Mostriamo che $h$ è l'unico elemento di $S$ tale che

$$\|h\| = d.$$

Quindi si ha

$$\|h\| = d = \inf_{s\in S} \|s\| = \min_{s\in S} \|s\|\,.$$

Supponiamo per assurdo che esistano $h_1, h_2 \in S$ con

$$h_1 \neq h_2$$

tali che

$$\|h_1\| = \|h_2\| = d.$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$\|h_1 - h_2\| \geq \varepsilon.$$

Allora, per l'identità del parallelogramma si ha

$$\|h_1 + h_2\|^2 = 2\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right) - \|h_1 - h_2\|^2 \leq 4d^2 - \varepsilon < 4d^2.$$

D'altra parte, poiché $S$ è convesso, si ha

$$\frac{h_1 + h_2}{2} \in S.$$

Quindi

$$\left\|\frac{h_1 + h_2}{2}\right\| \geq d,$$

cioè

$$\|h_1 + h_2\|^2 \geq 4d^2,$$

da cui l'assurdo. ∎

**Teorema 3.3** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $S \subseteq H$ un sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso. Sia $f \in H$. Allora esiste ed è unico un elemento $h \in S$ tale che

$$\|f - h\| = \min_{s \in S} \|f - s\|.$$

*Dimostrazione.* L'insieme traslato

$$S - f := \{s - f \mid s \in S\}$$

verifica le ipotesi del teorema precedente. Quindi esiste ed è unico $h \in S$ tale che

$$\|h - f\| = \min_{s \in S} \|s - f\|. \quad \blacksquare$$

**Definizione 3.4** Sia $H$ uno spazio euclideo. Due elementi $f, g \in H$ si dicono <u>ortogonali</u> se $(f, g) = 0$ e si scrive $f \perp g$.

**Teorema 3.5**

(i) Sia $H$ uno spazio euclideo reale. Siano $f, g \in H$. Allora $f \perp g$ se e solo se

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

(ii) Sia $H$ uno spazio euclideo complesso. Siano $f, g \in H$. Allora $f \perp g$ se e solo se

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2,$$

$$\|f + ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Si ha

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2,$$

da cui segue la tesi.
$(ii)$ Si ha

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,[(f, g)] + \|g\|^2$$

e

$$\begin{aligned} \|f + ig\|^2 &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,[(f, ig)] + \|ig\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,[i\,(f, g)] + \|g\|^2 = \\ &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\,[(f, g)] + \|g\|^2. \end{aligned}$$

Dalle due relazioni segue la tesi. $\blacksquare$

**Definizione 3.6** Sia $H$ uno spazio euclideo. Sia $S \subseteq H$. Il <u>complemento ortogonale</u> di $S$ è l'insieme

$$S^\perp := \{f \in H \mid (f, s) = 0 \text{ per ogni } s \in S\}.$$

**Proposizione 3.7** Sia $H$ uno spazio euclideo. Sia $S \subseteq H$. Allora $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $H$ chiuso.

*Dimostrazione.* Siano $f, g \in S^\perp$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Sia $s \in S$ arbitrario. Poiché

$$(f, s) = 0, \quad (g, s) = 0,$$

si ha

$$(f + \lambda g, s) = (f, s) + \lambda\,(g, s) = 0,$$

Per l'arbitrarietà di $s \in S$ si ha

$$f + \lambda g \in S^\perp.$$

Quindi $S^\perp$ è uno spazio vettoriale.
Siano $\{f_n\} \subseteq S^\perp$, $f \in H$ tali che

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Sia $s \in S$ arbitrario. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulti

$$\|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Allora, tenendo conto della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, si ha

$$\begin{aligned} |(f, s)| &\le |(f - f_n, s)| + |(f_n, s)| = \\ &= |(f - f_n, s)| \le \|f_n - f\|\,\|s\| < \varepsilon\,\|s\|. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$(f, s) = 0.$$

Per l'arbitrarietà si $s \in S$ si ha

$$f \in S^\perp.$$

Quindi $S^\perp$ è chiuso. $\blacksquare$

**Proposizione 3.8** Sia $H$ uno spazio euclideo. Sia $V$ un sottospazio vettoriale di $H$. Allora

$$V \cap V^\perp = \{0\}.$$

*Dimostrazione.* Sia $f \in V \cap V^\perp$. Allora

$$(f, f) = 0,$$

da cui segue $f = 0$. $\blacksquare$

**Teorema 3.9** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $V \subseteq H$ un sottospazio vettoriale chiuso. Sia $f \in H$. Allora esiste ed è unica una coppia $(f_1, f_2)$, con

$$f_1 \in V, \quad f_2 \in V^\perp,$$

tali che

$$f = f_1 + f_2.$$

*Dimostrazione.* Sia $f_1 \in V$ tale che

$$\|f - f_1\| = \min_{s \in V} \|f - s\|.$$

Poniamo

$$f_2 := f - f_1.$$

Allora si ha

$$f = f_1 + f_2.$$

Mostriamo che

$$f_2 \in V^\perp.$$

Se $s = 0$ si ha

$$(f_2, s) = 0.$$

Sia $s \in V$, con $s \neq 0$, arbitrario. Supponiamo $H$ complesso per fissare le idee. Sia $\lambda \in \mathbf{C}$ arbitrario. Poiché

$$f_1 + \lambda s \in V,$$

si ha

$$\|f - f_1 - \lambda s\|^2 \ge \|f - f_1\|^2,$$

ovvero

$$\|f_2 - \lambda s\|^2 \ge \|f_2\|^2.$$

Da questa segue

$$|\lambda|^2\,\|s\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda}\,(f_2, s)\right] \ge 0.$$

Scegliendo

$$\lambda = \frac{(f_2, s)}{\|s\|^2},$$

si ha

$$\frac{|(f_2, s)|^2}{\|s\|^4}\,\|s\|^2 - 2\frac{|(f_2, s)|^2}{\|s\|^2} \ge 0,$$

da cui segue

$$(f_2, s) = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $s \in V$ si ha

$$f_2 \in V^\perp.$$

Mostriamo che esiste un'unica coppia $(f_1, f_2)$, con

$$f_1 \in V, \quad f_2 \in V^\perp,$$

tale che

$$f = f_1 + f_2.$$

Supponiamo per assurdo che esistano $f_1, g_1 \in V$, $f_2, g_2 \in V^\perp$, con

$$(f_1, f_2) \neq (g_1, g_2),$$

tali che

$$f_1 + f_2 = g_1 + g_2 = f.$$

Allora si ha

$$f_1 - g_1 = f_2 - g_2.$$

Poiché

$$f_1 - g_1 \in V, \quad f_2 - g_2 \in V^\perp,$$

si ha

$$f_1 - g_1 = f_2 - g_2 \in V \cap V^\perp = \{0\}.$$

Quindi

$$f_1 - g_1 = f_2 - g_2 = 0,$$

cioè

$$f_1 = g_1, \quad f_2 = g_2,$$

da cui l'assurdo. ■

**Definizione 3.10** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $V \subseteq H$ un sottospazio vettoriale chiuso. Sia $f \in H$. Siano $f_1 \in V$ e $f_2 \in V^\perp$ tali che

$$f = f_1 + f_2.$$

La precedente uguaglianza è detta *decomposizione ortogonale* di $f$ rispetto a $V$.

**Definizione 3.11** Sia $X$ uno spazio vettoriale. Siano $V_1, V_2$ sottospazi vettoriali di $X$. Si dice che $X$ è *somma diretta* di $V_1$ e $V_2$ se

(i) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$;
(ii) per ogni $f \in X$ esistono $f_1 \in V_1$, $f_2 \in V_2$ tali che

$$f = f_1 + f_2.$$

Se $X$ è somma diretta di $V_1$ e $V_2$ scriviamo

$$X = V_1 \oplus V_2.$$

**Teorema 3.12** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $V \subseteq H$ un sottospazio vettoriale chiuso. Allora

$$X = V \oplus V^\perp.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Poiché $V$ è un sottospazio vettoriale di $H$ si ha

$$V \cap V^\perp = \{0\}.$$

$(ii)$ Per il teorema precedente, per ogni $f \in H$ esistono $f_1 \in V$, $f_2 \in V^\perp$ tali che

$$f = f_1 + f_2. \quad ■$$

**Osservazione 3.13** Nel teorema precedente l'ipotesi di chiusura non può essere rimossa, come mostra l'esempio che segue.

**Esempio 3.14** Sia $H = l^2$. Sia

$$V = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{\{n\}} \mid a_n = 0 \text{ definitivamente} \right\}.$$

Allora $V$ è un sottospazio vettoriale di $H$ ma non è chiuso.
Mostriamo che $V^\perp = \{0\}$. Sia

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{\{n\}} \in V^\perp.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia

$$e_n = \chi_{\{n\}} \in V.$$

Allora, poiché $g \in V^\perp$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$0 = (g, e_n) = b_n.$$

Quindi

$$g = 0.$$

Allora

$$H \neq V \oplus V^\perp.$$

**Definizione 3.15** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $V \subseteq H$ un sottospazio vettoriale chiuso. Definiamo le applicazioni

$$P : H \to V, \quad Q : H \to V^\perp$$

nel seguente modo. Per ogni $f \in H$ poniamo

$$Pf := f_1, \quad Qf := f_2.$$

Le applicazioni $P$ e $Q$ sono dette *proiettori ortogonali* di $H$ rispettivamente su $V$ e su $V^\perp$.

**Proposizione 3.16** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $V \subseteq H$ un sottospazio vettoriale chiuso. I proiettori ortogonali $P$ e $Q$ verificano le seguenti proprietà:

(i) per ogni $f \in H$ risulta

$$Pf + Qf = f;$$

$$Pf \perp Qf;$$

$$\|Pf\|^2 + \|Qf\|^2 = \|f\|^2,$$

(ii) per ogni $f \in V$ risulta

$$Pf = f, \quad Qf = 0$$

e per ogni $f \in V^\perp$ risulta

$$Pf = 0, \quad Qf = f.$$

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Proposizione 3.17** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $V \subseteq H$ un sottospazio vettoriale chiuso. I proiettori ortogonali $P$ e $Q$ sono funzionali lineari limitati.

*Dimostrazione.* Mostriamo che $P$ e $Q$ sono funzionali lineari.
Siano $f, g \in H$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Siano $f_1, g_1 \in V$, $f_2, g_2 \in V^\perp$ tali che

$$f = f_1 + f_2, \quad g = g_1 + g_2.$$

Allora

$$f + \lambda g = (f_1 + \lambda g_1) + (f_2 + \lambda g_2),$$

con

$$f_1 + \lambda g_1 \in V, \quad f_2 + \lambda g_2 \in V^{\perp}.$$

Quindi

$$P(f + \lambda g) = f_1 + \lambda g_1 = Pf + \lambda Pg,$$

$$Q(f + \lambda g) = f_2 + \lambda g_2 = Qf + \lambda Qg.$$

Mostriamo che $P$ e $Q$ sono limitati.
Per ogni $f \in H$, poiché

$$\|Pf\|^2 + \|Qf\|^2 = \|f\|^2,$$

si ha

$$\|Pf\| \leq \|f\|, \quad \|Qf\| \leq \|f\|. \ ■$$

## 10.4 Dualità

**Teorema 4.1** *(Riesz)* Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $F \in H^*$ esiste ed è unico $g \in H$ tale che per ogni $f \in H$ risulti

$$F(f) = (f, g).$$

Inoltre vale l'uguaglianza

$$\|F\| = \|g\|.$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Proposizione 4.2** Sia $H$ uno spazio di Hilbert reale. Sia $g \in H$. Sia $F : H \longrightarrow H^*$ l'applicazione definita nel seguente modo. Per ogni $f \in H$ poniamo

$$F(f) := (f, g).$$

Allora $F$ è un funzionale lineare continuo.

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Definizione 4.3** Sia $H$ uno spazio di Hilbert reale. Definiamo l'applicazione $\tau : H \longrightarrow H^*$ nel seguente modo. Per ogni $g \in H$ definiamo l'applicazione $\tau(g) : H \longrightarrow \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $f \in H$ poniamo

$$[\tau(g)](f) := (f, g).$$

**Teorema 4.4** Sia $H$ uno spazio di Hilbert reale. L'applicazione $\tau : H \longrightarrow H^*$ è un isomorfismo isometrico.

*Dimostrazione.* Omessa. ■

## 10.5 Sistemi ortonormali

**Definizione 5.1** Sia $V$ uno spazio vettoriale. Siano $f_1, ..., f_n \in V$. Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{C}$. Si dice combinazione lineare di $f_1, ..., f_n$ con coefficienti $\lambda_1, ..., \lambda_n$ il vettore

$$f := \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n.$$

**Notazione 5.2** Sia $V$ uno spazio vettoriale. Sia $S \subseteq V$. Denotiamo con $[S]$ l'insieme delle combinazioni lineari di vettori di $S$.

**Osservazione 5.3** Sia $V$ uno spazio vettoriale. Sia $S \subseteq V$. L'insieme $[S]$ è un sottospazio di $V$.

**Definizione 5.4** Sia $V$ uno spazio vettoriale. Sia $S \subseteq V$. Il sottospazio $[S]$ è detto sottospazio generato da $S$.

**Definizione 5.5** Sia $V$ uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme finito $\{f_1, ..., f_n\} \subseteq V$ si dice linearmente indipendente se per ogni $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{C}$ tali che

$$\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n = 0,$$

risulta

$$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

Un sottoinsieme infinito $S \subseteq V$ si dice linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è tale. Un insieme $S \subseteq V$ si dice linearmente dipendente se non è linearmente indipendente.

**Definizione 5.6** Sia $V$ uno spazio vettoriale. Se esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che:

(i) esiste un insieme di $n$ vettori di $V$ linearmente indipendente,
(ii) ogni insieme di $n + 1$ vettori di $V$ è linearmente dipendente,

allora $n$ è detto dimensione dello spazio $V$ e si denota con $\dim V$ e lo spazio $V$ è detto di dimensione finita.
Altrimenti lo spazio $V$ è detto di dimensione infinita.

**Definizione 5.7** Sia $H$ uno spazio euclideo. Un insieme $S \subseteq H$ si dice sistema ortonormale se

(i) per ogni $f, g \in S$ risulta
$$f \perp g;$$
(ii) per ogni $f \in S$ risulta
$$\|f\| = 1.$$

**Definizione 5.8** Sia $H$ uno spazio euclideo. Un sistema ortonormale $S \subseteq H$ si dice completo se non esiste un sistema ortonormale $S' \subseteq H$ tale che $S \subseteq S'$ propriamente.

**Teorema 5.9** Sia $H$ uno spazio euclideo.

(i) Sia $S \subseteq H$ un sistema ortonormale. Allora $S$ è linearmente indipendente.
(ii) Sia $S \subseteq H$ un sistema numerabile linearmente indipendente. Allora esiste un sistema ortonormale $\tilde{S}$ tale che
$$[\tilde{S}] = [S].$$

Dimostrazione. $(i)$ Sia $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subseteq S$ un sottoinsieme finito arbitrario. Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{C}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0.$$

Allora per ogni $l \in \{1, ..., n\}$ si ha

$$0 = \left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k, \varphi_l \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\varphi_k, \varphi_l) = \lambda_l.$$

Quindi $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ è linearmente indipendente. Per l'arbitrarietà di $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subseteq S$ l'insieme $S$ è linearmente indipendente.
$(ii)$ Sia $\{f_n\}$ una numerazione di $S$. Definiamo per ricorrenza due successioni $\{\psi_n\}, \{\varphi_n\} \subseteq H$ ponendo

$$\psi_1 := f_1, \quad \varphi_1 := \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}$$

e, per ogni $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$

$$\psi_n := f_n - \sum_{k=1}^{n-1} (f_n, \varphi_k)\varphi_k, \quad \varphi_n := \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}.$$

Poniamo

$$\tilde{S} := \{\varphi_n\}.$$

Mostriamo che $\tilde{S}$ è un sistema ortonormale.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Allora

$$\|\varphi_n\| = \frac{\|\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = 1.$$

Siano $n, m \in \mathbf{N}$ con $n \neq m$. Sia ad esempio $m < n$. Allora

$$\begin{aligned}
(\varphi_n, \varphi_m) &= \frac{1}{\|\psi_n\|}(\psi_n, \varphi_m) = \\
&= \frac{1}{\|\psi_n\|}\left(f_n - \sum_{k=1}^{n-1}(f_n, \varphi_k)\varphi_k, \varphi_m\right) = \\
&= \frac{1}{\|\psi_n\|}\left[(f_n, \varphi_m) - \sum_{k=1}^{n-1}(f_n, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_m)\right] = \\
&= \frac{1}{\|\psi_n\|}[(f_n, \varphi_m) - (f_n, \varphi_m)] = 0.
\end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$[\tilde{S}] = [S]. \quad \blacksquare$$

**Notazione 5.10** Sia $X$ uno spazio vettoriale. Sia $\{a_k\}_{k\in I} \subseteq X$. Poniamo

$$\sum_{k\in I} a_k := \sup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ finito}}} \sum_{k\in J} a_k.$$

**Osservazione 5.11** Sia $X$ uno spazio vettoriale. Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}} \subseteq X$. Allora

$$\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

**Teorema 5.12** *(Disuguaglianza di Bessel)* Sia $H$ uno spazio euclideo. Sia $\{\varphi_k\}_{k\in I} \subseteq H$ un sistema ortonormale. Allora per ogni $f \in H$ risulta

$$\sum_{k\in I} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

*Dimostrazione.* Sia $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ un sottoinsieme finito di $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ arbitrario. Allora risulta

$$\begin{aligned}
&\left\|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\right\|^2 = \\
&= \left(f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\right) = \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\overline{(f, \varphi_k)}(f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)(\varphi_k, f) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f, \varphi_k)\overline{(f, \varphi_j)}(\varphi_k, \varphi_j).
\end{aligned}$$

Poiché $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ è un sistema ortonormale si ha

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

Allora

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(f, \varphi_k)|^2.$$

Quindi si ha

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(f, \varphi_k)|^2 = \left\|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\right\|^2 \geq 0,$$

da cui segue

$$\sum_{k=1}^{n}|(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Per l'arbitrarietà del sottoinsieme $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ si ha

$$\sum_{k\in I}|(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2. \quad \blacksquare$$

**Teorema 5.13** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $S = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ un sistema ortonormale finito. Allora

(i) il sottospazio $[S]$ è chiuso;

(ii) per ogni $f \in H$ risulta

$$Pf = \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k,$$

dove $P$ denota il proiettore ortogonale su $[S]$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Siano $\{f_l\} \subseteq [S]$, $f \in H$ tali che

$$f = \lim_{l\to\infty} f_l.$$

Siano $\{\lambda_l^1\}, ..., \{\lambda_l^n\} \subseteq \mathbf{C}$ tali che per ogni $l \in \mathbf{N}$ risulti

$$f_l = \lambda_l^1\varphi_1 + ... + \lambda_l^n\varphi_n.$$

Allora si ha

$$f = \lim_{l\to\infty} f_l = \left(\lim_{l\to\infty}\lambda_l^1\right)\varphi_1 + ... + \left(\lim_{l\to\infty}\lambda_l^n\right)\varphi_1 \in [S].$$

Quindi $[S]$ è chiuso.
$(ii)$ Siano $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{C}$ arbitrari. Allora

$$\begin{aligned}
\left\|f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k\right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k\right) = \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda}_k(f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\varphi_k, f) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_k\overline{\lambda}_l(\varphi_k, \varphi_l).
\end{aligned}$$

Poiché $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ è un sistema ortonormale si ha

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = l \\ 0 & \text{se } k \neq l. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\left\|f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k\right\|^2 &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[|\lambda_k|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{\lambda}_k(f, \varphi_k)\right] = \\
&= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left[|\lambda_k - (f, \varphi_k)|^2 - |(f, \varphi_k)|^2\right] = \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(f, \varphi_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k - (f, \varphi_k)|^2.
\end{aligned}$$

In particolare, scegliendo per ogni $k \in \{1, ..., n\}$

$$\lambda_k = (f, \varphi_k),$$

si ha

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(f, \varphi_k)|^2.$$

Quindi

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| = \min_{s \in [S]} \|f - s\|,$$

ovvero

$$Pf = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k. \quad \blacksquare$$

**Lemma 5.14** Sia $H$ uno spazio euclideo di dimensione finita. Sia $S \subseteq H$ un sistema ortonormale completo. Allora

$$[S] = H.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$n := \dim H.$$

Sia

$$S = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\}.$$

Allora

$$\dim [S] = m.$$

Poiché $S$ è linearmente indipendente, si ha

$$m \leq n.$$

Mostriamo che

$$n \leq m.$$

Supponiamo per assurdo che sia

$$m < n.$$

Allora $[S] \subseteq H$ propriamente. Sia $f \in H \setminus [S]$. Poniamo

$$g := f - \sum_{k=1}^{m} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

Mostriamo che

$$g = 0.$$

Supponiamo per assurdo che sia

$$g \neq 0.$$

Poniamo

$$S_1 := \left\{ \varphi_1, ..., \varphi_m, \frac{g}{\|g\|} \right\}.$$

Per ogni $l \in \{1, ..., m\}$ risulta

$$\begin{aligned} (g, \varphi_l) &= (f, \varphi_l) - \sum_{k=1}^{m} (f, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_l) = \\ &= (f, \varphi_l) - (f, \varphi_l) = 0. \end{aligned}$$

Quindi $S_1$ è un sistema ortonormale e risulta $S \subseteq S_1$ propriamente, contro l'ipotesi che $S$ sia completo. Quindi

$$g = 0.$$

Allora

$$f = \sum_{k=1}^{m} (f, \varphi_k) \varphi_k \in [S],$$

da cui l'assurdo. Quindi

$$n = m.$$

Allora

$$\dim [S] = \dim H,$$

da cui segue la tesi. $\blacksquare$

**Teorema 5.15** Sia $H$ uno spazio euclideo. Sia $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subseteq H$ un sistema ortonormale finito. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) il sistema $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ è completo;

(ii) per ogni $f \in H$ risulta

$$f = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k;$$

(iii) per ogni $f, g \in H$ isulta

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_k)};$$

(iv) per ogni $f \in H$ risulta

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(f, \varphi_k)|^2.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Poniamo

$$f_1 := \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

Allora per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ risulta

$$(f_1, \varphi_k) = (f, \varphi_k),$$

ovvero

$$(f_1 - f, \varphi_k) = 0.$$

Supponiamo per assurdo

$$f \neq f_1.$$

Allora il sistema

$$\left\{ \varphi_1, ..., \varphi_n, \frac{f_1 - f}{\|f_1 - f\|} \right\}$$

è ortonormale contiene $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ propriamente, contro l'ipotesi che $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ sia completo. Quindi

$$f = f_1 = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si ha

$$\begin{aligned} (f, g) &= \left( \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k, \sum_{l=1}^{n} (g, \varphi_l) \varphi_l \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_l)} (\varphi_k, \varphi_l) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_k)}. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Si ha

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \overline{(f, \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{n} |(f, \varphi_k)|^2.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sia $f \in \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}^{\perp}$. Allora per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ risulta

$$(f, \varphi_k) = 0.$$

Quindi

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(f, \varphi_k)|^2 = 0,$$

da cui segue

$$f = 0.$$

Quindi $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ è completo. $\blacksquare$

**Definizione 5.16** Siano $H_1, H_2$ spazi euclidei. Un'applicazione lineare biunivoca $\tau : H_1 \rightarrow H_2$ si dice <u>*isomorfismo*</u> di $H_1$ su $H_2$ se conserva il prodotto scalare, ovvero se per ogni $f, g \in H_1$ risulta

$$(\tau(f), \tau(g))_{H_2} = (f, g)_{H_1}.$$

**Definizione 5.17** Due spazi euclidei $H_1, H_2$ si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo di $H_1$ su $H_2$.

**Proposizione 5.18** La relazione di isomorfismo tra spazi euclidei è una relazione di equivalenza.

**Teorema 5.19** Sia $H$ uno spazio euclideo di dimensione $n$. Sia $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subseteq H$ un sistema ortonormale completo. Allora gli spazi euclidei $H$ e $\mathbf{C}^n$ sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Definiamo l'applicazione

$$\tau : H \to \mathbf{C}^n$$

nel seguente modo. Per ogni $f \in H$ poniamo

$$\tau(f) := ((f, \varphi_1), ..., (f, \varphi_n)).$$

L'applicazione $\tau$ è evidentemente lineare.
Mostriamo che $\tau$ è iniettiva.
Siano $f, g \in H$ tali che

$$\tau(f) = \tau(g).$$

Allora per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ si ha

$$(f, \varphi_k) = (g, \varphi_k).$$

Quindi

$$f = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (g, \varphi_k)\varphi_k = g.$$

Mostriamo che $\tau$ è suriettiva.
Sia $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$. Poniamo

$$f := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\varphi_k \in H.$$

Allora si ha

$$\tau(f) = (\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Mostriamo che $\tau$ conserva il prodotto scalare.
Per il teorema precedente, per ogni $f, g \in H$ si ha

$$(\tau(f), \tau(g))_{\mathbf{C}^n} = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\overline{(g, \varphi_k)} = (f, g)_H.$$

Allora $\tau$ è un isomorfismo di $H$ su $\mathbf{C}^n$. ■

**Teorema 5.20** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $\{\varphi_k\} \subseteq H$ un sistema ortonormale numerabile. Sia $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbf{C}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\varphi_k$$

converge in $H$;

(ii) risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\varphi_k, \quad g_n := \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2.$$

Per ogni $n, p \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \|f_{n+p} - f_n\|^2 &= \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k\varphi_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k\varphi_k\right) = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 = g_{n+p} - g_n. \end{aligned}$$

Quindi la successione $\{f_n\} \subseteq H$ è di Cauchy se e solo se la successione $\{g_n\} \subseteq \mathbf{C}$ è di Cauchy. Poiché $H$ e $\mathbf{C}$ sono completi si ha la tesi. ■

**Teorema 5.21** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $\{\varphi_k\} \subseteq H$ un sistema ortonormale numerabile. Sia $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbf{C}$ tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty.$$

Sia

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\varphi_k.$$

Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulta

$$\lambda_k = (f, \varphi_k).$$

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\varphi_k.$$

Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Sia $k \in \mathbf{N}$ arbitrario. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ risulti

$$\|f - f_n\| < \varepsilon.$$

Sia $n \geq \min\{k, \overline{n}\}$. Allora

$$(f, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) + (f - f_n, \varphi_k) = \lambda_k + (f - f_n, \varphi_k),$$

da cui segue

$$|(f, \varphi_k) - \lambda_k| = |(f - f_n, \varphi_k)| \leq \|f - f_n\| < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lambda_k = (f, \varphi_k). \quad ■$$

**Teorema 5.22** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $\{\varphi_k\} \subseteq H$ un sistema ortonormale numerabile. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) il sistema $\{\varphi_k\}$ è completo;

(ii) per ogni $f \in H$ risulta

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k;$$

(iii) per ogni $f, g \in H$ risulta

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\overline{(g, \varphi_k)};$$

(iv) per ogni $f \in H$ vale l'*uguaglianza di Parseval*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Per la disuguaglianza di Bessel si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Quindi la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k$$

converge in $H$, cioè esiste $f_1 \in H$ tale che

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

Inoltre per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulta

$$(f_1, \varphi_k) = (f, \varphi_k),$$

ovvero

$$(f_1 - f, \varphi_k) = 0.$$

Supponiamo per assurdo

$$f \neq f_1.$$

Allora il sistema

$$\{\varphi_k\} \cup \left\{ \frac{f_1 - f}{\|f_1 - f\|} \right\}$$

è ortonormale e contiene $\{\varphi_k\}$ propriamente, contro l'ipotesi che $\{\varphi_k\}$ sia completo. Quindi

$$f = f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad g_n := \sum_{k=1}^{n} (g, \varphi_k) \varphi_k.$$

Allora si ha

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \|g - g_n\| = 0.$$

Per la continuità del prodotto scalare si ha

$$\lim_{n \to \infty} |(f, g) - (f_n, g_n)| = 0,$$

cioè

$$\begin{aligned} (f,g) &= \lim_{n\to\infty} (f_n, g_n) = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k, \sum_{l=1}^{n} (g, \varphi_l) \varphi_l \right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_l)} (\varphi_k, \varphi_l) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_k)}. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Si ha

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)(\varphi_k, f) = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sia $f \in \{\varphi_k\}^{\perp}$. Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulta

$$(f, \varphi_k) = 0.$$

Quindi

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = 0,$$

da cui segue

$$f = 0.$$

Quindi $\{\varphi_k\}$ è completo. ■

## Osservazione 5.23

(i) Sia $H$ uno spazio euclideo. Sia $\{\varphi_k\}_{k \in I} \subseteq H$ un sistema ortonormale. Allora per ogni $f \in H$ vale la *disuguaglianza di Bessel*

$$\sum_{k \in I} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

(ii) Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $\{\varphi_k\} \subseteq H$ un sistema ortonormale numerabile. Allora $\{\varphi_k\}$ è completo se e solo se per ogni $f \in H$ vale l'*uguaglianza di Parseval*

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in I} |(f, \varphi_k)|^2.$$

**Definizione 5.24** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $\{\varphi_k\} \subseteq H$ un sistema ortonormale numerabile. Sia $f \in H$. Si dicono *coefficienti di Fourier* di $f$ rispetto al sistema $\{\varphi_k\}$ i prodotti scalari

$$\gamma_k(f) := (f, \varphi_k) \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Si dice *serie di Fourier* associata ad $f$ rispetto al sistema $\{\varphi_k\}$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(f) \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

Si dice che $f$ è *sviluppabile in serie di Fourier* rispetto al sistema $\{\varphi_k\}$ se la serie di Fourier associata ad $f$ rispetto al sistema $\{\varphi_k\}$ converge in $H$ e risulta

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

**Teorema 5.25** Sia $H$ uno spazio di Hilbert. Sia $\{\varphi_k\} \subseteq H$ un sistema ortonormale numerabile. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) il sistema $\{\varphi_k\}$ è completo;

(ii) ogni $f \in H$ è sviluppabile in serie di Fourier rispetto al sistema $\{\varphi_k\}$.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal teorema precedente. ■

**Teorema 5.26** Sia $H$ uno spazio euclideo separabile. Allora ogni sistema ortonormale è numerabile.

*Dimostrazione.* Sia $S \subseteq H$ un sottoinsieme numerabile denso. Sia $\{\varphi_k\}_{k \in I} \subseteq H$ un sistema ortonormale. Per ogni $k, l \in I$, con $k \neq l$, si ha

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|^2 = 2.$$

Per ogni $k \in I$ poniamo

$$B_k := \left\{ f \in H \mid \|f - \varphi_k\| < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Allora per ogni $k, l \in I$, con $k \neq l$, si ha

$$B_k \cap B_l = \emptyset.$$

Poiché $S$ è denso, per ogni $k \in I$ esiste

$$g_k \in S \cap B_k.$$

Definiamo l'applicazione $F : I \to S$ nel seguente modo. Per ogni $k \in I$ poniamo

$$F(k) = g_k.$$

L'applicazione $F$ è iniettiva. Infatti per ogni $k, l \in I$, con $k \neq l$, si ha

$$B_k \cap B_l = \emptyset,$$

quindi

$$g_k \neq g_l.$$

Allora

$$|I| \leq |S| = |\mathbf{N}|. \ ■$$

**Teorema 5.27** Ogni spazio di Hilbert possiede un sistema ortonormale completo.

*Dimostrazione.* Sia $H$ uno spazio di Hilbert separabile. Sia $S \subseteq H$ un sottoinsieme numerabile denso. Sia $\{f_k\}$ una numerazione di $S$. Sia $S_1 \subseteq H$ il sottoinsieme ottenuto da $S$ eliminando ogni $f_l$ tale che

$$f_l \in [f_1, \ldots, f_{l-1}].$$

Allora $S_1$ è numerabile, denso e linearmente indipendente. Allora esiste un sistema ortonormale $S_2 \subseteq H$ tale che

$$[S_2] = [S_1].$$

Se esiste $f \in S_2^{\perp}$, con $f \neq 0$, poniamo

$$S_3 = S_2 \cup \left\{ \frac{f}{\|f\|} \right\}.$$

Iterando il procedimento, arriviamo ad un sistema ortonormale completo.
Non vediamo la dimostazione nel caso di spazi di Hilbert non separabili. ■

**Teorema 5.28** *(Riesz-Fischer)* Sia $H$ uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita. Allora gli spazi di Hilbert $H$ e $l^2$ sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Sia $\{\varphi_k\}$ un sistema ortonormale completo numerabile. Definiamo l'applicazione

$$\tau : H \to l^2$$

nel seguente modo. Per ogni $f \in H$ poniamo

$$\tau(f) := \{(f, \varphi_k)\}.$$

Per la disuguaglianza di Bessel, per ogni $f \in H$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Quindi l'applicazione $\tau$ è ben definita.
L'applicazione $\tau$ è evidentemente lineare.
Mostriamo che $\tau$ è iniettiva.
Siano $f, g \in H$ tali che

$$\tau(f) = \tau(g).$$

Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$(f, \varphi_k) = (g, \varphi_k),$$

cioè

$$(f - g, \varphi_k) = 0.$$

Supponiamo per assurdo che

$$f \neq g.$$

Allora il sistema

$$\{\varphi_k\} \cup \left\{ \frac{f - g}{\|f - g\|} \right\}$$

è ortonormale e contiene $\{\varphi_k\}$ propriamente, contro l'ipotesi che $\{\varphi_k\}$ sia completo.
Quindi

$$f = g.$$

Mostriamo che $\tau$ è suriettiva.
Sia $\{\lambda_k\} \in l^2$. Poiché

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty,$$

la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k$$

converge in $H$. Poniamo

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \in H.$$

Allora si ha

$$\tau(f) = \{\lambda_k\}.$$

Mostriamo che $\tau$ conserva il prodotto scalare.
Per ogni $f, g \in H$ si ha

$$(\tau(f), \tau(g))_{\mathbf{C}^n} = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \overline{(g, \varphi_k)} = (f, g)_H.$$

Allora $\tau$ è un isomorfismo di $H$ su $l^2$. ■

## 10.6 Serie trigonometriche

**Notazione 6.1** Denotiamo con $S_1$ la circonferenza unitaria nel piano complesso:

$$S_1 := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

**Osservazione 6.2** Data una funzione $F : S_1 \to \mathbf{C}$, la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definita ponendo per ogni $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = F(e^{ix})$$

è $2\pi$-periodica.
Viceversa, data una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $2\pi$-periodica, esiste una funzione $F : S_1 \to \mathbf{C}$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulti

$$f(x) = F(e^{ix}).$$

Possiamo quindi identificare funzioni definite sull'insieme $S_1$ con funzioni $2\pi$-periodiche definite su $\mathbf{R}$.

**Notazione 6.3** Poniamo

$$C(S_1) := \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}\ 2\pi\text{-periodiche} \mid f|_{[-\pi,\pi]} \in C([-\pi,\pi]) \right\}.$$

Sia $p \in [1, \infty]$. Poniamo

$$L^p(S_1) := \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}\ 2\pi\text{-periodiche} \mid f|_{[-\pi,\pi]} \in L^p([-\pi,\pi]) \right\}.$$

**Osservazione 6.4** Lo spazio $L^2(S_1)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(\cdot,\cdot) : L^2(S_1) \times L^2(S_1) \to \mathbf{C}$ definito nel seguente modo. Per ogni $f, g \in L^2(S_1)$ poniamo

$$(f, g) := \int_{[-\pi,\pi]} f\overline{g}\, d\lambda.$$

La norma indotta da tale prodotto scalare coincide con la norma $\|\cdot\|_2 : L^2(S_1) \to \mathbf{R}_+$ definita nel seguente modo. Per ogni $f \in L^2(S_1)$ poniamo

$$\|f\|_2 := \left( \int_{[-\pi,\pi]} |f|^2\, d\lambda \right)^{1/2}.$$

Inoltre $f \in L^2(S_1)$ se e solo se

$$\|f\|_2 := \left( \int_{[-\pi,\pi]} |f|^2\, d\lambda \right)^{1/2} < \infty.$$

**Definizione 6.5** Per ogni $k \in \mathbf{Z}$ definiamo l'applicazione $\psi_k : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$\psi_k(x) := \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

**Lemma 6.6** Per ogni $k \in \mathbf{Z}$ si ha

$$\psi_k \in L^2(S_1).$$

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbf{Z}$ si ha

$$\|f\|_2^2 = \int_{[-\pi,\pi]} |\psi_k|^2\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1 < \infty.$$

Quindi si ha la tesi. ■

**Proposizione 6.7** L'insieme $\{\psi_k\}_{k\in\mathbf{Z}} \subseteq L^2(S_1)$ è un sistema ortonormale.

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbf{Z}$ si ha

$$\|f\|_2 = \left(\int_{[-\pi,\pi]} |\psi_k|^2 \, d\lambda\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\right)^{1/2} = 1.$$

Per ogni $k, l \in \mathbf{Z}$, con $k \neq l$ si ha

$$\begin{aligned}
(\psi_k, \psi_l) &= \\
&= \int_{[-\pi,\pi]} \psi_k \overline{\psi_l} \, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)x} \, dx = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(l-k)x] \, dx + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin[(l-k)x] \, dx = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Definizione 6.8** Il sistema ortonormale $\{\psi_k\}_{k\in\mathbf{Z}} \subseteq L^2(S_1)$ è detto *sistema trigonometrico*.

**Definizione 6.9** Un *polinomio trigonometrico* è una combinazione lineare finita di funzioni $\psi_k$.

**Osservazione 6.10** Sia $f \in L^2(S_1)$. I coefficienti di Fourier di $f$ rispetto al sistema trigonometrico sono

$$f_k := (f, \psi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} \, dx \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

La serie di Fourier associata ad $f$ rispetto al sistema trigonometrico è

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-ikx}.$$

**Teorema 6.11** *(Weierstrass)* Sia $f \in C(S_1)$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico $P_n$ tale che

$$\|f - P_n\|_\infty < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Teorema 6.12** Il sistema trigonometrico $\{\psi_k\}_{k\in\mathbf{Z}} \subseteq L^2(S_1)$ è completo.

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^2(S_1)$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.
Poiché $C(S_1)$ è denso in $L^2(S_1)$, esiste $g \in C(S_1)$ tale che

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per il teorema precedente esiste un polinomio trigonometrico $P_n$ tale che

$$\|g - P_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\|g - P_n\|_2 &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - P_n(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \\
&\leq \|g - P_n\|_\infty \left(\int_{-\pi}^{\pi} dx\right)^{1/2} < \\
&< \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Allora

$$\|f - P_n\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P_n\|_2 < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Teorema 6.13**

(i) Ogni $f \in L^2(S_1)$ è sviluppabile in serie di Fourier rispetto al sistema trigonometrico.

(ii) Per ogni $f, g \in L^2(S_1)$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \overline{g_k}.$$

(iii) Per ogni $f \in L^2(S_1)$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2.$$

(iv) Gli spazi di Hilbert $L^2(S_1)$ e $l^2$ sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Seguono dai teoremi generali visti nel paragrafo precedente, tenendo conto del teorema precedente. ■

## 10.7 Convergenza puntuale della serie di Fourier

**Osservazione 7.1** Sia $f \in L^2(S_1)$. Per ogni $k \in \mathbf{N}_0$ poniamo

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \, dx.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \, dx.$$

Allora la serie di Fourier associata ad $f$ rispetto al sistema trigonometrico è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

**Definizione 7.2** Una funzione $f \in L^2(S_1)$ si dice *sviluppabile in serie di Fourier puntualmente* in $\mathbf{R}$ se

(i) la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

converge puntualmente in $\mathbf{R}$;

(ii) per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

**Definizione 7.3** Definiamo la funzione $D_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$D_0(x) := \frac{1}{2}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ definiamo la funzione $D_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

Le funzioni $\{D_n\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ sono dette *nuclei di Dirichlet*.

**Lemma 7.4**

(i) Per ogni $n \in \mathbf{N}_0$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$D_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

(ii) Per ogni $n \in \mathbf{N}_0$ si ha

$$\int_0^\pi D_n(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Induzione su $n$.
Se $n = 0$ la relazione è verificata.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Supponiamo che per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulti

$$D_{n-1}(x) = \frac{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} D_n(x) &= D_{n-1}(x) + \cos nx = \frac{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos nx = \\ &= \frac{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] + 2\cos nx \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sin nx\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos nx \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos nx\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sin nx\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos nx\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

$(ii)$ Induzione su $n$.
Se $n = 0$ la relazione è verificata.
Sia $n \in \mathbf{N}$. Supponiamo che

$$\int_0^\pi D_{n-1}(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_0^\pi D_n(x)\, dx &= \int_0^\pi D_{n-1}(x)\, dx + \int_0^\pi \cos nx\, dx = \\ &= \int_0^\pi D_{n-1}(x)\, dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$ ∎

**Lemma 7.5** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Allora

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitario.
Poiché $C_0(\mathbf{R})$ è denso in $L^1(\mathbf{R})$ esiste $g \in C_0(\mathbf{R})$ tale che

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Per ogni $t \in \mathbf{R}$ definiamo la funzione $h_t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel modo seguente. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$h_t(x) := g(x+t) - g(x).$$

Allora per ogni $t \in \mathbf{R}$ risulta

$$\lambda(\operatorname{supp} h_t) \leq 2\lambda(\operatorname{supp} g)$$

Poiché $g \in C_0(\mathbf{R})$, $g$ è uniformemente continua in $\mathbf{R}$. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, con

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

risulti

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)}.$$

Sia $t \in \mathbf{R}$, con

$$|t| < \delta,$$

arbitrario. Allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$|h_t(x)| = |g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |g(x+t) - g(x)|\, dx &= \int_{\mathbf{R}} |h_t(x)|\, dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)}\lambda(\operatorname{supp} h_t) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2\lambda(\operatorname{supp} g)} 2\lambda(\operatorname{supp} g) = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|\, dx &= \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - g(x+t)|\, dx + \\ &+ \int_{\mathbf{R}} |g(x+t) - g(x)|\, dx + \\ &+ \int_{\mathbf{R}} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= 2\|f - g\|_1 + \int_{\mathbf{R}} |h_t(x)|\, dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha la tesi. ∎

**Teorema 7.6** *(Riemann-Lebesgue)* Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Sia $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R})$. Supponiamo che esista $\beta \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulti

$$\varphi(x+\beta) = -\varphi(x).$$

Allora

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(kx)\, dx = 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$\mathcal{I}_k := \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(kx)\, dx.$$

Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k &= \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(kx)\, dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}} f\left(t + \frac{\beta}{k}\right)\varphi(kt+\beta)\, dt = \\ &= -\int_{\mathbf{R}} f\left(t + \frac{\beta}{k}\right)\varphi(kt)\, dt. \end{aligned}$$

Quindi per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned} 2\mathcal{I}_k &= \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(kx)\, dx - \int_{\mathbf{R}} f\left(x + \frac{\beta}{k}\right)\varphi(kx)\, dx = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\beta}{k}\right)\right]\varphi(kx)\, dx. \end{aligned}$$

Per il lemma precedente si ha

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\beta}{k}\right)\right]\varphi(kx)\, dx = 0.$$

Quindi

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{I}_k = 0,$$

cioè la tesi. ∎

**Lemma 7.7** Sia $f \in L^1(S_1)$. Per ogni $k \in \mathbf{N}_0$ sia

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $S_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$S_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Sia $S : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$S_n(x) - S(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)] D_n(t)\, dt.$$

*Dimostrazione.* Sia $n \in \mathbf{N}$. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt \right] \cos kx + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt \right] \sin kx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-\tau) D_n(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Poiché $f$ e $D_n$ sono periodiche di periodo $2\pi$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt.$$

Poiché $D_n$ è pari per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x-t) D_n(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+\tau) D_n(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_n(t)\, dt. \end{aligned}$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\, dt = \frac{\pi}{2},$$

per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$S(x) = S(x) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)\, dt.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} S_n(x) - S(x) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)] D_n(t)\, dt. \quad ■ \end{aligned}$$

**Teorema 7.8** Sia $f \in L^1(S_1)$. Sia $S : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Allora sono affermazioni equivalenti

(i) la serie di Fourier associata ad $f$ rispetto al sistema trigonometrico converge ad $S$ puntualmente in $\mathbf{R}$;

(ii) per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)] D_n(t)\, dt = 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbf{N}_0$ sia

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $S_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$S_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Allora la serie di Fourier associata ad $f$ rispetto al sistema trigonometrico converge ad $S$ puntualmente in $\mathbf{R}$ se e solo se per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} [S_n(x) - S(x)] = 0,$$

ovvero, per la proposizione precedente, se e solo se per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)] D_n(t)\, dt = 0. \quad ■$$

**Definizione 7.9** Sia $f \in L^1(S_1)$. Si dice che $f$ verifica la <u>condizione di Dini</u> se per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t}\, dt < \infty.$$

**Teorema 7.10** Sia $f \in L^1(S_1)$ verificante la condizione di Dini. Allora $f$ è sviluppabile in serie di Fourier puntualmente in $\mathbf{R}$.

*Dimostrazione.* Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] D_n(t)\, dt = \\ &\quad = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t\, dt. \end{aligned}$$

Poiché $f$ verifica la condizione di Dini, si ha

$$\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \in L^1(\mathbf{R}).$$

Inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

Allora per il teorema di Riemann-Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t\, dt = 0,$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] D_n(t)\, dt.$$

Allora la tesi segue dal corollario precedente. ■

**Teorema 7.11** Sia $f \in C^1(S_1)$. Allora $f$ è sviluppabile in serie di Fourier puntualmente in $\mathbf{R}$.

*Dimostrazione.* Mostriamo che $f$ verifica la condizione di Dini.
Sia $x \in \mathbf{R}$ arbitrario. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \leq [f(x+t) - f(x)] + [f(x-t) - f(x)].$$

Per il teorema di Lagrange per ogni $t \in \mathbf{R}$, esistono $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ tali che

$$f(x+t) - f(t) = f'(x + \theta_1 t)\, t, \quad f(x-t) - f(x) = -f'(x - \theta_2 t)\, t.$$

Allora per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \leq [f'(x + \theta_1 t) - f'(x - \theta_2 t)]\, t.$$

Quindi

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi |f'(x+\theta_1 t) - f'(x-\theta_2 t)|\,dt.$$

Poiché $f'$ è limitata in $[0,\pi]$ si ha

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt < \infty.$$

Allora la tesi segue dalla proposizione precedente. ■

**Osservazione 7.12** Nel teorema precedente è sufficiente richiedere che $f$ sia Hölderiana con esponente $\alpha \in (0,1)$, ovvero che esista $M > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ risulti

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha.$$

Infatti in tal caso per ogni $x, t \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t} &\le \\ \le \frac{|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|}{t} &\le \\ \le \frac{2Mt^\alpha}{t} = 2Mt^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Quindi per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt \le 2M\int_0^\pi t^{\alpha-1}\,dt < \infty.$$

**Teorema 7.13** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $2\pi$-periodica e $C^1$ a tratti. Allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ la serie di Fourier associata ad $f$ rispetto al sistema trigonometrico

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

converge. Inoltre per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}.$$

In particolare per ogni $x \in \mathbf{R}$ in cui $f$ è continua si ha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

*Dimostrazione.* Definiamo la funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ poniamo

$$g(x) := \frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}.$$

Mostriamo che $g$ verifica la condizione di Dini.
Siano $x \in \mathbf{R}$ arbitrario. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x+t)+f(x-t)-2g(x) =$$

$$= [f(x+t)-f(x^+)] + [f(x-t)-f(x^-)].$$

Per il teorema di Lagrange per ogni $t \in \mathbf{R}$, esistono $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ tali che

$$f(x+t)-f(x^+) = f'(x+\theta_1 t)\,t,$$

$$f(x-t)-f(x^-) = -f'(x-\theta_2 t)\,t.$$

Allora analogamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema precedente si ha

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt < \infty.$$

Allora la tesi segue dalla proposizione precedente. ■

**Teorema 7.14** Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $2\pi$-periodica, $C^1$ a tratti e continua. Allora la serie di Fourier associata ad $f$ rispetto al sistema trigonometrico

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

converge ad $f$ totalmente in $\mathbf{R}$.

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente la serie di Fourier converge ad $f$ puntualmente in $\mathbf{R}$.
Per ogni $k \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \le |a_k| + |b_k|.$$

Mostriamo che la serie $\sum_{k=1}^\infty (|a_k| + |b_k|)$ converge in $\mathbf{R}$.
Poiché $f$ è $C^1$ a tratti, si ha

$$\int_{-\pi}^\pi |f'(x)|^2\,dx < \infty,$$

quindi

$$f' \in L^2(S_1).$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}_0$ poniamo

$$\alpha_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f'(x)\cos kx\,dx.$$

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ poniamo

$$\beta_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f'(x)\sin kx\,dx.$$

Allora la serie di Fourier associata ad $f'$ è

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Quindi per la disuguaglianza di Bessel si ha

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |f'(x)|^2\,dx < \infty.$$

Inoltre per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f'(x)\cos kx\,dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos kx\big|_{-\pi}^{\pi} + k\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin kx\,dx\right] = \\ &= \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin kx\,dx = kb_k\end{aligned}$$

e analogamente

$$\beta_k = -ka_k.$$

Allora per ogni $k \in \mathbf{N}$ si ha

$$|a_k| = \frac{1}{k}|\beta_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \beta_k^2\right)$$

e analogamente

$$|b_k| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \alpha_k^2\right).$$

Allora

$$\sum_{k=1}^\infty (|a_k| + |b_k|) \le \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) < \infty.$$

Allora la serie di Fourier converge totalmente. ■

# Capitolo 11
# Analisi complessa

## 11.1 Determinazione del logaritmo e della radice

**Definizione 1.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Una funzione $f : A \to \mathbf{C}$ continua si dice <u>determinazione</u> del logaritmo se per ogni $z \in A$, risulta

$$e^{f(z)} = z.$$

**Proposizione 1.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso.

(i) Sia $f : A \to \mathbf{C}$ una determinazione del logaritmo. Sia $k \in \mathbf{Z}$. Allora la funzione

$$g := f + 2k\pi i$$

è una determinazione del logaritmo.

(ii) Siano $f, g : A \to \mathbf{C}$ due determinazioni del logaritmo. Allora esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che

$$g = f + 2k\pi i.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Poiché $f$ è una determinazione del logaritmo per ogni $z \in A$ si ha

$$e^{f(z)} = z.$$

Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$e^{g(z)} = e^{f(z)+2k\pi i} = e^{f(z)}e^{2k\pi i} = e^{f(z)} = z.$$

Quindi $g$ è una determinazione del logaritmo.
$(ii)$ Poiché $f$ e $g$ sono determinazioni del logaritmo per ogni $z \in A$ si ha

$$e^{f(z)} = e^{g(z)} = z,$$

quindi

$$e^{f(z)-g(z)} = 1.$$

Allora per ogni $z \in A$ esiste $k_z \in \mathbf{Z}$ tale che

$$f(z) - g(z) = 2k_z\pi i.$$

Mostriamo che $k_z$ non dipende da $z$.
Definiamo l'applicazione $\varphi : A \to \mathbf{Z}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A$ poniamo

$$\varphi(z) := k_z = \frac{f(z) - g(z)}{\pi i}.$$

Poniamo

$$B := \{z \in A \mid \varphi(z) = \varphi(0)\}.$$

Ovviamente si ha $0 \in B$. Quindi $B$ non è vuoto.
Mostriamo che $B$ è aperto.
Sia $z \in B$ arbitrario. Allora

$$\varphi(z) = \varphi(0).$$

Sia $\varepsilon < 1$ arbitrario. Poiché $f$ e $g$ sono continue anche $\varphi$ è continua. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $w \in \mathbf{C}$, con

$$|z - w| < \delta,$$

risulti

$$\varphi(z) - \varphi(w) < \varepsilon < 1.$$

Allora per ogni $w \in \mathbf{C}$, con

$$|z - w| < \delta,$$

si ha

$$\varphi(w) = \varphi(z) = \varphi(0),$$

ovvero

$$w \in B.$$

Quindi $z$ è interno a $B$.
Mostriamo che $B$ è chiuso.
Sia $\{z_n\} \subseteq B$. Sia $z \in \mathbf{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\varphi(z_n) = \varphi(0).$$

Allora, poiché $\varphi$ è continua, si ha

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \varphi(0),$$

ovvero

$$z \in B.$$

Quindi $B$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione.
Allora, poiché $A$ è connesso e poiché $B \subseteq A$ è non vuoto aperto e chiuso, si ha

$$B = A,$$

ovvero per ogni $z \in A$ si ha

$$\varphi(z) = \varphi(0).$$

Quindi $k_z$ non dipende da $z$. Allora esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che

$$g = f + 2k\pi i. \quad \blacksquare$$

**Definizione 1.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $b \in \mathbf{R}_+$. Una funzione $f : A \to \mathbf{C}$ continua si dice <u>determinazione</u> della radice $b$-sima se per ogni $z \in A$, risulta

$$[f(z)]^b = z.$$

**Proposizione 1.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $b \in \mathbf{R}_+$.

(i) Sia $f : A \to \mathbf{C}$ una determinazione della radice $b$-sima. Sia $k \in \mathbf{Z}$. Allora la funzione

$$g := fe^{2k\pi i/b}$$

è una determinazione della radice $b$-sima.

(ii) Siano $g, f : A \to \mathbf{C}$ due determinazioni della radice $b$-sima. Allora esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che

$$g = fe^{2k\pi i/b}.$$

Dimostrazione. $(i)$ Poiché $f$ è una determinazione della radice $b$-sima per ogni $z \in A$ si ha

$$[f(z)]^b = z.$$

Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$[g(z)]^b = \left[f(z)\, e^{2k\pi i/b}\right]^b = [f(z)]^b e^{2k\pi i} = [f(z)]^b = z.$$

Quindi $g$ è una determinazione della radice $b$-sima.
Siano $f, g : A \to \mathbf{C}$ due determinazioni della radice $b$-sima. Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$[f(z)]^b = [g(z)]^b = z.$$

Quindi per ogni $z \in A$ si ha

$$e^{b\log f(z)} = e^{b\log g(z)} = z.$$

Allora $b\log f(z)$ e $b\log g(z)$ sono due determinazioni del logaritmo. Quindi esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che per ogni $z \in A$ risulti

$$b\log g(z) = b\log f(z) + 2k\pi i,$$

ovvero

$$\log g(z) = \log f(z) + \frac{2k\pi i}{b}.$$

Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$e^{\log g(z)} = e^{\log f(z)}e^{2k\pi i/b},$$

ovvero

$$g(z) = f(z)\, e^{2k\pi i/b}. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 1.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $b \in \mathbf{R}_+$. Allora

(i) se $\frac{1}{b} \in \mathbf{Z}$ esiste un unica determinazione della radice $b$-sima;

(ii) se $\frac{1}{b} \in \mathbf{Q} \backslash \mathbf{Z}$ e $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ sono primi tra loro e tali che
$$\frac{1}{b} = \frac{p}{q},$$
esistono $q$ determinazioni distinte della radice $b$-sima;

(iii) se $\frac{1}{b} \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ esistono infinite determinazioni distinte della radice $b$-sima.

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $\frac{1}{b} \in \mathbf{Z}$. Allora
$$\left\{ e^{2k\pi i/b} \mid k \in \mathbf{Z} \right\} = \{1\},$$
quindi esiste una sola determinazione.
$(ii)$ Sia $\frac{1}{b} = \frac{p}{q}$, con $p \in \mathbf{Z}$ e $q \in \mathbf{N}$ primi tra loro. Allora
$$\left\{ e^{2k\pi i/b} \mid k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ e^{2k\pi i/b} \mid k \in \{0, 1, ..., q-1\} \right\},$$
quindi esistono $q$ determinazioni.
$(iii)$ Sia $\frac{1}{b} \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$, per ogni $k, l \in \mathbf{Z}$, con
$$k \neq l,$$
si ha
$$e^{2k\pi i/b} \neq e^{2l\pi i/b}.$$
Quindi esistono infinite determinazioni. ∎

## 11.2 Richiami sulle funzioni olomorfe

**Notazione 2.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Denotiamo ancora con $A$ l'aperto di $\mathbf{R}^2$
$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + iy \in A \right\}.$$
Viceversa sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Denotiamo ancora con $A$ l'aperto di $\mathbf{C}$
$$\{ z \in \mathbf{C} \mid (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in A \}.$$

**Definizione 2.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$. La funzione $f$ si dice <u>*olomorfa*</u> in $z_0 \in A$ se esiste finito il limite
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$
In tal caso si dice <u>*derivata*</u> di $f$ in $z_0$ la quantità
$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$
La funzione $f$ si dice <u>*olomorfa*</u> in $A$ se è olomorfa in ogni $z_0 \in A$.
Denotiamo con $H(A)$ l'insieme delle funzioni olomorfe in $A$.

**Notazione 2.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$. Definiamo le funzioni $u, v : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $z = x + iy \in A$ poniamo
$$u(x, y) := \operatorname{Re}[f(z)], \quad v(x, y) := \operatorname{Im}[f(z)].$$
Definiamo la funzione $\tilde{f} : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ nel seguente modo. Per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ poniamo
$$\tilde{f}(x, y) := (u(x, y), v(x, y)) = (\operatorname{Re}[f(z)], \operatorname{Im}[f(z)]).$$

**Teorema 2.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Allora esistono finite le derivate
$$u_x(x_0, y_0), \; u_y(x_0, y_0), \; v_x(x_0, y_0), \; v_y(x_0, y_0)$$
e valgono le *condizioni di Cauchy-Riemann*:
$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$
Inoltre risulta
$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

*Dimostrazione.* Si ha
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{[u(x, y) + iv(x, y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} = \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{[u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - (x_0, y_0)]}{(x - x_0) + i(y - y_0)}. \end{aligned}$$
In particolare
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{[u(x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y_0) - (x_0, y_0)]}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - (x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{[u(x_0, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0, y) - (x_0, y_0)]}{i(y - y_0)} = \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - (x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} = \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$
Quindi si ha la tesi. ∎

**Teorema 2.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$. Sia $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è olomorfa in $z_0$;

(ii) $\tilde{f}$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$ e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:
$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Per il teorema precedente valgono le condizioni di Cauchy Riemann. Sia $h : A \to \mathbf{C}$, con
$$\lim_{z \to z_0} \frac{|h(z)|}{|z - z_0|} = 0,$$
tale che
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + h(z)(z - z_0).$$
Definiamo $h_1, h_2 : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $z = x + iy \in A$ poniamo
$$h_1(x, y) := \operatorname{Re}[h(z)], \quad h_2 := \operatorname{Im}[h(z)].$$
Allora per ogni $z = x + iy \in A$ si ha
$$\begin{aligned} & u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \\ &\quad + [u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)][(x - x_0) + i(y - y_0)] + \\ &\quad + h_1(x, y) + ih_2(x, y) \end{aligned}$$
Quindi
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} + \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} + \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

e risulta

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{|h_1(x,y)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{|h_2(x,y)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Siano $h_1, h_2 : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{|h_1(x,y)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{|h_2(x,y)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

tali che

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} + \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} + \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi per ogni $z = x + iy \in A$ si ha

$$\begin{aligned} u(x,y) + iv(x,y) &= \\ &= u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + \\ &\quad + [u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)]\,[(x-x_0) + i(y-y_0)] + \\ &\quad + h_1(x,y) + ih_2(x,y) \end{aligned}$$

Definiamo $h : A \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z = x + iy \in A$ poniamo

$$h(z) = h_1(x,y) + ih_2(x,y).$$

Allora si ha

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|h(z)|}{|z-z_0|} = 0$$

e risulta

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) + h(z)(z - z_0). \quad ■$$

**Proposizione 2.6** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $f, g : A \to \mathbf{C}$ olomorfe in $z_0 \in A$. Sia $\lambda \in \mathbf{C}$. Allora $f + \lambda g$ è olomorfa in $z_0$ risulta

$$(f + \lambda g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda g'(z_0).$$

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Proposizione 2.7** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ olomorfa in $z_0 \in A$. Sia $B \subseteq \mathbf{C}$ un aperto tale che

$$f(A) \subseteq B.$$

Sia $g : B \to \mathbf{C}$ olomorfa in $f(z_0) \in B$. Allora $g \circ f$ è olomorfa in $z_0$ e risulta

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

*Dimostrazione.* Immediata. ■

**Teorema 2.8** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{R}^2$. Sia $P_0 \in A$. Supponiamo che $f$ sia $C^1$ in un intorno di $P_0$. Supponiamo che

$$\det Df(P_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intono $U$ di $P_0$ e un intorno $V$ di $f(P_0)$ tali che

$$f|_U : U \to V$$

è biunivoca. Inoltre

$$(f|_U)^{-1} : V \to U$$

è $C^1$ e risulta

$$D\left[(f|_U)^{-1}\right](f(P_0)) = [Df(P_0)]^{-1}.$$

*Dimostrazione.* Segue dal teorema della funzione implicita. Non la vediamo in dettaglio. ■

**Teorema 2.9** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$. Sia $z_0 \in A$. Supponiamo che $f$ sia olomorfa in un intorno di $z_0$. Supponiamo che $f'$ sia continua in tale intorno e risulti

$$f'(z_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intono $U$ di $z_0$ e un intorno $V$ di $f(z_0)$ tali che

$$f|_U : U \to V$$

è biunivoca. Inoltre

$$(f|_U)^{-1} : V \to U$$

è olomorfa in $f(z_0)$ e risulta

$$\left[(f|_U)^{-1}\right]'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{C}.$$

Sia

$$P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \det D\tilde{f}(P_0) &= \det \begin{pmatrix} u_x(P_0) & -v_x(P_0) \\ v_x(P_0) & u_x(P_0) \end{pmatrix} = \\ &= u_x^2(P_0) + v_x^2(P_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi $\tilde{f}$ verifica le ipotesi del teorema precedente. Allora si ha

$$D\tilde{f}^{-1}\left(\tilde{f}(P_0)\right) = \left[D\tilde{f}(P_0)\right]^{-1} = \frac{1}{\det D\tilde{f}(P_0)} \begin{pmatrix} u_x(P_0) & v_x(P_0) \\ -v_x(P_0) & u_x(P_0) \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z_0)) = \frac{u_x(P_0) - iv_x(P_0)}{\det D\tilde{f}(P_0)} = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{|f'(z_0)|}. \quad ■$$

**Proposizione 2.10** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f \in H(A)$ tale che per ogni $z \in A$ risulti

$$f'(z) = 0.$$

Allora $f$ è costante in $A$.

*Dimostrazione.* Poiché $A$ è connesso, $A$ è connesso per archi. Siano $z_1, z_2 \in A$ arbitrari. Sia $\gamma : [0,1] \to A$ l'arco congiungente $z_1$ con $z_2$. Definiamo $F : [0,1] \to \mathbf{C}$ nel modo seguente. Per ogni $t \in [0,1]$ poniamo

$$F(t) := f(\gamma(t)).$$

Allora $F$ è derivabile in $[0,1]$ e per ogni $t \in [0,1]$ risulta

$$F'(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t) = 0.$$

Quindi per il teorema di Lagrange $F$ è costante in $[0,1]$. In particolare si ha

$$F(0)=F(1),$$

ovvero

$$f(z_0)=f(z_1).$$

Per l'arbitrarietà di $z_0, z_1 \in A$ si ha la tesi. ■

**Corollario 2.11** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f \in H(A)$ a valori reali. Allora $f$ è costante in $A$.

*Dimostrazione.* Si ha

$$v=\operatorname{Im} f \equiv 0.$$

Quindi

$$v_x \equiv 0, \quad v_y \equiv 0.$$

Allora, per ogni $z=x+iy \in A$ si ha

$$f'(z)=v_y(x,y)-iv_x(x,y)=0.$$

Quindi per il teorema precedente si ha la tesi. ■

## 11.3 Funzioni olomorfe e 1-forme differenziali

**Definizione 3.1** Una <u>curva</u> è un'applicazione $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ continua.

**Notazione 3.2** Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ una curva. Definiamo le applicazioni $x,y:[a,b]\to\mathbf{R}$ nel seguente modo. Per ogni $t\in[a,b]$ poniamo

$$x(t):=\operatorname{Re}[\gamma(t)], \quad y(t):=\operatorname{Im}[\gamma(t)].$$

**Definizione 3.3** Una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ si dice <u>regolare</u> se

$$\gamma\in C^1([a,b]).$$

**Definizione 3.4** Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ una curva regolare. Sia $t\in[a,b]$. Si dice <u>vettore tangente</u> alla curva $\gamma$ nel punto $\gamma(t)$ il vettore

$$\gamma'(t)=(x'(t),y'(t)).$$

**Definizione 3.5** Sia $\gamma:[a,b]\to A$ una curva regolare. Sia $f:A\to\mathbf{C}$. Si dice <u>integrale</u> di $f$ lungo $\gamma$ la quantità

$$\int_\gamma f(z)\,dz:=\int_a^b f(t)\,\gamma'(t)\,dt.$$

Inoltre poniamo

$$\int_\gamma f(z)\,|dz|:=\int_a^b f(t)\,|\gamma'(t)|\,dt=\int_a^b f(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

**Definizione 3.6** Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ una curva regolare. Si dice <u>lunghezza</u> di $\gamma$ la quantità

$$\ell(\gamma):=\int_\gamma|dz|=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

**Definizione 3.7** Una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ si dice <u>semplice</u> se è iniettiva.

**Definizione 3.8** Una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ si dice <u>chiusa</u> se risulta

$$\gamma(a)=\gamma(b).$$

**Definizione 3.9** Una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbf{C}$ si dice <u>generalmente regolare</u> se esiste una partiazione

$$\{a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b\}$$

di $[a,b]$ tale che per ogni $k\in\{1,\ldots,n\}$ risulti

$$\gamma|_{[a_{k-1},a_k]}\in C^1([a_{k-1},a_k]).$$

**Definizione 3.10** Sia $A\subseteq\mathbf{C}$ un aperto. Sia $\gamma:[a,b]\to A$ una curva generalmente regolare. Sia

$$\{a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b\}$$

una partizione di $[a,b]$ tale che per ogni $k\in\{1,\ldots,n\}$ risulti

$$\gamma|_{[a_{k-1},a_k]}\in C^1([a_{k-1},a_k]).$$

Sia $f:A\to\mathbf{C}$. Si dice <u>integrale</u> di $f$ lungo $\gamma$ la quantità

$$\int_\gamma f(z)\,dz:=\sum_{k=1}^n\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Inoltre poniamo

$$\int_\gamma f(z)\,|dz|:=\sum_{k=1}^n\int_{a_{k-1}}^{a_k}f(t)\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

**Definizione 3.11** Sia $A\subseteq\mathbf{C}$ un aperto. Sia $\gamma:[a,b]\to A$ una curva generalmente regolare. Sia

$$\{a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b\}$$

una partizione di $[a,b]$ tale che per ogni $k\in\{1,\ldots,n\}$ risulti

$$\gamma|_{[a_{k-1},a_k]}\in C^1([a_{k-1},a_k]).$$

Si dice <u>lunghezza</u> di $\gamma$ la quantità

$$\ell(\gamma):=\int_\gamma|dz|=\sum_{k=1}^n\int_{a_{k-1}}^{a_k}|\gamma'(t)|\,dt.$$

**Definizione 3.12** Una <u>1-forma differenziale</u> è un'espressione

$$X\,dx+Y\,dy,$$

dove $X,Y:A\to\mathbf{R}$ sono applicazioni continue.

**Definizione 3.13** Sia $A\subseteq\mathbf{C}$ un aperto. Sia $\gamma:[a,b]\to A$ una curva regolare. Sia

$$\omega=X\,dx+Y\,dy$$

una 1-forma differenziale. Si dice <u>integrale</u> di $\omega$ lungo $\gamma$ la quantità

$$\int_\gamma\omega:=\pm\int_a^b\left[X(x(t),y(t))\,x'(t)+Y(x(t),y(t))\,y'(t)\right]dt,$$

dove si prende il segno $+$ se l'orientazione scelta per $\gamma$ coincide con l'orientazione indotta dalla rappresentazione, si prende il segno $-$ altrimenti.

**Proposizione 3.14** Sia $A\subseteq\mathbf{C}$ un aperto. Sia $\gamma:[a,b]\to A$ una curva regolare. Sia $f:A\to\mathbf{C}$. Siano

$$\alpha:=u\,dx-v\,dy, \quad \beta:=v\,dx+u\,dy.$$

Allora, scegliendo per $\gamma$ l'orientazione indotta, si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\gamma\alpha+i\int_\gamma\beta.$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \\ &= \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))]\,[x'(t)+iy'(t)]\,dt = \\ &= \int_a^b [u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt + \\ &\quad +i\int_a^b [v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt,\end{aligned}$$

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b [u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt,$$

$$\int_\gamma \beta = \int_a^b [v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt.$$

Quindi si ha la tesi. ∎

**Definizione 3.15** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f : A \to \mathbf{C}$, $f \in C(A)$. Un'applicazione $F : A \to \mathbf{C}$ si dice primitiva di $f$ in $A$ se $F \in H(A)$ e per ogni $z \in A$ risulta

$$F'(z) = f(z).$$

**Proposizione 3.16** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f : A \to \mathbf{C}$, $f \in C(A)$.

(i) Sia $F$ una primitiva di $f$. Allora per ogni $c \in \mathbf{C}$ la funzione

$$G := F + c$$

è primitiva di $f$.

(ii) Siano $F, G$ primitive di $f$. Allora esiste $c \in \mathbf{C}$ tale che

$$G = F + c.$$

Dimostrazione. $(i)$ Poiché $F$ è primitiva di $f$ si ha

$$F' = f.$$

Allora

$$G' = F' = f.$$

Quindi $G$ è primitiva di $f$.

$(ii)$ Poichè $F$ e $G$ sono primitive di $f$ si ha

$$F' = G' = f.$$

Quindi

$$(F-G)' = 0.$$

Allora, poiché $A$ è connesso, si ha la tesi. ∎

**Definizione 3.17** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto connesso. Sia

$$\omega = X\,dx + Y\,dy$$

una 1-forma differenziale. Un'applicazione $U : A \to \mathbf{R}$ si dice primitiva di $\omega$ se $U$ è differenziabile in $A$ e se risulta

$$dU = \omega,$$

ovvero

$$U_x = X, \quad U_y = Y.$$

**Definizione 3.18** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto connesso. Una 1-forma differenziale

$$\omega = X\,dx + Y\,dy$$

si dice esatta se ammette una primitiva, ovvero se esiste $U : A \to \mathbf{R}$ differenziabile tale che

$$U_x = X, \quad U_y = Y.$$

**Teorema 3.19** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f \in C(A)$. Siano

$$u := \operatorname{Re} f, \quad v := \operatorname{Im} f.$$

Siano

$$\alpha := u\,dx - v\,dy, \quad \beta := v\,dx + u\,dy.$$

Sia $F : A \to \mathbf{C}$. Siano

$$U := \operatorname{Re} F, \quad V := \operatorname{Im} F.$$

Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $F$ è primitiva di $f$;

(ii) $U$ è una primitiva di $\alpha$, $V$ è una primitiva di $\beta$.

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Si ha $F \in H(A)$. Quindi $U$ e $V$ sono differenziabili in $A$ e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} U_x = V_y, \\ U_y = -V_x. \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$F' = f,$$

ovvero

$$U_x + iV_x = V_y - iU_y = u + iv.$$

Allora

$$U_x = u, \quad U_y = -v, \quad V_x = v, \quad V_y = u.$$

Quindi $U$ è primitiva di $\alpha$ e $V$ è primitiva di $\beta$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $U$ e $V$ sono differenziabili.

Mostriamo che $F$ verifica le condizioni di Cauchy-Riemann. Si ha

$$U_x = u, \quad U_y = -v, \quad V_x = v, \quad V_y = u.$$

Quindi

$$\begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x. \end{cases}$$

Allora

$$F \in H(A)$$

e risulta

$$F' = U_x + iV_x = u + iv = f.$$

Quindi $F$ è una primitiva di $f$. ∎

**Notazione 3.20** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto connesso. Siano $P_1, P_2 \in A$. Denotiamo con $\Gamma_A(P_1, P_2)$ l'insieme delle curve regolari

$$\gamma : [a,b] \to A$$

tali che

$$\gamma(a) = P_1, \quad \gamma(b) = P_2.$$

**Teorema 3.21** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto connesso. Sia

$$\omega = X\,dx + Y\,dy$$

una 1-forma differenziale.

Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $\omega$ è esatta;

(ii) per ogni $P_1, P_2 \in A$ e per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_A(P_1, P_2)$ si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega;$$

(iii) per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to A$ risulta

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $U$ primitiva di $\omega$. Siano $P_1, P_2 \in A$ arbitrari. Siano $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_A(P_1, P_2)$ arbitrarie. Allora si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} dU = U(P_2) - U(P_1),$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_2} dU = U(P_2) - U(P_1).$$

Quindi si ha la tesi.
$(ii) \Rightarrow (i)$ (Cenno) Sia $P_0 \in A$. Definiamo l'applicazione $U : A \to \mathbf{R}$ nel modo seguente. Per ogni $P \in A$ sia $\gamma_P \in \Gamma_A(P_0, P)$ e poniamo

$$U(P) := \int_{\gamma_P} \omega.$$

Si verifica che

$$dU = \omega.$$

Quindi $U$ è primitiva di $\omega$.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Evidente. ∎

**Notazione 3.22** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Siano $z_1, z_2 \in A$. Denotiamo con $\Gamma_A(z_1, z_2)$ l'insieme delle curve regolari

$$\gamma : [a, b] \to A$$

tali che

$$\gamma(a) = z_1, \quad \gamma(b) = z_2.$$

**Teorema 3.23** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f \in C(A)$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) esiste una primitiva di $f$ in $A$;

(ii) per ogni $z_1, z_2 \in A$ e per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_A(z_1, z_2)$ risulta

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz;$$

(iii) per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to A$ risulta

$$\int_\gamma f\,dz = 0.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (iii)$ Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare chiusa arbitraria.
Sia $F$ una primitiva di $f$. Siano

$$U := \mathrm{Re}\,F, \quad V := \mathrm{Im}\,F.$$

Per il teorema 3.19, $U$ è primitiva di $\alpha$ e $V$ è primitiva di $\beta$. Quindi per il teorema precedente si ha

$$\int_\gamma \alpha = 0, \quad \int_\gamma \beta = 0.$$

Allora per la proposizione 3.14 si ha

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma \alpha + i \int_\gamma \beta = 0.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to A$ risulta

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma \alpha + i \int_\gamma \beta = 0.$$

Quindi per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to A$ risulta

$$\int_\gamma \alpha = 0, \quad \int_\gamma \beta = 0.$$

Per il teorema precedente esistono una primitiva $U$ di $\alpha$ e una primitiva $V$ di $\beta$. Poniamo

$$F := U + iV.$$

Allora per il teorema 3.19, $F$ è una primitiva di $f$.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Evidente. ∎

**Definizione 3.24** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Una 1-forma differenziale

$$\omega = X\,dx + Y\,dy$$

si dice <u>*chiusa*</u> se

$$X_y = Y_x.$$

**Proposizione 3.25** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto connesso. Sia

$$\omega = X\,dx + Y\,dy$$

una 1-forma differenziale esatta. Allora $\omega$ è chiusa.

*Dimostrazione.* Sia $U : A \to \mathbf{R}$ una primitiva di $\omega$. Allora si ha

$$U_x = X, \quad U_y = Y.$$

Quindi

$$X_y = U_{xy} = U_{yx} = Y_x.$$

Allora $\omega$ è chiusa. ∎

**Osservazione 3.26** In generale $\omega$ chiusa non implica $\omega$ esatta.

**Definizione 3.27** (provvisoria) Un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^2$ si dice <u>*semplicemente connesso*</u> se per ogni dominio $D \subseteq \mathbf{R}^2$ tale che

$$\partial D \subseteq A$$

risulta

$$D \subseteq A.$$

**Teorema 3.28** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto semplicemente connesso. Sia

$$\omega = X\,dx + Y\,dy$$

una 1-forma differenziale chiusa. Allora $\omega$ è esatta.

*Dimostrazione.* Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare semplice chiusa arbitraria. Sia $D \subseteq \mathbf{R}^2$ il dominio tale che

$$\partial D = \gamma([a, b]).$$

Allora per il teorema di Stokes si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma X\,dx + Y\,dy = \pm \int_D (X_y - Y_x)\,dx\,dy.$$

Poiché $\omega$ è chiusa si ha

$$X_y = Y_x.$$

Allora si ha

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\gamma$ si ha la tesi. ∎

**Proposizione 3.29** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f \in H(A)$. Siano

$$u := \mathrm{Re}\,f, \quad v := \mathrm{Im}\,f.$$

Siano

$$\alpha := u\,dx - v\,dy, \quad \beta = v\,dx + u\,dy.$$

Allora $\alpha$ e $\beta$ sono chiuse.

*Dimostrazione.* Poiché $f \in H(A)$ valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Quindi si ha la tesi. ■

**Teorema 3.30** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto semplicemente connesso. Sia $f \in H(A)$. Allora $f$ ammette una primitiva in $A$.

*Dimostrazione.* Per il lemma precedente $\alpha$ e $\beta$ sono chiuse. Allora per il teorema precedente $\alpha$ e $\beta$ sono esatte. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare chiusa arbitraria. Allora si ha

$$\int_\gamma \alpha = 0, \quad \int_\gamma \beta = 0.$$

Come vedremo (teorema di Morera), poiché $f \in H(A)$ si ha $f \in C^1(A)$. Allora

$$\int_\gamma f\, dz = \int_\gamma \alpha + i \int_\gamma \beta = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\gamma$ si ha la tesi. ■

## 11.4 Teorema di deformazione e teoremi di Cauchy

**Definizione 4.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to A$ due curve con gli estremi in comune, ovvero tali che

$$\begin{cases} \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{cases}$$

Un'*omotopia* da $\gamma_0$ a $\gamma_1$ è un'applicazione $H : [0, 1] \times [a, b] \to A$ continua tale che per ogni $t \in [a, b]$ risulti

$$\begin{cases} H(0, t) = \gamma_0(t), \\ H(1, t) = \gamma_1(t) \end{cases}$$

e per ogni $s \in [0, 1]$ risulti

$$\begin{cases} H(s, a) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ H(s, b) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{cases}$$

**Definizione 4.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Due curve con gli estremi in comune $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to A$ si dicono *omotope* in $A$ se esiste un'omotopia $H$ da $\gamma_0$ a $\gamma_1$.

**Osservazione 4.3** La relazione di omotopia tra curve con estremi in comune è una relazione di equivalenza.

**Definizione 4.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to A$ due curve chiuse. Un'*omotopia* da $\gamma_0$ a $\gamma_1$ è un'applicazione $H : [0, 1] \times [a, b] \to A$ continua tale che per ogni $t \in [a, b]$ risulti

$$\begin{cases} H(0, t) = \gamma_0(t), \\ H(1, t) = \gamma_1(t) \end{cases}$$

e per ogni $s \in [0, 1]$ risulti

$$H(s, 0) = H(s, 1).$$

**Definizione 4.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Due curve chiuse $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to A$ si dicono *omotope* in $A$ se esiste un'omotopia $H$ da $\gamma_0$ a $\gamma_1$.

**Osservazione 4.6** La relazione di omotopia tra curve chiuse è una relazione di equivalenza.

**Definizione 4.7** Un aperto $A \subseteq \mathbf{C}$ si dice *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa $\gamma : [a, b] \to A$ è omotopa ad un punto in $A$.

**Notazione 4.8** Siano $a, b, c, d$ tali che

$$a < b, \quad c < d.$$

Poniamo

$$R_{a,b,c,d} := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \in [a, b], \operatorname{Im} z \in [c, d]\}.$$

**Teorema 4.9** *(Primo teorema di Cauchy-Goursat)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Siano $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, con

$$a < b, \quad c < d,$$

tali che

$$R_{a,b,c,d} \subseteq A.$$

Sia

$$R := R_{a,b,c,d}.$$

Allora

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$P := 2(b - a) + 2(d - c), \quad \Delta := \sqrt{(b - a)^2 + (d - c)^2}$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $k, l \in \{1, \ldots, 2^n\}$ poniamo

$$a_k^{(n)} := a + (k - 1)\frac{b - a}{2^n}, \quad b_k^{(n)} := a + k\frac{b - a}{2^n},$$

$$c_l^{(n)} := c + (l - 1)\frac{b - a}{2^n}, \quad d_l^{(n)} := d + l\frac{b - a}{2^n},$$

$$R_{kl}^{(n)} := R_{a_k^{(n)} b_k^{(n)} c_l^{(n)} d_l^{(n)}}.$$

Definiamo la successione $\{R_n\}$ ricorsivamente nel seguente modo.
Primo passo) Si ha

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| \le \sum_{k,l=1}^{2} \left| \int_{\partial R_{kl}^{(1)}} f(z)\, dz \right| \le 4 \max_{k,l \in \{1,2\}} \left| \int_{\partial R_{kl}^{(1)}} f(z)\, dz \right|.$$

Siano $k_1, l_1 \in \{1, 2\}$ tali che

$$\left| \int_{\partial R_{k_1 l_1}^{(1)}} f(z)\, dz \right| = \max_{k,l \in \{1,2\}} \left| \int_{\partial R_{kl}^{(1)}} f(z)\, dz \right|.$$

Poniamo

$$R_1 := R_{k_1 l_1}^{(1)}.$$

Passo $n$-simo) Si ha

$$\left| \int_{\partial R_{n-1}} f(z)\, dz \right| \le \sum_{k,l=1}^{2} \left| \int_{\partial R_{kl}^{(n)}} f(z)\, dz \right| \le 4 \max_{k,l \in \{1,2\}} \left| \int_{\partial R_{kl}^{(n)}} f(z)\, dz \right|.$$

Siano $k_n, l_n \in \{1, 2\}$ tali che

$$\left| \int_{\partial R_{k_n l_n}^{(n)}} f(z)\, dz \right| = \max_{k,l \in \{1,2\}} \left| \int_{\partial R_{kl}^{(n)}} f(z)\, dz \right|.$$

Poniamo

$$R_n := R_{k_n l_n}^{(n)}.$$

Allora la successione $\{R_n\}$ è non crescente e per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| \le 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z)\, dz \right|.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$a_n := a^{(n)}_{k_n l_n}, \quad b_n := b^{(n)}_{k_n l_n}, \quad c_n := c^{(n)}_{k_n l_n}, \quad d_n := d^{(n)}_{k_n l_n},$$

$$P_n := 2\left(b^{(n)}_{k_n l_n} - a^{(n)}_{k_n l_n}\right) + 2\left(d^{(n)}_{k_n l_n} - c^{(n)}_{k_n l_n}\right) = \frac{P}{2^n},$$

$$\Delta_n := \sqrt{(b_n - a_n)^2 + (d_n - c_n)^2} = \frac{\Delta}{2^n}.$$

Sia $z_0 \in A$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \{z_0\}.$$

Poiché $f$ è olomorfa in $z_0$ esiste $\omega : A \to \mathbf{C}$, con

$$\lim_{z \to z_0} |\omega(z)| = 0,$$

tale che per ogni $z \in A$ risulta

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \omega(z)(z - z_0).$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $z \in A$, con

$$|z - z_0| < \delta,$$

risulti

$$|\omega(z)| < \varepsilon.$$

Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\Delta_n = \frac{\Delta}{2^n} < \delta.$$

Allora per ogni $z \in R_n$ si ha

$$|z - z_0| \le \Delta_n < \delta,$$

quindi

$$|\omega(z)| < \varepsilon.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R_n} f(z)\,dz &= \int_{\partial R_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \omega(z)(z - z_0)]\,dz = \\
&= f(z_0)\int_{\partial R_n} dz + f'(z_0)\int_{\partial R_n} (z - z_0)\,dz + \\
&\quad \int_{\partial R_n} \omega(z)(z - z_0)\,dz.
\end{aligned}$$

Poiché le funzioni 1 e $z - z_0$ ammettono primitiva in $\mathbf{C}$, i primi due integrali sono nulli. Quindi

$$\int_{\partial R_n} f(z)\,dz = \int_{\partial R_n} \omega(z)(z - z_0)\,dz.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\partial R_n} \omega(z)(z - z_0)\,dz\right| \le \\
&\le \int_{\partial R_n} |\omega(z)|\,|z - z_0|\,|dz| \le \\
&\le \varepsilon\frac{\Delta}{2^n}\int_{\partial R_n} |dz| = \varepsilon\frac{\Delta}{2^n}\frac{P}{2^n} = \frac{\varepsilon\Delta P}{4^n}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \le 4^n\left|\int_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\Delta P.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0. \quad \blacksquare$$

**Notazione 4.10** Siano $z_0 \in \mathbf{C}$, $r > 0$. Poniamo

$$D_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

**Teorema 4.11** *(Secondo teorema di Cauchy-Goursat)* Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $r > 0$. Sia

$$D := D_r(z_0).$$

Sia $f \in H(D)$. Allora per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to D$ si ha

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $z, w \in D$ denotiamo con $\langle z, w\rangle$ la spezzata congiungente $z$ e $w$ con tratti paralleli agli assi coordinati con il primo tratto parallelo all'asse reale e il secondo tratto parallelo all'asse immaginario.
Definiamo l'applicazione $F : D \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D$ poniamo

$$F(z) := \int_{\langle z_0, z\rangle} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Mostriamo che

$$F' = f.$$

Siano $z, w \in D$ arbitrari. Supponiamo ad esempio che risulti

$$\operatorname{Re} z_0 < \operatorname{Re} w < \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z_0 < \operatorname{Im} w < \operatorname{Im} z.$$

Poniamo

$$R := \{\zeta \in D \mid \operatorname{Re}\zeta \in [\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z],\ \operatorname{Im}\zeta \in [\operatorname{Im} z_0, \operatorname{Im} w]\}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
F(z) - F(w) &= \int_{\langle z_0, z\rangle} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\langle z_0, w\rangle} f(\zeta)\,d\zeta = \\
&= \int_{\langle w, z\rangle} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\partial R} f(\zeta)\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Per il teorema precedente si ha

$$\int_{\partial R} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Quindi

$$F(z) - F(w) = \int_{\langle w, z\rangle} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Allora, poiché

$$\int_{\langle w, z\rangle} d\zeta = z - w,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(z) &= \frac{1}{z - w}\int_{\langle w, z\rangle} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{f(z)}{z - w}\int_{\langle w, z\rangle} d\zeta = \\
&= \frac{1}{z - w}\int_{\langle w, z\rangle} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Poiché $f$ è olomorfa in $D$, $f$ è continua in $D$, quindi in particolare in $z$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $\zeta \in D$, con

$$|\zeta - z| < \delta,$$

risulti

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $w \in D$, con

$$|z - w| < \delta,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(z)\right| &\le \frac{1}{|z - w|}\int_{\langle w, z\rangle} |f(\zeta) - f(z)|\,|d\zeta| \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{|z - w|}\int_{\langle w, z\rangle} |d\zeta| = \frac{\varepsilon\,|z - w|}{|z - w|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Quindi per ogni $z \in D$ si ha

$$\lim_{w \to z} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(z),$$

ovvero

$$F' = f.$$

Poichè $f$ ammette una primitiva in $D$ per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to D$ si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.12** *(Teorema di deformazione)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to A$ curve regolari chiuse omotope in $A$. Allora

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

*Dimostrazione.* Per semplicità supponiamo

$$[a, b] = [0, 1].$$

Sia $H : [0, 1] \times [0, 1] \to A$ un'omotopia da $\gamma_0$ a $\gamma_1$. Poniamo

$$Q := [0, 1] \times [0, 1].$$

Poiché $H$ è continua nel compatto $Q$, per il teorema di Heine-Cantor $H$ è uniformemente continua in $Q$.
Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $P_1, P_2 \in Q$, con

$$|P_1 - P_2| < \delta,$$

risulti

$$|H(P_1) - H(P_2)| < \varepsilon.$$

Sia $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{\sqrt{2}}{2^n} < \delta.$$

Per ogni $k, l \in \{1, ..., 2^n\}$ poniamo

$$Q_{kl} := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \times \left[\frac{l-1}{2^n}, \frac{l}{2^n}\right].$$

Siano $k, l \in \{1, ..., 2^n\}$ arbitrari. Allora per ogni $P_1, P_2 \in Q_{kl}$ si ha

$$|P_1 - P_2| < \delta,$$

quindi

$$|H(P_1) - H(P_2)| < \varepsilon.$$

Quindi esiste $z_{kl} \in A$ tale che, posto

$$D_{kl} := \{z \in A \mid |z - z_{kl}| < \varepsilon\},$$

si ha

$$H(Q_{kl}) \subseteq D_{kl}.$$

Inoltre, poiché $H$ è continua nel compatto $Q_{kl}$, per il teorema di Weiestrass l'insieme $H(Q_{kl})$ è compatto. Poniamo

$$\gamma_{kl} := \partial H(Q_{kl}).$$

Quindi

$$\gamma_{kl} \subseteq D_{kl}.$$

Allora, poiché $f$ è olomorfa in $D_{kl}$, per il teorema precedente si ha

$$\int_{\gamma_{kl}} f(z)\, dz = 0.$$

Poiché

$$\bigcup_{k,l=1}^{2^n} \partial Q_{kl} = \partial Q,$$

si ha

$$\bigcup_{k,l=1}^{2^n} \gamma_{kl} = \{-\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\}.$$

Allora si ha

$$\int_{\{-\gamma_1\}\cup\{\gamma_2\}} f(z)\, dz = \sum_{k,l=1}^{2^n} \int_{\gamma_{kl}} f(z)\, dz = 0,$$

ovvero

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz. \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.13** *(Primo teorema di Cauchy)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare chiusa omotopa ad un punto in $A$. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $z_0 \in A$ tale che $\gamma$ è omotopa a $\{z_0\}$. Allora per il teorema precedente si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\{z_0\}} f(z)\, dz = 0. \quad \blacksquare$$

**Corollario 4.14** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto semplicemente connesso. Sia $f \in H(A)$. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare chiusa. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

**Proposizione 4.15** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f \in H(A \setminus \{z_0\}) \cap C(A)$. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare chiusa omotopa ad un punto in $A$. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

*Dimostrazione.* Siano $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, con

$$a < b, \quad c < d,$$

tali che

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \in [a, b],\ \operatorname{Im} z \in [c, d]\} \subseteq A,$$

arbitrari. Sia

$$R := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \in [a, b],\ \operatorname{Im} z \in [c, d]\}.$$

Mostriamo che

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

Se $z_0 \notin R$ si ha

$$R \subseteq A \setminus \{z_0\},$$

quindi

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

Sia $z_0 \in R$. Poiché $f$ è continua in $z_0$ si ha

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $\delta > 0$ tale che per ogni $z \in A$, con

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

risulti

$$|f(z)|\, |z - z_0| < \varepsilon,$$

ovvero

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - z_0|}.$$

Sia

$$Q := \left\{z \in A \mid |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0| < \frac{\delta}{2},\ |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0| < \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Allora per ogni $z \in \partial Q$ si ha

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

quindi

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - z_0|}.$$

Inoltre per ogni $z \in \partial Q$ si ha

$$|z - z_0| \geq \frac{\delta}{2},$$

quindi

$$|f(z)| < \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Poiché $\partial R$ e $\partial Q$ sono omotope in $A\setminus\{z_0\}$ si ha

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial Q} f(z)\, dz.$$

Allora

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial R} f(z)\, dz\right| &= \left|\int_{\partial Q} f(z)\, dz\right| \leq \int_{\partial Q} |f(z)|\,|dz| < \\ &< \frac{2\varepsilon}{\delta}\int_{\partial Q} |dz| = \frac{2\varepsilon}{\delta} 4\delta = 8\varepsilon.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

Quindi valgono le conclusioni del primo teorema di Cauchy-Goursat. Allora valgono le conclusioni del secondo teorema di Cauchy-Goursat, del teorema di deformazione e del primo teorema di Cauchy. ■

**Definizione 4.16** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $\gamma : [a,b] \to A$ una curva regolare chiusa. Sia $z_0 \in A\setminus\gamma([a,b])$. Si dice <u>indice</u> di $\gamma$ rispetto a $z_0$ il numero

$$I_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt.$$

**Esempio 4.17** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $n \in \mathbf{N}_0$. Sia $\gamma : [0, 2n\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel modo seguente. Per ogni $\theta \in [0, 2n\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + e^{\pm i\theta}.$$

Quindi $\gamma$ descrive $n$ volte la circonferenza di centro $z_0$ e raggio 1 in verso antiorario o orario a seconda che il segno sia $+$ o $-$.
In questo caso si ha

$$I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2n\pi} \frac{\gamma'(\theta)}{\gamma(\theta) - z_0}\, d\theta = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2n\pi} \frac{ie^{\pm i\theta}}{e^{\pm i\theta}}\, d\theta = \pm n.$$

Quindi $I_\gamma(z_0)$ è il numero di giri che $\gamma$ percorre attorno a $z_0$ in verso antiorario.

**Teorema 4.18** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $\gamma : [a,b] \to A$ una curva regolare chiusa. Sia $z_0 \in A\setminus\gamma([a,b])$. Allora

$$I_\gamma(z_0) \in \mathbf{Z}.$$

*Dimostrazione.* Definiamo l'applicazione $g : [a,b] \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $t \in [a,b]$ poniamo

$$g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds.$$

Allora si ha

$$I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} g(b).$$

Per il teorema di Torricelli-Barrow per ogni $t \in [a,b]$ si ha

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

Quindi per ogni $t \in [a,b]$ si ha

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0]\right\} = e^{-g(t)}\left\{\gamma'(t) - g'(t)[\gamma(t) - z_0]\right\} = 0.$$

Allora

$$e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0]$$

è costante in $[a,b]$. In particolare si ha

$$e^{-g(b)}[\gamma(b) - z_0] = e^{-g(a)}[\gamma(a) - z_0].$$

Poiché $\gamma$ è chiusa si ha

$$\gamma(b) = \gamma(a).$$

Inoltre si ha

$$g(a) = 0.$$

Quindi

$$e^{-g(b)} = 1,$$

ovvero esiste $k \in \mathbf{Z}$ tale che

$$g(b) = 2k\pi i.$$

Allora

$$I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} g(b) = k \in \mathbf{Z}. \quad ■$$

**Proposizione 4.19** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ aperto. Sia $z_0 \in A$. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to A\setminus\{z_0\}$ curve regolari chiuse omotope in $A$. Allora

$$I_{\gamma_1}(z_0) = I_{\gamma_2}(z_0).$$

*Dimostrazione.* Per il teorema di deformazione si ha

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Quindi si ha la tesi. ■

**Proposizione 4.20** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $\gamma : [a,b] \to A\setminus\{z_0\}$ una curva semplice regolare chiusa omotopa ad un punto in $A$. Allora

(i) se $\gamma$ circonda $z_0$ in verso antiorario si ha

$$I_\gamma(z_0) = 1;$$

(ii) se $\gamma$ circonda $z_0$ in verso orario si ha

$$I_\gamma(z_0) = -1;$$

(iii) se $\gamma$ non circonda $z_0$ si ha

$$I_\gamma(z_0) = 0.$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $\delta > 0$ tale che

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subseteq \overset{\circ}{D}.$$

Sia

$$C := \partial\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \delta\}.$$

Allora le curve $\gamma$ e $C$ sono omotope in $A\setminus\{z_0\}$. Quindi per il teorema di deformazione si ha

$$I_\gamma(z_0) = I_C(z_0).$$

Inoltre, per quanto visto nell'esempio precedente, si ha

$$I_C(z_0) = 1.$$

Quindi

$$I_\gamma(z_0) = 1.$$

$(ii)$ Analoga ad $(i)$.
$(iii)$ La curva $\gamma$ è omotopa ad un punto in $A\setminus\{z_0\}$. Quindi

$$I_\gamma(z_0) = 0. \quad ■$$

**Teorema 4.21** *(Secondo teorema di Cauchy)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Sia $z_0 \in A$. Sia $\gamma : [a,b] \to A\setminus\{z_0\}$ una curva regolare chiusa omotopa ad un punto in $A$. Allora

$$f(z_0)\, I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

La precedente espressione è detta *formula di Rappresentazione di Cauchy.*

*Dimostrazione.* Definiamo la funzione $g : A \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A$ poniamo

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{se } z \in A \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0) & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Allora $g \in H(A \setminus \{z_0\}) \cap C(A)$. Quindi per il teorema 4.15 si ha

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0,$$

ovvero

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Quindi

$$f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Allora

$$f(z_0)\, I_\gamma(z_0) = \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \quad \blacksquare$$

**Corollario 4.22** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto semplicemente connesso. Sia $f \in H(A)$. Sia $z_0 \in A$. Sia $\gamma : [a, b] \to A \setminus \{z_0\}$ una curva regolare chiusa. Allora

$$f(z_0)\, I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

**Corollario 4.23** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ aperto. Sia $f \in H(A)$. Sia $z_0 \in A$. Sia $\gamma : [a, b] \to A \setminus \{z_0\}$ una curva semplice regolare chiusa omotopa ad un punto in $A$ che circondi $z_0$ in verso antiorario. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

**Teorema 4.24** *(Teorema della media)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ aperto. Sia $f \in H(A)$. Siano $z_0 \in A$, $r > 0$ tali che

$$D_r(z_0) \subseteq A.$$

Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$D := D_r(z_0).$$

Definiamo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to A$ nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + re^{i\theta}.$$

Allora

$$\partial D = \gamma([0, 2\pi]).$$

Per il corollario 4.23 si ha

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(\theta))}{\gamma(\theta) - z_0} \gamma'(\theta)\, d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 4.25** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \times A \to \mathbf{C}$ tale che per ogni $z \in A$ risulti

$$f(\cdot, z) \in H(A).$$

Sia $z_0 \in A$. Sia $\gamma : [a, b] \to A \setminus \{z_0\}$ una curva regolare chiusa. Supponiamo che esistano $g \in H(A)$, con

$$\int_\gamma |g(\zeta)|\, |d\zeta| < \infty,$$

e $\delta > 0$ tali che per ogni $z \in A$, con

$$|z - z_0| < \delta,$$

risulti

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} f(\cdot, z) \right| \leq g.$$

Allora

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_\gamma f(\zeta, z)\, d\zeta \right] \Bigg|_{z = z_0} = \int_\gamma \left[ \frac{\partial}{\partial z} f(\zeta, z) \Bigg|_{z = z_0} \right] d\zeta.$$

*Dimostrazione.* Omessa. $\blacksquare$

**Teorema 4.26** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Allora

$$f \in C^\infty(A).$$

Sia $z_0 \in A$. Sia $\gamma : [a, b] \to A \setminus \{z_0\}$ una curva regolare chiusa omotopa ad un punto in $A$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f^{(n)}(z_0)\, I_\gamma(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

*Dimostrazione.* Mostriamo per induzione che per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $z_0 \in A \setminus \gamma([a, b])$ si ha

$$f^{(n)}(z_0)\, I_\gamma(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

*Passo base)* Per il primo teorema di Cauchy per ogni $z_0 \in A \setminus \gamma([a, b])$ si ha

$$f(z_0)\, I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

*Passo induttivo)* Per ipotesi induttiva per ogni $z \in A \setminus \gamma([a, b])$ si ha

$$f^{(n-1)}(z)\, I_\gamma(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta.$$

Quindi per ogni $z \in A \setminus \gamma([a, b])$ si ha

$$f^{(n)}(z)\, I_\gamma(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left[ \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta \right].$$

In altri termini, per ogni $z_0 \in A \setminus \gamma([a, b])$ si ha

$$f^{(n)}(z_0)\, I_\gamma(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left[ \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta \right] \Bigg|_{z = z_0}.$$

Sia $\delta > 0$ tale che

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subseteq A \setminus \gamma([a, b]).$$

Poniamo

$$D := \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Allora per ogni $\zeta \in \gamma$ e per ogni $z \in D$ si ha

$$|\zeta - z| > \frac{\delta}{2}.$$

Poniamo

$$M := \max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta)|.$$

Allora, per ogni $\zeta \in \gamma$ e per ogni $z \in D$ si ha

$$\left|\frac{d}{dz}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\right| = \left|\frac{n f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\right| = \frac{n|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \leq \frac{2nM}{\delta}.$$

Poiché

$$\int_\gamma \frac{2nM}{\delta}|d\zeta| = \frac{2nM}{\delta}\ell(\gamma) < \infty,$$

per il teorema precedente si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[\left.\left[\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta\right]\right|_{z=z_0}\right] &= \int_\gamma \left[\left.\frac{d}{dz}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\right|_{z=z_0}\right] d\zeta = \\ &= n\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.\end{aligned}$$

Quindi per ogni $z_0 \in A\backslash\gamma$ si ha

$$\begin{aligned}I_\gamma(z_0) f^{(n)}(z_0) &= \frac{n(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Corollario 4.27** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Sia $z_0 \in A$. Sia $\gamma : [a, b] \to A\backslash\{z_0\}$ una curva semplice regolare chiusa omotopa ad un punto in $A$ che circondi $z_0$ in verso antiorario. Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

**Teorema 4.28** *(di Morera)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in C(A)$ tale che per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to A$ risulti

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Allora

$$f \in H(A).$$

*Dimostrazione.* Per il teorema 3.23, $f$ ammette una primitiva $F$. Allora $F \in H(A)$ e risulta

$$F' = f.$$

Poiché $F \in H(A)$, per il teorema precedente $F$ ammette derivate di ogni ordine. In particolare esiste

$$F'' = f'.$$

Quindi $f \in H(A)$. $\blacksquare$

**Teorema 4.29** *(Stime di Cauchy)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Siano $z_0 \in A$, $r > 0$ tali che

$$\overline{D_r(z_0)} \subseteq A.$$

Sia

$$D := D_r(z_0).$$

Sia

$$M := \max_{z\in\overline{D}}|f(z)|.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{Mn!}{r^n}.$$

*Dimostrazione.* Definiamo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to A$ nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + re^{i\theta}.$$

Allora si ha

$$\partial D = \gamma([a, b]).$$

Inoltre per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$\begin{aligned}|f^n(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}}|dz| \leq \frac{Mn!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dz|}{|z - z_0|^{n+1}} = \\ &= \frac{Mn!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|rie^{i\theta}\right|}{\left|re^{i\theta}\right|^{n+1}} d\theta = \frac{Mn!}{2\pi r^n}2\pi = \frac{Mn!}{r^n}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Definizione 4.30** Una funzione $f \in H(\mathbf{C})$ si dice <u>*intera*</u>.

**Teorema 4.31** *(di Liouville)* Sia $f \in H(\mathbf{C})$ limitata. Allora $f$ è costante in $\mathbf{C}$.

*Dimostrazione.* Sia $M > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbf{C}$ risulti

$$|f(z)| \leq M.$$

Allora per il teorema precedente per ogni $z \in \mathbf{C}$ e per ogni $r > 0$ si ha

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Quindi per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$f'(z) = 0.$$

Allora $f$ è costante in $\mathbf{C}$. $\blacksquare$

**Teorema 4.32** *(Teorema fondamentale dell'algebra)* Sia $P_n : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ un polinomio di grado $n \geq 1$ nell'indeterminata $z \in \mathbf{C}$. Allora esiste $z_0 \in \mathbf{C}$ tale che

$$P_n(z_0) = 0.$$

Allora, detto $a_0$ il coefficiente del termine di grado $n$, esiste $p \leq n$, esistono $z_1, ..., z_p \in \mathbf{C}$ ed esistono $n_1, ..., n_p \in \mathbf{N}$, con

$$n_1 + ... + n_p = n$$

tali che per ogni $z \in \mathbf{C}$ risulta

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (z - z_p)^{n_p}.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che per ogni $z \in \mathbf{C}$ risulti

$$P_n(z) \neq 0.$$

Definiamo la funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in \mathbf{C}$ poniamo

$$f(z) := \frac{1}{P_n(z)}.$$

Allora $f \in H(\mathbf{C})$. Mostriamo che $f$ è limitata. Poiché

$$\lim_{|z|\to\infty} P_n(z) = \infty,$$

si ha

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $R > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbf{C}$, con

$$|z| \geq R,$$

risulti

$$|f(z)| \leq \varepsilon.$$

Poniamo

$$D := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq R\}, \quad M := \max_{z\in D}|f(z)|.$$

Allora per ogni $z \in \mathbf{C}$ si ha

$$|f(z)| \leq \max\{\varepsilon, M\}.$$

Quindi $f$ è limitata.
Allora per il teorema precedente $f$ è costante in $\mathbf{C}$. Quindi $P_n$ è costante in $\mathbf{C}$, contro l'ipotesi che $P_n$ abbia grado $n \geq 1$. ■

**Teorema 4.33** *(Principio di massimo locale)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Sia $z_0 \in A$ un punto di massimo relativo per $|f|$. Sia $r > 0$ tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulti

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|.$$

Allora per ogni $z \in D_r(z_0)$ si ha

$$|f(z)| = |f(z_0)|.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista $z_1 \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ tale che

$$|f(z_1)| < |f(z_0)|.$$

Siano $\rho > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ tali che

$$z_1 = z_0 + \rho e^{i\alpha}.$$

Sia $\varepsilon \in (0, |f(z_0)| - |f(z_1)|)$ arbitrario. Poiché $f$ è continua in $A$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\theta \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ si ha

$$\left|f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right| \leq |f(z_1)| + [|f(z_0)| - |f(z_1)| - \varepsilon] = |f(z_0)| - \varepsilon.$$

Per il teorema della media si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Allora

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right| d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha-\delta} \left|f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right| d\theta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} \left|f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right| d\theta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha+\delta}^{2\pi} \left|f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} |f(z_0)| (\alpha - \delta) + \frac{1}{2\pi} (|f(z_0)| - \varepsilon) 2\delta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} |f(z_0)| (2\pi - \alpha - \delta) \\
&= |f(z_0)| - \frac{\varepsilon\delta}{\pi} < |f(z_0)|,
\end{aligned}$$

da cui l'assurdo. ■

**Teorema 4.34** *(Principio di massimo globale)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso limitato. Sia

$$f \in C(\overline{A}) \cap H(A).$$

Sia

$$M := \max_{z \in \overline{A}} |f(z)|.$$

Allora

$$\max_{z \in \partial A} |f(z)| = M.$$

Inoltre se esiste $z_0 \in A$ tale che

$$|f(z_0)| = M,$$

per ogni $z \in \overline{A}$ si ha

$$|f(z)| = M.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista $z_0 \in A$ tale che

$$|f(z_0)| = M.$$

Poniamo

$$B := \{z \in A \mid |f(z)| = M\}.$$

Allora $z_0 \in B$. Quindi $B$ è non vuoto.
Inoltre $B$ è controimmagine di un chiuso tramite una funzione continua. Quindi $B$ è chiuso in $A$.
Mostriamo che $B$ è aperto in $A$.
Sia $z_1 \in B$ arbitrario. Allora

$$|f(z_1)| = M.$$

In particolare $z_1$ è punto di massimo relativo per $|f|$. Sia $r > 0$ tale che per ogni $z \in D_r(z_1)$ risulti

$$|f(z)| \leq |f(z_1)|.$$

Per il principio di massimo relativo, per ogni $z \in D_r(z_1)$ si ha

$$|f(z)| = |f(z_1)| = M,$$

ovvero

$$z \in B.$$

Quindi $z_1$ è un punto interno di $B$.
Poiché $A$ è connesso e poiché $B \subseteq A$ è non vuoto aperto e chiuso, si ha

$$B = A.$$

Quindi per ogni $z \in A$ si ha

$$|f(z)| = M.$$

Poiché $f \in C\left(\overline{A}\right)$ is ha la tesi. ■

## 11.5 Funzioni armoniche

**Definizione 5.1** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Sia $u : A \to \mathbf{R}^2$. Sia $u \in C^2(A)$. Si dice *laplaciano* di $u$ la funzione

$$\Delta u : A \to \mathbf{R}$$

definita da

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy}.$$

**Definizione 5.2** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Una funzione $u : A \to \mathbf{R}^2$ si dice *armonica* se $u \in C^2(A)$ e risulta

$$\Delta u = 0.$$

**Proposizione 5.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Siano $u, v : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definite da

$$u := \operatorname{Re} f, \quad v := \operatorname{Im} f$$

Allora $u$ e $v$ sono armoniche in $A$.

*Dimostrazione.* Poiché $f \in H(A)$ esistono le derivate di $F$ di qualunque ordine. Quindi esistono le derivate di $u, v$ un qualunque ordine. In particolare

$$u, v \in C^2(A).$$

Inoltre valgono le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Allora, tenendo conto del teorema di Schwartz si ha

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0,$$

ovvero

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0. \blacksquare$$

**Definizione 5.4** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Due funzioni armoniche $u, v : A \to \mathbf{R}$ si dicono <u>coniugate</u> se esiste $f \in H(A)$ tale che

$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f.$$

**Teorema 5.5** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto semplicemente connesso. Sia $u : A \to \mathbf{R}$ armonica. Allora esiste $f \in H(A)$ tale che

$$u = \operatorname{Re} f.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$u_1 := u_x, \quad v_1 := -u_y, \quad g := u_1 + iv_1 = u_x - iu_y.$$

Mostriamo che

$$g \in H(A).$$

Poiché $u \in C^2(A)$ si ha

$$g \in C^1(A),$$

quindi in particolare $g$ è differenziabile.
Mostriamo che $g$ verifica le condizioni di Cauchy-Riemann.
Poiché $u$ è armonica si ha

$$(u_1)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (v_1)_y.$$

Per il teorema di Schwartz si ha

$$(u_1)_y = u_{xy} = u_{yx} = -(v_1)_x.$$

Quindi

$$g \in H(A).$$

Per il primo teorema di Cauchy per ogni curva regolare chiusa $\gamma : [a, b] \to A$, si ha

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0.$$

Allora esiste una primitiva $G$ di $g$. Allora $G \in H(A)$ e risulta

$$G' = g.$$

Poniamo

$$u_2 := \operatorname{Re} G, \quad v_2 := \operatorname{Im} G.$$

Allora, poiché

$$G' = (u_2)_x + i(v_2)_x = (u_2)_x - i(u_2)_y$$

e

$$g = u_x - iu_y,$$

si ha

$$\begin{cases} (u_2)_x = u_x, \\ (u_2)_y = u_y. \end{cases}$$

Quindi

$$\nabla(u - u_2) = 0.$$

Allora, poiché $A$ è semplicemente connesso, esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che

$$u - u_2 = c.$$

Poniamo

$$f := G + c.$$

Allora

$$\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} G + c = u_2 + c = u. \quad \blacksquare$$

**Corollario 5.6** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto semplicemente connesso. Sia $u : A \to \mathbf{R}$ armonica. Allora esiste $v : A \to \mathbf{R}$ armonica coniugata di $u$.

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente esiste $f \in H(A)$ tale che

$$u = \operatorname{Re} f.$$

Poniamo

$$v := \operatorname{Im} f.$$

Allora $u$ e $v$ sono armoniche coniugate. ■

**Teorema 5.7** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Sia $u : A \to \mathbf{R}$ armonica. Siano $z_0 \in A$, $r > 0$ tali che

$$D_r(z_0) \subseteq A.$$

Sia

$$D := D_r(z_0).$$

Allora esiste $f \in H(D)$ tale che

$$u|_D = \operatorname{Re} f.$$

*Dimostrazione.* L'insieme $D$ è un aperto semplicemente connesso. Allora la tesi segue dal teorema precedente. ■

**Teorema 5.8** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Sia $u : A \to \mathbf{R}$ armonica. Allora

$$u \in C^\infty(A).$$

*Dimostrazione.* Siano $z_0 \in A$, $r > 0$ tali che

$$D_r(z_0) \subseteq A$$

arbitrari. Sia

$$D := D_r(z_0).$$

Allora per il teorema precedente esiste $f \in H(D)$ tale che

$$u|_D = \operatorname{Re} f.$$

In particolare si ha

$$u|_D \in C^\infty(D).$$

Per l'arbitrarietà di $z_0$ e $r$ si ha la tesi. ■

**Teorema 5.9** *(Principio di massimo locale per funzioni armoniche)* Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Sia $u : A \to \mathbf{R}$ armonica. Sia $P_0 \in A$ un punto di massimo relativo per $u$. Sia $r > 0$ tale che per ogni $z \in D_r(P_0)$ risulti

$$u(P) \le u(P_0).$$

Allora per ogni $P \in D_r(P_0)$ si ha

$$u(P) = u(P_0).$$

*Dimostrazione.* Sia $f \in H(A)$ tale che

$$\operatorname{Re} f = u.$$

Definiamo $g : A \subseteq \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A$ poniamo

$$g(z) := e^{f(z)}.$$

Allora $g \in H(A)$. Inoltre per ogni $z \equiv P \in A$ risulta

$$|g(z)| = \left|e^{f(z)}\right| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{u(P)}.$$

Sia $z_0 \equiv P_0$. Allora per ogni $z \in D_r(z_0)$ si ha

$$|g(z)| \le |g(z_0)|.$$

Per il principio di massimo locale per funzioni olomorfe per ogni $z \in D_r(z_0)$ si ha

$$|g(z)| = |g(z_0)|.$$

Quindi per ogni $P \in D_r(P_0)$ si ha

$$u(P) = u(P_0). \quad \blacksquare$$

**Teorema 5.10** *(Principio di massimo globale per funzioni armoniche)* Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto connesso limitato. Sia $u \in C(\overline{A})$ armonica in $A$. Sia

$$M := \max_{P \in \overline{A}} u(P).$$

Allora

$$\max_{P \in \partial A} u(P) = M.$$

Inoltre se esiste $P_0 \in A$ tale che

$$u(P_0) = M,$$

per ogni $P \in \overline{A}$ si ha

$$u(P) = M.$$

*Dimostrazione.* Analoga alla dimostrazione del principio di massimo globale per funzioni olomorfe. ■

**Teorema 5.11** *(Principio di minimo globale per funzioni armoniche)* Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto connesso limitato. Sia $u \in C(\overline{A})$ armonica in $A$. Sia

$$m := \min_{P \in \overline{A}} u(P).$$

Allora

$$\min_{P \in \partial A} u(P) = m.$$

Inoltre se esiste $P_0 \in A$ tale che

$$u(P_0) = m,$$

per ogni $P \in \overline{A}$ si ha

$$u(P) = m.$$

*Dimostrazione.* Segue dal teorema precedente tenendo conto che

$$\min u = -\max(-u)$$

e che se $u$ è una funzione armonica allora anche $-u$ è una funzione armonica. ■

**Teorema 5.12** Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto. Sia $f \in C(A)$. Sia $g \in C(\partial A)$. Allora il problema di Dirichlet con termine di sorgente $f$ e condizione al contorno $g$

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } A, \\ u = g & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

nell'incognita

$$u \in C(\overline{A}) \cap C^2(A)$$

ha soluzione unica.

*Dimostrazione.* Poiché il problema è lineare, basta mostrare che il problema di Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } A, \\ u = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

ha la sola soluzione nulla.
Sia $u \in C(\overline{A}) \cap C^2(A)$ una soluzione del problema di Dirichlet omogeneo. Allora $u$ è armonica in $A$. Inoltre si ha

$$\max_{P \in \partial A} u(P) = \min_{P \in \partial A} u(P) = 0.$$

Allora per i principi di massimo e di minimo globale per funzioni armoniche per ogni $P \in A$ si ha

$$u(P) = 0.$$

Quindi si ha la tesi. ■

## 11.6 Richiami sulle successioni di funzioni

**Definizione 6.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$, $f \in \mathbf{C}^A$. Si dice che $\{f_n\}$ converge ad $f$ puntualmente in $A$ se per ogni $z \in A$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z),$$

ovvero se per ogni $z \in A$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulti

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

**Definizione 6.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$, $f \in \mathbf{C}^A$. Si dice che $\{f_n\}$ converge ad $f$ uniformemente in $A$ se per ogni $z \in A$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulti

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $z \in A$ risulti

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

**Definizione 6.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$, $f \in \mathbf{C}^A$. Si dice che $\{f_n\}$ converge ad $f$ uniformemente sui compatti in $A$ se per ogni compatto $K \subseteq A$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0,$$

ovvero se per ogni compatto $K \subseteq A$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ risulti

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

ovvero se per ogni compatto $K \subseteq A$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $z \in K$ risulti

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

**Teorema 6.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{f_n\} \subseteq C(A)$, $f : A \to \mathbf{C}$ tali che $\{f_n\}$ converge ad $f$ uniformemente sui compatti. Allora

(i) $f \in C(A)$;
(ii) per ogni curva regolare $\gamma : [a, b] \to A$ tale che $\gamma([a, b])$ è compatto, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Teorema 6.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{f_n\} \subseteq H(A)$, $f : A \to \mathbf{C}$ tale che $\{f_n\}$ converge ad $f$ uniformemente sui compatti. Allora

(i) $f \in H(A)$;
(ii) per ogni $k \in \mathbf{N}$ la successione $\left\{f_n^{(k)}\right\}$ converge ad $f^{(k)}$ uniformemente sui compatti.

*Dimostrazione.* (i) Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$f_n \in C(A),$$

per il teorema precedente si ha

$$f \in C(A).$$

Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva regolare chiusa arbitraria. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, poiché

$$f_n \in H(A),$$

si ha

$$\int_\gamma f_n(z)\, dz = 0.$$

Allora per il teorema precedente si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = 0.$$

Allora per il teorema di Morera si ha

$$f \in H(A).$$

$(ii)$ Sia $k \in \mathbf{N}$ arbitrario. Siano $K \subseteq A$ un compatto e $z_0 \in A$, $r > 0$ tali che

$$K \subseteq D_r(z_0) \subseteq A.$$

Definiamo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to A$ nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + re^{i\theta}.$$

Allora si ha

$$\partial D = \gamma([0, 2\pi]).$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$, poiché

$$f_n \in H(A),$$

si ha

$$f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz.$$

Poiché

$$f \in H(A),$$

si ha

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Poniamo

$$\eta := \inf_{\substack{z_0 \in K \\ z \in \gamma}} |z - z_0| > 0.$$

Sia $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $z \in \gamma$ risulti

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{2\pi\eta^{k+1}}{k!\ell(\gamma)}\varepsilon.$$

Inoltre sia

$$\eta := \inf_{\substack{z_0 \in K \\ z \in \gamma}} |z - z_0| > 0.$$

Allora per ogni $n > \overline{n}$ e per ogni $z_0 \in K$ si ha

$$\begin{aligned} \left|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)\right| &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f_n(z) - f(z)|}{|z - z_0|^{k+1}} |dz| \leq \\ &\leq \frac{k!\ell(\gamma)}{2\pi\eta^{k+1}} \frac{2\pi\eta^{k+1}}{k!\ell(\gamma)}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $K \subseteq A$ si ha la tesi. ■

## 11.7 Richiami sulle serie di funzioni

**Definizione 7.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$. Per ogni $p \in \mathbf{N}$ si dice *p-sima somma parziale* relativa a $\{f_n\}$ la quantità

$$\sigma_p := \sum_{n=1}^{p} f_n.$$

Si dice *successione delle somme parziali* relativa a $\{f_n\}$ la successione $\{\sigma_p\}$.

**Definizione 7.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$, $f \in \mathbf{C}^A$. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge puntualmente* ad $f$ se $\{\sigma_p\}$ converge puntualmente ad $f$.

**Definizione 7.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$, $f \in \mathbf{C}^A$. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente* ad $f$ se $\{\sigma_p\}$ converge uniformemente ad $f$.

**Definizione 7.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge assolutamente* se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge puntualmente.

**Definizione 7.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge totalmente* ad $f$ se esiste una successione $\{M_n\} \subseteq \mathbf{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$|f_n| \leq M_n$$

e tale che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converga in $\mathbf{R}$.

**Proposizione 7.6** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathbf{C}^A$.

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente, allora converge assolutamente.

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente, allora converge uniformemente.

(iii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge assolutamente, allora converge puntualmente.

(iv) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente, allora converge puntualmente.

*Dimostrazione.* Immediata. ■

## 11.8 Serie di potenze

**Definizione 8.1** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Si dice *serie di potenze* di punto iniziale $z_0$ e coefficienti $\{a_n\}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

**Teorema 8.2** *(Lemma di Abel)* Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $\overline{z} \in \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ tale che la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{z} - z_0)^n$$

converga in $\mathbf{C}$. Allora per ogni $r > 0$, con

$$r < |\overline{z} - z_0|,$$

la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge totalmente in $\overline{D_r(z_0)}$.

*Dimostrazione.* Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\overline{z} - z_0)^n$ converge si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n (\overline{z} - z_0)^n = 0.$$

Allora esiste $c > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulti

$$|a_n| \, |\overline{z} - z_0|^n \leq c.$$

Sia $r > 0$, con

$$r < |\overline{z} - z_0| .$$

Per ogni $z \in \overline{D_r(z_0)}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$|a_n| \, |z - z_0|^n = |a_n| \, |\overline{z} - z_0|^n \frac{|z - z_0|^n}{|\overline{z} - z_0|^n} \leq c \left( \frac{r}{|\overline{z} - z_0|} \right)^n .$$

Inoltre la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \left( \frac{r}{|\overline{z} - z_0|} \right)^n$$

è una serie geometrica di ragione

$$\rho = \frac{r}{|\overline{z} - z_0|} < 1,$$

quindi converge in $\mathbf{R}$. ∎

**Definizione 8.3** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia

$$A := \left\{ z \in \mathbf{C} \mid \text{la serie} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge} \right\}.$$

Sia

$$R := \sup_{z \in A} |z - z_0| \in [0, \infty] .$$

Allora $R$ è detto raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

**Teorema 8.4** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R$ il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Allora

(i) per ogni $r \in (0, R)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge totalmente in $\overline{D_r(z_0)}$;

(ii) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge puntualmente in $D_R(z_0)$;

(iii) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ non converge in $\mathbf{C} \backslash \overline{D_R(z_0)}$.

*Dimostrazione.* $(i)$ Sia $r \in (0, R)$. Per definizione di $R$ esiste $\overline{z} \in A$ tale che

$$r < |\overline{z} - z_0| \leq R.$$

Poiché $\overline{z} \in A$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{z} - z_0)^n$$

converge. Allora la tesi segue dal lemma di Abel.
$(ii)$ Segue da $(i)$.
$(iii)$ Sia $z \in \mathbf{C} \backslash \overline{D_R(z_0)}$. Allora

$$|\overline{z} - z_0| > R.$$

Per definizione di $R$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{z} - z_0)^n$$

non converge. ∎

**Proposizione 8.5** *(Criterio di Hadamard)* Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Allora il raggio di convergenza $R$ della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

verifica la formula

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \, |a_n|^{1/n} .$$

*Dimostrazione.* Omessa. ∎

**Teorema 8.6** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R$ il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Sia

$$D := D_R(z_0) .$$

Sia $f : D \longrightarrow \mathbf{C}$ definita nel modo seguente. Per ogni $z \in D$ poniamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Allora

(i) $f \in H(D)$;

(ii) per ogni $k \in \mathbf{N}$ e per ogni $z \in D$ si ha

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

e la serie a secondo membro ha raggio di convergenza $R$;

(iii) per ogni $n \in \mathbf{N}_0$ risulta

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} .$$

*Dimostrazione.* $(i)$ Per ogni $p \in \mathbf{N}_0$ definiamo la funzione $\sigma_p : D \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D$ poniamo

$$\sigma_p(z) := \sum_{n=0}^{p} a_n (z - z_0)^n .$$

Per ogni $p \in \mathbf{N}_0$ si ha

$$\sigma_p \in H(D) .$$

Inoltre per ogni $r \in (0, R)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

converge totalmente, quindi uniformemente, in $\overline{D_r(z_0)}$.
Quindi la successione $\{\sigma_p\}$ converge ad $f$ uniformemente sui compatti in $D$.
Allora, per il teorema 6.5 si ha

$$f \in H(D) .$$

$(ii)$ Sempre per il teorema 6.5, per ogni $k \in \mathbf{N}$ la successione $\left\{ \sigma_p^{(k)} \right\}$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente sui compatti. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ e per ogni $z \in D$, poiché per ogni $p \in \mathbf{N}_0$ si ha

$$\sigma_p^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{p} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k} ,$$

risulta

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Quindi tale serie ha raggio di convergenza $R$.
$(iii)$ Per ogni $k \in \mathbf{N}_0$ si ha

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k.$$

Quindi si ha la tesi. ■

**Definizione 8.7** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Sia $z_0 \in A$. Si dice serie di Taylor di $f$ di punto iniziale $z_0$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

**Teorema 8.8** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f \in H(A)$. Siano $z_0 \in A$, $r > 0$ tali che

$$D_r(z_0) \subseteq A.$$

Allora per ogni $z \in D_r(z_0)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge e risulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

*Dimostrazione.* Sia $z \in D_r(z_0)$ arbitrario.
Sia $\rho > 0$ tale che

$$z \in D_\rho(z_0), \quad \overline{D_\rho(z_0)} \subseteq D_r(z_0).$$

Definiamo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to A$ nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + \rho e^{i\theta}.$$

Allora si ha

$$\partial D_\rho(z_0) = \gamma.$$

Per il secondo teorema di Cauchy per ogni $z \in D_\rho(z_0)$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Per ogni $z \in D_\rho(z_0)$ e per ogni $\zeta \in \gamma([0, 2\pi])$ si ha

$$|z - z_0| < |\zeta - z_0|,$$

ovvero

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

Quindi per ogni $z \in D_\rho(z_0)$ e per ogni $\zeta \in \gamma([0, 2\pi])$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

converge e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Inoltre la convergenza è uniforme.
Allora per ogni $z \in D_\rho(z_0)$ e per ogni $\zeta \in \gamma([0, 2\pi])$ si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

Quindi per ogni $z \in D_\rho(z_0)$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{N}_0$ risulta

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ovvero

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

per ogni $z \in D_\rho(z_0)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Per l'arbitrarietà di $z \in D_r(z_0)$ si ha la tesi. ■

**Definizione 8.9** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Una funzione $f : A \to \mathbf{C}$ si dice analitica in $A$ se per ogni $z_0 \in A$ esiste $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converga e risulti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

**Teorema 8.10** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è olomorfa in $A$;
(ii) $f$ è analitica in $A$.

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue dal teorema precedente.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $z_0 \in A$ arbitrario. Sia $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converga e risulti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Allora, per il teorema 8.6, si ha

$$f \in H(D_r(z_0)).$$

Per l'arbitrarietà di $z_0 \in A$ si ha

$$f \in H(A). \quad ■$$

**Esempio 8.11** Di seguito sono riportati gli sviluppi in serie di alcune funzioni elementari, con il rispettivo raggio di convergenza.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad R = \infty,$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad R = \infty,$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad R = \infty,$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad R = 1,$$

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}, \qquad R = 1.$$

**Proposizione 8.12** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$. Sia $z_0 \in A$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) per ogni $n \in \mathbf{N}_0$ risulta

$$f^{(n)}(z_0) = 0;$$

(ii) esiste $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulta

$$f(z) = 0;$$

(iii) per ogni $z \in A$ risulta

$$f(z) = 0.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converga e risulti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Allora per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Poniamo

$$B := \{z_1 \in A \mid \text{esiste } r > 0, \text{con } D_r(z_1) \subseteq A, \text{tale che}$$
$$\text{per ogni } z \in D_r(z_1) \text{ risulti } f(z) = 0\}.$$

Per il punto $(ii)$ si ha

$$z_0 \in B.$$

Quindi $B$ non è vuoto.
Mostriamo che $B$ è aperto.
Sia $z_1 \in B$ arbitrario. Sia $r > 0$, con

$$D_r(z_1) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_1)$ risulti

$$f(z) = 0.$$

Per ogni $z_2 \in D_r(z_1)$ esiste $\rho > 0$ tale che

$$D_\rho(z_2) \subseteq D_r(z_1),$$

quindi tale che per ogni $z \in D_\rho(z_2)$ risulti

$$f(z) = 0.$$

Allora

$$D_r(z_1) \subseteq B.$$

Quindi $z_1$ è interno a $B$.
Mostriamo che $B$ è chiuso.
Siano $\{z_n\} \subseteq B$, $\overline{z} \in A$ tali che

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \overline{z}.$$

Sia $n \in \mathbf{N}$ arbitrario. Sia $r > 0$, con

$$D_r(z_n) \subseteq A$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_n)$ risulti

$$f(z) = 0.$$

Allora per ogni $k \in \mathbf{N}_0$ e per ogni $z \in D_r(z_n)$ si ha

$$f^{(k)}(z) = 0.$$

In particolare per ogni $k \in \mathbf{N}_0$ si ha

$$f^{(k)}(z_n) = 0.$$

Allora per ogni $k \in \mathbf{N}_0$, poiché $f^{(k)}$ è continua in $A$, si ha

$$f^{(k)}(\overline{z}) = \lim_{n \to \infty} f^{(k)}(z_n) = 0.$$

Quindi, analogamente a quanto visto nella dimostrazione di $(i) \Rightarrow (ii)$, esiste $\rho > 0$, con

$$D_\rho(\overline{z}) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_\rho(\overline{z})$ risulti

$$f(\overline{z}) = 0.$$

Quindi

$$\overline{z} \in B.$$

Allora $B$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione, quindi è chiuso.
Poiché $A$ è connesso e $B \subseteq A$ è non vuoto aperto e chiuso, si ha

$$B = A.$$

Quindi per ogni $z_0 \in A$ esiste $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulti

$$f(z) = 0.$$

In particolare per ogni $z \in A$ risulta

$$f(z) = 0.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Evidente. ■

**Corollario 8.13** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ aperto. Siano $f, g : A \to \mathbf{C}$ analitiche in $A$. Supponiamo che esistano $z_0 \in A$, $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulti

$$f(z) = g(z).$$

Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$f(z) = g(z).$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$h := f - g.$$

Allora $h$ è analitica in $A$ e per ogni $z \in D_r(z_0)$ si ha

$$h(z) = 0.$$

Allora per il teorema precedente per ogni $z \in A$ si ha

$$h(z) = 0,$$

ovvero

$$f(z) = g(z). \quad \blacksquare$$

## 11.9 Zeri di funzioni analitiche

**Definizione 9.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$ non identicamente nulla in $A$. Un punto $z_0 \in A$ si dice <u>zero</u> di $f$ se

$$f(z_0) = 0.$$

**Proposizione 9.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$ non identicamente nulla in $A$. Sia $z_0 \in A$ uno zero di $f$. Allora esistono un unico $k \in \mathbf{N}$ e un'unica $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tali che per ogni $z \in A$ risulti

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z).$$

*Dimostrazione.* Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbf{C}$ tale che per ogni $z \in A$ risulti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Poiché $f$ non è identicamente nulla in $A$ per la proposizione 8.12 esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_n \neq 0.$$

Poniamo

$$k := \min\{n \in \mathbf{N}_0 \mid a_n \neq 0\}.$$

Poiché

$$f(z_0) = 0,$$

si ha

$$a_0 = 0,$$

quindi

$$k \in \mathbf{N}.$$

Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \\ &= (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}. \end{aligned}$$

Definiamo $f_1 : A \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A$ poniamo

$$f_1(z) := \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Allora $f_1$ è analitica in $A$ e risulta

$$f_1(z_0) = a_k \neq 0.$$

Inoltre per ogni $z \in A$ si ha

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z).$$

Non vediamo l'unicità. $\blacksquare$

**Definizione 9.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$ non identicamente nulla in $A$. Sia $z_0 \in A$ uno zero di $f$. Siano $k \in \mathbf{N}$ e $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tali che per ogni $z \in A$ risulti

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z).$$

Allora $k$ si dice <u>ordine</u> dello zero $z_0$.

**Definizione 9.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$ non identicamente nulla in $A$. Uno zero $z_0 \in A$ di $f$ si dice <u>semplice</u> se ha ordine

$$k = 1,$$

si dice <u>multiplo</u> se ha ordine

$$k \geq 2.$$

**Proposizione 9.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$ non identicamente nulla in $A$. Sia $Z_f \subseteq A$ l'insieme degli zeri di $f$. Allora ogni punto di $Z_f$ è isolato in $Z_f$.

*Dimostrazione.* Sia $z_0 \in Z_f$ arbitrario. Siano $k \in \mathbf{N}$ e $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tali che per ogni $z \in A$ risulti

$$f(z) = (z - z_0)^k f_1(z).$$

Poiché $f_1$ è analitica in $A$, $f_1$ è continua in $A$. Allora, poiché

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

esiste $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulti

$$f_1(z) \neq 0.$$

Allora

$$D_r(z_0) \cap Z_f = \{z_0\}.$$

Quindi $z_0$ è isolato in $Z_f$. $\blacksquare$

**Corollario 9.6** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $f : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$ non identicamente nulla in $A$. Sia $Z_f \subseteq A$ l'insieme degli zeri di $f$. Sia $K \subseteq A$ un compatto. Allora l'insieme $Z_f \cap K$ è finito.

## 11.10 Poli di funzioni

**Definizione 10.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ analitica in $A \setminus \{z_0\}$. Il punto $z_0$ si dice <u>polo</u> di $f$ se esistono $g, h : A \to \mathbf{C}$ analitiche in $A$ tali che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

e tali che $z_0$ è zero di $h$ di ordine $q$ e $z_0$ o non è zero di $g$ o è zero di $g$ di ordine $p < q$.

**Proposizione 10.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ analitica in $A \setminus \{z_0\}$. Supponiamo che $z_0$ sia un polo di $f$. Allora esistono un unico $k \in \mathbf{N}$ ed un'unica $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tali che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

*Dimostrazione.* Siano $g_1, h_1 : A \to \mathbf{C}$ analitiche in $A$ tali che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

e tali che $z_0$ è zero di $h$ di ordine $q$ e $z_0$ o non è zero di $g$ o è zero di $g$ di ordine $p < q$.
Supponiamo che $z_0$ sia zero di $g$ di ordine $q$. Sia $g_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$g_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in A$ risulti

$$g(z) = (z - z_0)^p g_1(z).$$

Sia $h_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$h_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in A$ risulti

$$h(z) = (z - z_0)^q h_1(z).$$

Definiamo $f_1 : A \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A$ poniamo

$$f_1(z) := \frac{g_1(z)}{h_1(z)}.$$

Allora $f_1$ è analitica in $A$ e risulta

$$f_1(z_0) = \frac{g_1(z_0)}{h_1(z_0)} \neq 0.$$

Inoltre poniamo

$$k := q - p.$$

Allora per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \frac{(z - z_0)^p g_1(z)}{(z - z_0)^q h_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

Non discutiamo l'unicità. ■

**Definizione 10.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ analitica in $A \setminus \{z_0\}$. Supponiamo che $z_0$ sia un polo di $f$. Siano $k \in \mathbf{N}$, con

$$k \geq 1$$

e $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tali che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

Allora $k$ si dice <u>*ordine*</u> dello polo $z_0$.

**Definizione 10.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ analitica in $A \setminus \{z_0\}$. Supponiamo che $z_0$ sia un polo di $f$. Il polo $z_0$ si dice <u>*semplice*</u> se ha ordine

$$k = 1,$$

si dice <u>*multiplo*</u> se ha ordine

$$k \geq 2.$$

**Definizione 10.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $P \subseteq A$. Sia $f : A \setminus P \to \mathbf{C}$ analitica. Supponiamo che $P$ sia l'insieme dei poli di $f$. La funzione $f$ si dice <u>*meromorfa*</u> in $A$ se $P$ è numerabile.

**Proposizione 10.6** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $P \subseteq A$. Sia $f : A \setminus P \to \mathbf{C}$ meromorfa in $A$. Supponiamo che $P$ sia l'insieme dei poli di $f$. Allora per ogni $z \in A \setminus P$ esiste la derivata

$$f'(z).$$

Inoltre $f' : A \setminus P \to \mathbf{C}$ è meromorfa in $A$.

*Dimostrazione.* Omessa. ■

**Proposizione 10.7** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $P \subseteq A$. Sia $f : A \setminus P \to \mathbf{C}$ meromorfa in $A$. Supponiamo che $P$ sia l'insieme dei poli di $f$. Sia $z_0 \in P$ un polo di $f$ di ordine $k$. Allora $z_0$ è un polo di $f'$ di ordine $k + 1$.

*Dimostrazione.* Sia $f_1 : A \setminus P \cup \{z_0\} \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in A \setminus P$ risulti

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

Allora per ogni $z \in A \setminus P$ si ha

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1'(z) - \frac{k}{(z - z_0)^{k+1}} f_1(z) = \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \left[(z - z_0) f_1'(z) - k f_1(z)\right]. \end{aligned}$$

Definiamo $f_2 : A \setminus P \cup \{z_0\} \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A \setminus P \cup \{z_0\}$ poniamo

$$f_2(z) := (z - z_0) f_1'(z) - k f_1(z).$$

Allora $f_2$ è analitica in $A \setminus P \cup \{z_0\}$ e risulta

$$f_2(z_0) = -k f_1(z_0) \neq 0.$$

Inoltre per ogni $z \in A \setminus P$ si ha

$$f'(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} f_2(z).$$

Quindi $z_0$ è polo di $f'$ di ordine $k + 1$. ■

## 11.11 Serie di potenze inverse

**Definizione 11.1** Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Si dice <u>*serie di potenze inverse*</u> con coefficienti $\{b_n\}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

**Notazione 11.2** Per ogni $z_0 \in A$ e per ogni $r > 0$ poniamo

$$D_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Per ogni $z_0 \in A$ e per ogni $R > 0$, poniamo

$$E_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| > R\}.$$

Per ogni $z_0 \in A$ e per ogni $r, R > 0$, con

$$r < R,$$

poniamo

$$C_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

**Teorema 11.3** Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R'$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n.$$

Sia

$$R := \frac{1}{R'}.$$

Allora

(i) per ogni $r > R$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ converge totalmente in $\overline{E_r(0)}$;

(ii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ converge puntualmente in $E_R(0)$;

(iii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ non converge in $D_R(0)$.

Dimostrazione. Segue dal teorema 8.4 tenendo conto che per ogni $r \in [0, \infty]$ si ha

$$\left\{ z \mid \frac{1}{z} \in D_r(0) \right\} = E_{1/r}(0)$$

e

$$\left\{ z \mid \frac{1}{z} \in E_r(0) \right\} = D_{1/r}(0). \quad \blacksquare$$

**Definizione 11.4** Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R'$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n.$$

Sia

$$R := \frac{1}{R'}.$$

Allora $R$ è detto <u>*raggio di convergenza*</u> della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

**Proposizione 11.5** Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Allora il raggio di convergenza $R$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

è dato dalla formula

$$R = \overline{\lim_{n \to \infty}} |b_n|^{1/n}.$$

*Dimostrazione.* Sia $R'$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n.$$

Per il criterio di Hadamard si ha

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim_{n \to \infty}} |b_n|^{1/n}$$

Allora il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

è dato da

$$R = \frac{1}{R'} = \overline{\lim_{n \to \infty}} |b_n|^{1/n}. \quad \blacksquare$$

**Teorema 11.6** Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R$ il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Sia $f : E_R(0) \to \mathbf{C}$ definita nel modo seguente. Per ogni $z \in E_R(0)$ poniamo

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Allora

(i) $f \in H(E_R(0))$;

(ii) per ogni $z \in E_R(0)$ si ha

$$f'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b_n}{z^{n+1}}.$$

*Dimostrazione.* (*i*) Definiamo $g : D_{1/R}(0) \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $\zeta \in D_{1/R}(0)$ poniamo

$$g(\zeta) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n.$$

Definiamo $h : E_R(0) \to D_{1/R}(0)$ nel seguente modo. Per ogni $z \in E_R(0)$ poniamo

$$h(z) = \frac{1}{z}.$$

Allora per ogni $z \in E_R(0)$ si ha

$$f(z) = g(h(z)).$$

Quindi, poiché $g \in H(D_{1/R}(0))$ e $h \in H(E_R(0))$, si ha

$$f \in H(E_R(0)).$$

Inoltre per ogni $\zeta \in D_{1/R}(0)$ si ha

$$g'(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \zeta^{n-1}.$$

Quindi per ogni $z \in E_R(0)$ si ha

$$f'(z) = g'(h(z))\, h'(z) = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b_n}{z^{n-1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b_n}{z^{n+1}}. \quad \blacksquare$$

**Teorema 11.7** Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R_2 \in [0, \infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Sia $R_1 \in [0, \infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}.$$

Supponiamo

$$R_1 < R_2.$$

Allora

(i) per ogni $r_1, r_2 \in (R_1, R_2)$, con

$$R_1 < r_1 < r_2 < R_2,$$

la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$$

converge totalmente in $\overline{C_{r_1, r_2}(0)}$;

(ii) la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$$

converge puntualmente in $C_{R_1, R_2}(0)$;

(iii) la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$$

non converge in $\mathbf{C} \backslash \overline{C_{R_1, R_2}(0)}$.

*Dimostrazione.* Segue dai teoremi 8.4 e 11.3. ■

**Teorema 11.8** Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R_2 \in [0,\infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Sia $R_1 \in [0,\infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}.$$

Supponiamo

$$R_1 < R_2.$$

Sia $f : C_{R_1,R_2}(0) \to \mathbf{C}$ definita nel modo seguente. Per ogni $z \in C_{R_1,R_2}(0)$ poniamo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n.$$

Allora

$$f \in H\left(C_{R_1,R_2}(0)\right).$$

*Dimostrazione.* Segue dai teoremi 8.6 e 11.6. ■

**Lemma 11.9** Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f \in H\left(C_{R_1,R_2}(0)\right)$. Sia $n \in \mathbf{Z}$. Siano $\rho_1, \rho_2 \in (R_1, R_2)$. Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ le curve definite nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma_1(\theta) = \rho_1 e^{i\theta}, \quad \gamma_2(\theta) = \rho_2 e^{i\theta}.$$

Allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

*Dimostrazione.* Le curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ sono omotope in $C_{R_1,R_2}(0)$. Inoltre la funzione

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}}$$

è olomorfa in $C_{R_1,R_2}(0)$. Allora per il teorema di deformazione si ha

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta. \quad ■$$

**Teorema 11.10** Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f \in H\left(C_{R_1,R_2}(0)\right)$. Sia $\rho \in (R_1, R_2)$. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := \rho e^{i\theta}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{Z}$ siano

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Allora per ogni $z \in C_{R_1,R_2}(0)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n.$$

*Dimostrazione.* Sia $z \in C_{R_1,R_2}(0)$ arbitrario.
Siano $\rho_1, \rho_2 \in (R_1, R_2)$, con

$$\rho_1 < \rho_2,$$

tali che

$$z \in C_{\rho_1,\rho_2}(0).$$

Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ le curve definite nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma_1(\theta) = \rho_1 e^{i\theta}, \quad \gamma_2(\theta) = \rho_2 e^{i\theta}.$$

Allora si ha

$$\partial C_{\rho_1,\rho_2}(0) = \{-\gamma_1\} \cup \gamma_2.$$

Quindi la curva $\{-\gamma_1\} \cup \gamma_2$ è regolare chiusa semplice omotopa ad un punto in $C_{R_1,R_2}(0)$. Inoltre $f$ è olomorfa in $C_{R_1,R_2}(0)$. Quindi per il secondo teorema di Cauchy si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\{-\gamma_1\}\cup\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \end{aligned}$$

Mostriamo che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Per ogni $\zeta \in \gamma_2([0, 2\pi])$ si ha

$$|z| \le |\zeta|,$$

quindi

$$\left|\frac{z}{\zeta}\right| \le 1.$$

Allora per ogni $\zeta \in \gamma_2([0, 2\pi])$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

e risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}.$$

Quindi per ogni $\zeta \in \gamma_2([0, 2\pi])$ si ha

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

Inoltre la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$ è uniforme. Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\zeta)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta. \end{aligned}$$

Inoltre per il lemma precedente per ogni $n \in \mathbf{N}_0$ si ha

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Mostriamo che

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Per ogni $\zeta \in \gamma_1([0, 2\pi])$ si ha

$$|\zeta| \le |z|,$$

quindi

$$\left|\frac{\zeta}{z}\right| \le 1.$$

Allora per ogni $\zeta \in \gamma_1([0,2\pi])$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k$$

e risulta

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}.$$

Quindi per ogni $\zeta \in \gamma_1([0,2\pi])$ si ha

$$-\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^k}{z^{k+1}}.$$

Ponendo nella sommatoria

$$n = -k-1$$

per ogni $\zeta \in \gamma_1([0,2\pi])$ si ha

$$-\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{\zeta^{-n-1}}{z^{-n}} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

Inoltre la convergenza della serie $\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$ è uniforme. Allora

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\zeta)\left(\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}\right)d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.\end{aligned}$$

Inoltre per il lemma precedente per ogni $n \leq -1$ si ha

$$\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = \int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

Quindi

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

Allora si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbf{Z}} z^n\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,$$

cioè la tesi. ∎

**Definizione 11.11** Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f \in H(C_{R_1,R_2}(0))$. Sia $\rho \in (R_1, R_2)$. Sia $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0,2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := \rho e^{i\theta}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ siano

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

Allora la serie

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$$

è detta <u>serie di Laurent</u> di $f$.

**Definizione 11.12** Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Una funzione $f : C_{R_1,R_2}(0) \to \mathbf{C}$ si dice <u>*sviluppabile in serie di Laurent*</u> se esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{C}$ tale che

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$$

converge in $C_{R_1,R_2}(0)$ e per ogni $z \in C_{R_1,R_2}(0)$ risulta

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n.$$

**Teorema 11.13** Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f : C_{R_1,R_2}(0) \to \mathbf{C}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è olomorfa in $C_{R_1,R_2}(0)$;
(ii) $f$ è sviluppabile in serie di Laurent in $C_{R_1,R_2}(0)$.

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue dal teorema precedente.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Segue dal teorema 11.8. ∎

**Osservazione 11.14** Sia $R > 0$. Sia $f \in H(D_R(0))$. Allora per ogni $n \in \mathbf{Z}$ se $n \geq 0$ si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

e se $n < 0$ si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\zeta)\zeta^{|n+1|}d\zeta = 0.$$

Quindi la serie di Laurent di $f$ coincide con la serie di Taylor di $f$.

## 11.12 Serie di potenze inverse con punto iniziale generico

Le dimostrazioni di questa sezione sono analoghe a quelle della sezione precedente e pertanto non vengono riportate.

**Definizione 12.1** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Si dice <u>*serie di potenze inverse*</u> di punto iniziale $z_0 \in \mathbf{C}$ con coefficienti $\{b_n\}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

**Teorema 12.2** Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R'$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n.$$

Sia

$$R := \frac{1}{R'}.$$

Allora

(i) per ogni $r > R$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge totalmente in $\overline{E_r(z_0)}$;
(ii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge puntualmente in $E_R(z_0)$;
(iii) la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ non converge in $D_R(z_0)$.

**Definizione 12.3** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R'$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n.$$

Sia

$$R := \frac{1}{R'}.$$

Allora $R$ è detto raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

**Proposizione 12.4** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{b_n\} \subseteq \mathbf{C}$. Allora il raggio di convergenza $R$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

è dato dalla formula

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} |b_n|^{1/n}.$$

**Teorema 12.5** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $b_n \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R$ il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Sia $f : E_R(z_0) \to \mathbf{C}$ definita nel seguente modo. Per ogni $z \in E_R(z_0)$ poniamo

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Allora

(i) $f \in H(E_R(z_0))$;

(ii) per ogni $z \in E_R(z_0)$ si ha

$$f'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

**Teorema 12.6** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R_2 \in [0,\infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Sia $R_1 \in [0,\infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Supponiamo

$$R_1 < R_2.$$

Allora

(i) per ogni $r_1, r_2 \in (R_1, R_2)$, con

$$R_1 < r_1 < r_2 < R_2,$$

la serie

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

converge totalmente in $\overline{C_{r_1,r_2}(z_0)}$;

(ii) la serie

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

converge puntualmente in $C_{R_1,R_2}(z_0)$;

(iii) la serie

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

non converge in $\mathbf{C}\backslash\overline{C_{R_1,R_2}(z_0)}$.

**Teorema 12.7** Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{C}$. Sia $R_2 \in [0,\infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Sia $R_1 \in [0,\infty]$ il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Supponiamo

$$R_1 < R_2.$$

Sia $f : C_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbf{C}$ definita nel modo seguente. Per ogni $z \in C_{R_1,R_2}(z_0)$ poniamo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n.$$

Allora

$$f \in H(C_{R_1,R_2}(z_0)).$$

**Teorema 12.8** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f \in H(C_{R_1,R_2}(z_0))$. Sia $\rho \in (R_1, R_2)$. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + \rho e^{i\theta}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{Z}$ siano

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Allora per ogni $z \in C_{R_1,R_2}(z_0)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n.$$

**Definizione 12.9** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Siano $R_1, R_2 > z$, con $R_1 < R_2$. Sia $f \in H(C_{R_1,R_2}(z_0))$. Sia $\rho \in (R_1, R_2)$. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + \rho e^{i\theta}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ siano

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Allora la serie

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

è detta serie di Laurent di $f$ di punto iniziale $z_0$.

**Definizione 12.10** Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Una funzione $f : C_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbf{C}$ si dice sviluppabile in serie di Laurent se esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{C}$ tale che

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

converge in $C_{R_1,R_2}(z_0)$ e per ogni $z \in C_{R_1,R_2}(z_0)$ risulta

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z-z_0)^n.$$

**Teorema 12.11** Siano $R_0, R_1 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f : C_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbf{C}$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $f$ è olomorfa in $C_{R_1,R_2}(z_0)$;
(ii) $f$ è sviluppabile in serie di Laurent in $C_{R_1,R_2}(z_0)$.

## 11.13 Metodo dei residui

**Definizione 13.1** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f \in H(C_{R_1,R_2}(z_0))$. Sia $\rho \in (R_1, R_2)$. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + \rho e^{i\theta}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ siano

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Si dice residuo di $f$ in $z_0$ il numero

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta.$$

**Proposizione 13.2** Sia $z_0 \in \mathbf{C}$. Siano $R_1, R_2 > 0$, con $R_1 < R_2$. Sia $f \in H(C_{R_1,R_2}(z_0))$. Sia $\gamma : [a, b] \to C_{R_0,R_1}(z_0)$ una curva regolare chiusa. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, I_\gamma(z_0)\, \text{Res}(f, z_0).$$

*Dimostrazione.* Sia

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

la serie di Laurent di $f$ di punto iniziale $z_0$. Allora per ogni $z \in C_{R_0,R_1}(z_0)$ si ha

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n\neq -1}} a_n (z - z_0)^n.$$

Definiamo $g : C_{R_0,R_1}(z_0) \to \mathbf{C}$ nel modo seguente. Per ogni $z \in C_{R_0,R_1}(z_0)$ poniamo

$$g(z) := \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n\neq -1}} a_n (z - z_0)^n.$$

Allora per ogni $z \in C_{R_0,R_1}(z_0)$ si ha

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + g(z).$$

Quindi

$$\int_\gamma f(z)\, dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} + \int_\gamma g(z)\, dz.$$

Mostriamo che $g$ è dotata di primitiva in $C_{R_0,R_1}(z_0)$.
Definiamo $G : C_{R_0,R_1}(z_0) \to \mathbf{C}$ nel modo seguente. Per ogni $z \in C_{R_0,R_1}(z_0)$ poniamo

$$G(z) := \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n\neq -1}} a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Allora $G \in H(C_{R_0,R_1}(z_0))$ e per ogni $z \in C_{R_0,R_1}(z_0)$ risulta

$$G'(z) = \sum_{\substack{n\in\mathbf{Z}\\ n\neq -1}} a_n (z - z_0)^n = g(z).$$

Quindi $G$ è una primitiva di $g$ in $C_{R_0,R_1}(z_0)$. Allora si ha

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 0.$$

Quindi

$$\int_\gamma f(z)\, dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i\, I_\gamma(z_0)\, \text{Res}(f, z_0). \quad \blacksquare$$

**Definizione 13.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f : A\setminus\{z_0\} \to \mathbf{C}$. Il punto $z_0$ si dice punto singolare isolato di $f$ se esiste $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che

$$f|_{D_r(z_0)\setminus\{z_0\}} \in H(D_r(z_0)\setminus\{z_0\})$$

e se per ogni $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

non esiste $\tilde{f} : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ analitica tale che

$$\tilde{f}\big|_{D_r(z_0)\setminus\{z_0\}} = f|_{D_r(z_0)\setminus\{z_0\}}.$$

**Teorema 13.4** *(dei residui)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $\{z_1, ..., z_n\} \subseteq A$. Sia $f \in H(A\setminus\{z_1, ..., z_n\})$. Supponiamo che $z_1, ..., z_n$ siano punti singolari isolati di $f$. Sia $\gamma : [a, b] \to A\setminus\{z_1, ..., z_n\}$ una curva regolare chiusa semplice omotopa ad un punto in $A$ orientata in verso antiorario. Sia $K \subseteq A$ il compatto tale che

$$\partial K = \gamma([a, b]).$$

Sia

$$J := \{k \in \{1, ..., n\} \mid z_k \in K\}.$$

Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k\in J} \text{Res}(f, z_k).$$

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in J$ sia $r_k > 0$, con

$$D_{r_k}(z_k) \subseteq K,$$

tale che

$$f|_{D_{r_k}(z_k)\setminus\{z_k\}} \in H(D_{r_k}(z_k)\setminus\{z_k\}).$$

Per ogni $k \in J$ definiamo la curva $\gamma_k : [0, 2\pi] \to A$ nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma_k(\theta) := z_k + r_k e^{i\theta}.$$

Per il teorema precedente per ogni $k \in J$ si ha

$$\int_{\gamma_k} f(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_k).$$

Poniamo

$$\Gamma := \gamma \cup \bigcup_{k\in J}\{-\gamma_k\}.$$

Allora $\Gamma$ è omotopa ad un punto in $A\setminus\{z_1, ..., z_n\}$. Quindi per il primo teorema di Cauchy si ha

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0,$$

ovvero

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k\in J}\int_{\gamma_k} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k\in J} \text{Res}(f, z_k). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 13.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f : A\setminus\{z_0\} \to \mathbf{C}$. Supponiamo che $z_0$ sia un polo semplice di $f$. Sia $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} f_1(z).$$

Allora

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = f_1(z_0).$$

*Dimostrazione.* Sia

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m$$

lo sviluppo in serie di Taylor di $f_1$ di punto iniziale $z_0$. Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m.$$

In particolare si ha

$$f_1(z_0) = b_0.$$

Per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^{m-1}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$a_n := b_{n+1}.$$

Allora per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Quindi

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è lo sviluppo di Laurent di $f$ di punto iniziale $z_0$. Allora

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = a_{-1} = b_0 = f_1(z_0). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 13.6** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$. Sia $k \in \mathbf{N}$. Supponiamo che $z_0$ sia un polo di $f$ di ordine $k$. Sia $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

Allora

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{f_1^{k-1}(z_0)}{(k-1)!}.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m$$

lo sviluppo in serie di Taylor di $f_1$ di punto iniziale $z_0$. Allora per ogni $z \in A$ si ha

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m.$$

Inoltre per ogni $m \in \mathbf{N}_0$ risulta

$$b_m = \frac{f_1^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^{m-k}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$a_n := b_{n+k}.$$

Allora per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Quindi

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è lo sviluppo di Laurent di $f$ di punto iniziale $z_0$. Allora

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = a_{-1} = b_{k-1} = \frac{f_1^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 13.7** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Siano $f, g : A \to \mathbf{C}$ analitiche in $A$. Sia $z_0 \in A$ uno zero semplice di $g$ e sia

$$f(z_0) \neq 0.$$

Sia $h : A \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ definita nel seguente modo. Per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ poniamo

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Allora

$$\mathrm{Res}\,(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

*Dimostrazione.* Sia $g_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$, con

$$g_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in A$ risulti

$$g(z) = (z - z_0)\, g_1(z).$$

Allora per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$h(z) = \frac{1}{z - z_0} \frac{f(z)}{g_1(z)}.$$

Definiamo la funzione $h_1 : A \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A$ poniamo

$$h_1(z) := \frac{f(z)}{g_1(z)}.$$

Allora $h_1$ è analitica in $A$ e risulta

$$h_1(z_0) = \frac{f(z_0)}{g_1(z_0)} \neq 0.$$

Inoltre per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulta

$$h(z) = \frac{1}{z - z_0} h_1(z).$$

Quindi $z_0$ è un polo semplice di $h$. Allora

$$\mathrm{Res}\,(h, z_0) = h_1(z_0) = \frac{f(z_0)}{g_1(z_0)}.$$

Mostriamo che

$$g_1(z_0) = g'(z_0).$$

Sia

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^n$$

la serie di Taylor di $g_1$ di punto iniziale $z_0$. Allora per ogni $z \in A$ risulta

$$g_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m.$$

In particolare si ha

$$g_1(z_0) = b_0.$$

Inoltre per ogni $z \in A$ si ha

$$g(z) = (z - z_0)\, g_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^{m+1}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo

$$a_n := b_{n-1}.$$

Allora per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

è lo sviluppo in serie di Taylor di $g$. Allora per ogni $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Quindi si ha

$$g_1(z_0) = b_0 = a_1 = g'(z_0).$$

Allora

$$\operatorname{Res}(h, z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \quad \blacksquare$$

## 11.14 Punti singolari

**Proposizione 14.1** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f \in H(A \setminus \{z_0\})$. Supponiamo che $z_0$ sia un punto singolare isolato di $f$. Sia

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

la serie di Laurent di $f$ di punto iniziale $z_0$. Supponiamo che esista $k \in \mathbf{N}$ tale che

$$a_{-k} \neq 0$$

e per ogni $n > k$ risulti

$$a_{-n} = 0.$$

Allora $z_0$ è un polo di $f$ di ordine $k$.

*Dimostrazione.* Per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^{m-k} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^m. \end{aligned}$$

Definiamo la funzione $f_1 : A \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in A$ poniamo

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^m.$$

Allora $f_1$ è anlitica in $A$ e risulta

$$f_1(z_0) = a_{-k} \neq 0.$$

Inoltre per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

Quindi si ha la tesi. $\blacksquare$

**Definizione 14.2** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f \in H(A \setminus \{z_0\})$. Sia

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

la serie di Laurent di $f$ di punto iniziale $z_0$. Il punto $z_0$ si dice

(i) <u>punto di singolarità eliminabile</u> se per ogni $n \in \mathbf{N}$ risulta

$$a_{-n} = 0,$$

(ii) <u>punto di singolarità essenziale</u> se per ogni $k \in \mathbf{N}$ esiste $n > k$ tale che

$$a_{-n} \neq 0.$$

**Proposizione 14.3** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f \in H(A \setminus \{z_0\})$. Supponiamo che $z_0$ sia un punto di singolarità eliminabile per $f$. Allora esiste $\tilde{f} : A \to \mathbf{C}$ analitica in $A$ tale che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$\tilde{f}(z) = f(z).$$

*Dimostrazione.* Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

la serie di Laurent di $f$ di punto iniziale $z_0$. Allora per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n.$$

Definiamo $\tilde{f} : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D_r(z_0)$ poniamo

$$\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Allora $\tilde{f}$ è analitica in $A$ e per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulta

$$\tilde{f}(z) = f(z). \quad \blacksquare$$

**Proposizione 14.4** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f \in H(A \setminus \{z_0\})$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $z_0$ è un punto di singolarità eliminabile;

(ii) esistono $r > 0$, con

$$\overline{D_r(z_0)} \subseteq A$$

ed $M > 0$ tali che per ogni $z \in \overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ risulti

$$|f(z)| \leq M.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $\tilde{f}$ analitica in $A$ tale che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$\tilde{f}(z) = f(z).$$

Sia $r > 0$, con

$$\overline{D_r(z_0)} \subseteq A,$$

arbitrario. Poniamo

$$M := \max_{z \in \overline{D_r(z_0)}} \tilde{f}(z).$$

Allora per il teorema 4.29 per ogni $z \in \overline{D_r(z_0)}$ si ha

$$\left|\tilde{f}(z)\right| \leq M.$$

Quindi per ogni $z \in \overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ si ha

$$|f(z)| \leq M.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $\rho \in (0, r)$ arbitrario. Definiamo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to A \setminus \{z_0\}$ nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) := z_0 + \rho e^{i\theta}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Quindi per ogni $n \in \mathbf{Z}$ si ha

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} |d\zeta| \le \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Per l'arbitrarietà di $\rho$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$a_n = 0.$$

Quindi $z_0$ è un punto di singolarità eliminabile. ■

**Proposizione 14.5** Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f \in H(A \setminus \{z_0\})$. Allora sono affermazioni equivalenti:

(i) $z_0$ è un polo di $f$;

(ii) risulta

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

*Dimostrazione.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Sia $k \in \mathbf{N}$ l'ordine del polo $z_0$. Sia $f_1 : A \to \mathbf{C}$ analitica, con

$$f_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in A \setminus \{z_0\}$ risulti

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

Allora si ha

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|^k} |f_1(z)| = |f_1(z_0)| \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|^k} = \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $M > 0$ arbitrario. Sia $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ risulti

$$|f(z)| \ge M.$$

Definiamo la funzione $g : D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ poniamo

$$g(z) := \frac{1}{f(z)}.$$

Allora si ha

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0.$$

Definiamo la funzione $\tilde{g} : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D_r(z_0)$ poniamo

$$\tilde{g}(z) := \begin{cases} g(z) & \text{se } z \neq z_0, \\ 0 & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Allora $\tilde{g} \in H(D_r(z_0))$ e $z_0$ è uno zero di $\tilde{g}$. Sia $k \in \mathbf{N}$ l'ordine di tale zero. Sia $\tilde{g}_1 : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ analitica in $D_r(z_0)$, con

$$\tilde{g}_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulti

$$\tilde{g}(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}_1(z).$$

Definiamo la funzione $f_1 : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D_r(z_0)$ poniamo

$$f_1(z) := \frac{1}{\tilde{g}_1(z)}.$$

Allora $f_1$ è analitica in $D_r(z_0)$ e risulta

$$f_1(z_0) \neq 0.$$

Inoltre per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ risulta

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\tilde{g}(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{\tilde{g}_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} f_1(z).$$

Quindi $z_0$ è un polo di $f$. ■

**Teorema 14.6** *(Weierstrass)* Sia $A \subseteq \mathbf{C}$ un aperto. Sia $z_0 \in A$. Sia $f \in H(A \setminus \{z_0\})$. Supponiamo che $z_0$ sia un punto di singolarità essenziale di $f$. Allora per ogni $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

l'insieme

$$f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$$

è denso in $\mathbf{C}$, ovvero per ogni $w \in \mathbf{C}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ tale che

$$|f(z) - w| < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.* Sia $r > 0$, con

$$D_r(z_0) \subseteq A,$$

arbitrario. Supponiamo per assurdo che esistano $w \in \mathbf{C}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ risulti

$$|f(z) - w| \ge \varepsilon.$$

Definiamo la funzione $g : D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ poniamo

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}.$$

Allora per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ risulta

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}.$$

Per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ si ha

$$|g(z)| \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

Allora, per la proposizione 14.4, $z_0$ è un punto di singolarità eliminabile per $g$. Quindi, per la proposizione 14.3, esiste $\tilde{g} : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ analitica in $D_r(z_0)$ tale che per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ risulti

$$\tilde{g}(z) = g(z).$$

Sia $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Allora definiamo la funzione $\tilde{f} : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ nel seguente modo. Per ogni $z \in D_r(z_0)$ poniamo

$$\tilde{f}(z) := w + \frac{1}{\tilde{g}(z)}.$$

Allora $\tilde{f}$ è analitica in $D_r(z_0)$ e per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ si ha

$$\tilde{f}(z) = f(z).$$

Quindi $z_0$ è un punto di singolarità eliminabile per $f$, da cui l'assurdo.
Sia $\tilde{g}(z_0) = 0$. Allora $z_0$ è uno zero di $\tilde{g}$. Sia $k \in \mathbf{N}$ l'ordine di tale zero. Sia $\tilde{g}_1 : D_r(z_0) \to \mathbf{C}$ analitica, con

$$\tilde{g}_1(z_0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in D_r(z_0)$ risulti

$$\tilde{g}(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}_1(z).$$

Allora per ogni $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^k \tilde{g}_1(z)} = \frac{w\tilde{g}_1(z) + 1}{(z - z_0)^k}.$$

Quindi $z_0$ o è un polo, o è un punto di singolarità eliminabile, da cui l'assurdo. ■

## 11.15 Applicazioni del metodo dei residui

**Proposizione 15.1** Sia $R : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione razionale. Calcoliamo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt.$$

Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ la curvadefinita nel seguente modo. Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ poniamo

$$\gamma(\theta) = e^{it}.$$

Allora

$$\int_0^{2\pi} R(\cot s, \sin t)\, dt = \int_\gamma \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) dz.$$

Inoltre siano $\{z_1, ..., z_n\}$ i poli della funzione

$$R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right).$$

Sia

$$J := \{k \in \{1, ..., n\} \mid z_k \in D_1(0)\}.$$

Allora

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt =$$

$$= 2\pi \sum_{k \in J} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right), z_k\right).$$

*Dimostrazione.* Sia $t \in [0, 2\pi]$ arbitrario. Poniamo

$$z := e^{it}.$$

Allora si ha

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Inoltre si ha

$$dz = ie^{it}\, dt = iz\, dt.$$

Quindi

$$dt = \frac{1}{iz} dz.$$

Allora si ha la tesi. ■

**Notazione 15.2** Siano $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$, con

$$\theta_1 < \theta_2.$$

Poniamo

$$S_{\theta_1, \theta_2} := \left\{re^{i\theta} \in \mathbf{C} \mid r > 0,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]\right\}.$$

**Lemma 15.3** Siano $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$, con

$$\theta_1 < \theta_2.$$

Sia

$$S_{\theta_1, \theta_2} := \left\{re^{i\theta} \mid r > 0,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]\right\}.$$

Sia $f \in C\left(S_{\theta_1, \theta_2}\right)$. Supponiamo che

$$\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$$

uniformemente in $S_{\theta_1, \theta_2}$. Per ogni $r > 0$ sia $\gamma_r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ poniamo

$$\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}.$$

Allora

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $R > 0$ tale che per ogni $z \in S_{\theta_1, \theta_2}$, con

$$|z| > R,$$

risulti

$$|z|\,|f(z)| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $r > R$ e per ogni $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ si ha

$$r\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| < \varepsilon.$$

Quindi per ogni $r > R$ si ha

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\, dz\right| \le \int_{\gamma_r} |f(z)|\,|dz| = r\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta < \varepsilon(\theta_2 - \theta_1).$$

Quindi

$$\lim_{r \to \infty} \left|\int_{\gamma_r} f(z)\, dz\right| \le \varepsilon(\theta_2 - \theta_1).$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha la tesi. ■

**Notazione 15.4** Poniamo

$$\mathbf{C}^+ := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \mathbf{C}_0^+ := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \ge 0\}$$

**Proposizione 15.5** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Siano $\{z_1, ..., z_n\} \subseteq \mathbf{C}^+$. Sia $\tilde{f} : \mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbf{C}$ analitica in $\mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ tale che

$$\left.\tilde{f}\right|_{\mathbf{R}} = f|_{\mathbf{R}}.$$

Supponiamo che $z_1, ..., z_n$ siano punti di singolarità isolata di $\tilde{f}$. Supponiamo che

$$\lim_{z \to \infty} z\tilde{f}(z) = 0.$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right).$$

*Dimostrazione.* Sia $R > 0$ tale che

$$\{z_1, ..., z_n\} \subseteq D_R(0) \cap \mathbf{C}^+.$$

Sia $r > R$ arbitrario. Sia $\gamma_r^{(1)} : [-r, r] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $t \in [-r, r]$ poniamo

$$\gamma_r^{(1)}(t) = t.$$

Sia $\gamma_r^{(2)} : [0, \pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0, \pi]$ poniamo

$$\gamma_r^{(2)}(\theta) = re^{i\theta}.$$

Allora

$$\partial\left(D_r(0) \cap \mathbf{C}^+\right) = \gamma_r^{(1)} \cup \gamma_r^{(2)}.$$

Quindi per il teorema dei residui

$$\int_{\gamma_r^{(1)}} \tilde{f}(z)\, dz + \int_{\gamma_r^{(2)}} \tilde{f}(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right).$$

Si ha

$$\int_{\gamma_r^{(1)}} \tilde{f}(z)\, dz = \int_{-r}^{r} f(x)\, dx.$$

Quindi

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r^{(2)}} \tilde{f}(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right).$$

Inoltre per il lemma precedente si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r^{(2)}} \tilde{f}(z)\,dz = 0.$$

Quindi

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right),$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right). \quad \blacksquare$$

**Lemma 15.6** *(Jordan)* Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Siano $\{z_1, ..., z_n\} \subseteq \mathbf{C}^+$. Sia $\tilde{f} : \mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbf{C}$ analitica in $\mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ tale che

$$\tilde{f}\Big|_{\mathbf{R}} = f|_{\mathbf{R}}.$$

Supponiamo che $z_1, ..., z_n$ siano punti di singolarità isolata di $\tilde{f}$. Supponiamo che

$$\lim_{z\to\infty} \tilde{f}(z) = 0.$$

Per ogni $r > 0$ sia $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0,\pi]$ poniamo

$$\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}.$$

Allora per ogni $p > 0$ si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)\,e^{ipz}\,dz = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sia $R > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbf{C}^+$, con

$$|z| > R,$$

risulti

$$\left|\tilde{f}(z)\right| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $r > R$ e per ogni $\theta \in [0,\pi]$ si ha

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| < \varepsilon.$$

Sia $r > R$ arbitrario. Allora

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)\,e^{ipz}\,dz\right| &\le \\ &\le \int_{\gamma_r} \left|\tilde{f}(z)\right| \left|e^{ipz}\right| |dz| = r\int_0^{\pi} \left|\tilde{f}\left(re^{i\theta}\right)\right| e^{-pr\sin\theta}\,d\theta \le \\ &\le r\varepsilon \int_0^{\pi} e^{-pr\sin\theta}\,d\theta = 2r\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-pr\sin\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

Poiché $\frac{\sin\theta}{\theta}$ è decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, per ogni $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \ge \frac{2}{\pi},$$

ovvero

$$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta.$$

Allora

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)\,e^{ipz}\,dz\right| &\le 2r\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2pr\theta}{\pi}}\,d\theta = \\ &= 2\varepsilon \int_0^{\infty} e^{-\frac{2p}{\pi}x}\,dx = \frac{\varepsilon\pi}{p}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)\,e^{ipz}\,dz \le \frac{\varepsilon\pi}{p}.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)\,e^{ipz}\,dz = 0. \quad \blacksquare$$

**Proposizione 15.7** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Siano $\{z_1, ..., z_n\} \subseteq \mathbf{C}^+$. Sia $\tilde{f} : \mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbf{C}$ analitica in $\mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ tale che

$$\tilde{f}\Big|_{\mathbf{R}} = f|_{\mathbf{R}}.$$

Supponiamo che $z_1, ..., z_n$ siano punti di singolarità isolata di $\tilde{f}$. Supponiamo che

$$\lim_{z\to\infty} \tilde{f}(z) = 0.$$

Allora per ogni $p \in \mathbf{R}$ si ha

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ipx}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}(z)\,e^{ipz}, z_k\right).$$

*Dimostrazione.* Segue dal lemma precedente in modo analogo a quanto visto nella dimostrazione della precedente dimostrazione. $\blacksquare$

**Proposizione 15.8** Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Siano $\{z_1, ..., z_n\} \subseteq \mathbf{C}_0^+$. Sia $\tilde{f} : \mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbf{C}$ analitica in $\mathbf{C}_0^+ \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ tale che

$$\tilde{f}\Big|_{\mathbf{R}} = f|_{\mathbf{R}}.$$

Supponiamo che $z_1, ..., z_n$ siano punti di singolarità isolata di $\tilde{f}$. Supponiamo che

$$\lim_{z\to\infty} z\tilde{f}(z) = 0.$$

Siano

$$J^+ := \{k \in \{1, ..., n\} \mid \operatorname{Im} z_k > 0\},$$

$$J_0 := \{k \in \{1, ..., n\} \mid \operatorname{Im} z_k = 0\}.$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k\in J^+}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right) + \pi i \sum_{k\in J_0}^{n} \operatorname{Res}\left(\tilde{f}, z_k\right).$$

*Dimostrazione.* Per semplicità supponiamo che $\tilde{f}$ abbia solo un polo semplice in $z = 0$.
Siano $r, \varepsilon > 0$, con

$$r > \varepsilon,$$

arbitrari. Sia $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0,\pi]$ poniamo

$$\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}.$$

Sia $\gamma_\varepsilon : [0,\pi] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $\theta \in [0,\pi]$ poniamo

$$\gamma_\varepsilon(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}.$$

Sia $\gamma_{r\varepsilon} : [-r, -\varepsilon] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $t \in [-r, -\varepsilon]$ poniamo

$$\gamma_{r\varepsilon}(t) = t.$$

Sia $\gamma_{\varepsilon r} : [\varepsilon, r] \to \mathbf{C}$ la curva definita nel seguente modo. Per ogni $t \in [\varepsilon, r]$ poniamo

$$\gamma_{r\varepsilon}(t) = t.$$

Allora

$$\partial\left(D_r(0) \cap E_\varepsilon(0) \cap \mathbf{C}^+\right) = \gamma_r \cup \gamma_{r\varepsilon} \cup \{-\gamma_\varepsilon\} \cup \gamma_{\varepsilon r}.$$

Quindi per il primo teorema di Cauchy

$$\int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)\,dz + \int_{\gamma_{r\varepsilon}} \tilde{f}(z)\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \tilde{f}(z)\,dz + \int_{\gamma_{\varepsilon r}} \tilde{f}(z)\,dz = 0.$$

Si ha

$$\int_{\gamma_{r\varepsilon}} \tilde{f}(z)\,dz + \int_{\gamma_{\varepsilon r}} \tilde{f}(z)\,dz = \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,dx.$$

Come visto nelle precedenti dimostrazioni si ha

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)\,dz = 0.$$

Mostriamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \tilde{f}(z)\,dz = -\pi i \operatorname{Res}\left(\tilde{f},0\right).$$

Sia $\overline{\varepsilon} > 0$ fissato. Sia $\tilde{f}_1 : D_{\overline{\varepsilon}}(0) \to \mathbf{C}$ analitica, con

$$\tilde{f}_1(0) \neq 0,$$

tale che per ogni $z \in D_{\overline{\varepsilon}}(0) \setminus \{0\}$ risulti

$$\tilde{f}(z) = \frac{\operatorname{Res}\left(\tilde{f},0\right)}{z} + \tilde{f}_1(z).$$

Allora per ogni $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon})$ si ha

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \tilde{f}(z)\,dz = \operatorname{Res}\left(\tilde{f},0\right)\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\varepsilon}\tilde{f}_1(z)\,dz.$$

Per ogni $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon})$ si ha

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z} = \int_0^{\pi}\frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}} = i\pi.$$

Quindi per ogni $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon})$ si ha

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \tilde{f}(z)\,dz = -i\pi \operatorname{Res}\left(\tilde{f},0\right) + \int_{\gamma_\varepsilon}\tilde{f}_1(z)\,dz.$$

Inoltre, poiché $\tilde{f}_1$ è analitica in $D_{\overline{\varepsilon}}(0)$, $\tilde{f}_1$ è limitata in $\overline{D_{\overline{\varepsilon}}(0)}$. Poniamo

$$M := \max_{z\in\overline{D_{\overline{\varepsilon}}(0)}}\left|\tilde{f}_1(z)\right|.$$

Allora per ogni $\varepsilon \in (0,\overline{\varepsilon})$ si ha

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\tilde{f}_1(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma_\varepsilon}\left|\tilde{f}_1(z)\right||dz| \leq \pi\varepsilon M.$$

Quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\tilde{f}_1(z)\,dz = 0.$$

Allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\tilde{f}(z)\,dz = i\pi \operatorname{Res}\left(\tilde{f},0\right).$$

Quindi

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,dx\right] = \pi i \operatorname{Res}\left(\tilde{f},0\right),$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \pi i \operatorname{Res}\left(\tilde{f},0\right). \quad \blacksquare$$