---

1. Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$, e sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-a_n)}{2^n}$$

converge assolutamente quasi ovunque in $\mathbf{R}$.

---

2. Provare che la funzione

$$F(t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\operatorname{sen}(x^2+t^2)}{x^2+t^2}\, dx \qquad (t \in \mathbf{R})$$

a) è continua in $\mathbf{R}$;
b) è derivabile in $\mathbf{R}$, calcolando $F'(0)$.

---

3. Sia $f_n(x) = 1 + \operatorname{sen}(nx)$ $(n \in \mathbf{N})$. Dare una maggiorazione di

$$\int_0^{\pi/2} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

usando il lemma di Fatou.

---

4. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{2\pi} x\left[1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right] dx\,.$$

---

5. Siano λ la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}$, ν la misura definita da

$$\nu(E) = \int_E |x|\, e^{-|x|}\, d\lambda\,, \qquad \forall E \in \mathcal{L}\,.$$

Provare che $L^1(\mathbf{R},\mathcal{L},\lambda) \subset L^1(\mathbf{R},\mathcal{L},\nu)$. Esistono funzioni che appartengono a $L^1(\mathbf{R},\mathcal{L},\nu)$ ma non a $L^1(\mathbf{R},\mathcal{L},\lambda)$?

---

6. Sia $f \in L^1(\mathbf{R},\mathcal{L},\lambda)$. Definiamo

$$F(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, e^{-t^2x^2}\, dx \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Provare che F è continua e limitata in $\mathbf{R}$.
