IST. DI ANALISI SUPERIORE (Tesei/Dall'Aglio) PROVA SCRITTA (18/6/2012)

---

1. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\left(1+(\operatorname{sen}x)^{2n}\right)}{(\operatorname{sen}x)^2}\,dx\,.$$

---

2. Date le due successioni di funzioni $f_n = f_n(x)$, $g_n = g_n(y)$, definire

$$F_n(x,y) := f_n(x)\,g_n(y) \qquad (x,y\in\mathbf{R};\ n\in\mathbf{N}).$$

Provare che:
a) f_n, g_n misurabili in $\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ F_n misurabile in $\mathbf{R}^2$;
b) $f_n\in L^1(\mathbf{R})$, $g_n\in L^1(\mathbf{R})$ $\Rightarrow$ $F_n\in L^1(\mathbf{R}^2)$;
c) $f_n\to f$ in $L^1(\mathbf{R})$, $g_n\to g$ in $L^1(\mathbf{R})$ $\Rightarrow$ $F_n\to F$ in $L^1(\mathbf{R}^2)$, dove $F(x,y)=f(x)\,g(y)$.;

---

3. Siano $f=\chi_{(0,1)}$, $g=\chi_{(0,2)}$, dove χ_I indica la funzione caratteristica dell'intervallo I.
a) Calcolare la convoluzione $f*g$;
b) verificare in questo caso specifico la disuguaglianza

$$\|f*g\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\le\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|g\|_{L^1(\mathbf{R})}\,.$$

---

4. Data la funzione

$$f(x)=\int_x^{x+1}\operatorname{arctg}t\,dt\,,$$

provare la stima $\|f\|_{L^1(\mathbf{R})}\le\pi$.

---

5. Data una funzione $f\in L^1(\mathbf{R})$, descrivere il comportamento della successione

$$f_n(x) := 2^{-n}f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Studiare la convergenza quasi ovunque in $\mathbf{R}$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x),$$

e la convergenza della serie in $L^1(\mathbf{R})$.