1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n^2 x)$$

converge per q.o. x in $\mathbb{R}$, e in $L^1(\mathbb{R})$.

Posto $f_n(x) = f(n^2 x)$, si ha $\|f_n\|_1 = \dfrac{\|f\|_1}{n^2}$, da cui $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$. Pertanto (teorema di integrazione per serie) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente per q.o. x, e si ha

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_1 \le \left\|\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right\|_1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty\,.$$

Per quanto riguarda la convergenza in L^1, si può applicare il teorema della convergenza dominata, in quanto

$$\left|\sum_{n=1}^{p} f_n(x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \in L^1(\mathbb{R})\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

---

2. a) Dire se la funzione

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\sqrt{x})}{nx + x^2}$$

è integrabile in $(0, \infty)$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$.
b) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx\,.$

---

a) Si ha

$$|f_n(x)| \le g(x) := \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\,,\, \frac{1}{x^2}\right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0,1) \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

e $g(x) \in L^1(0,\infty)$.

b) Poiché $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in (0,\infty)$, si può applicare il teorema della convergenza dominata in virtù della disuguaglianza precedente. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx = 0\,.$$

---

3. Sia

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x, y > 0\,,\; x^2 + y^2 < 1\,,\; x^2 + (y-1)^2 > 1\right\}.$$

Dire per quali coppie $(\alpha, p) \in (0,\infty) \times [1,\infty]$ si ha

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha}} \in L^p(E)\,.$$

Posto $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha}}$, chiaramente si ha $f \notin L^{\infty}(E)$ per ogni $\alpha > 0$. Sia ora $p < \infty$. Utilizzando coordinate polari, si ha

$$\|f\|_{L^p(E)}^p = \int_0^{\pi/6} d\theta \int_{2\operatorname{sen}\theta}^{1} d\rho\, \rho^{1-2\alpha p} = \frac{1}{2-2\alpha p} \int_0^{\pi/6} \big(1 - (2\operatorname{sen}\theta)^{2-2\alpha p}\big)\, d\theta\,,$$

e questo integrale converge se e solo se $2 - 2\alpha p > -1$, cioè $\alpha p < \dfrac{3}{2}$. Quindi, se $0 < \alpha < \dfrac{3}{2}$, si ha $f \in L^p(E)$ se e solo se $1 \le p < \dfrac{3}{2\alpha}$.

---

4. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili in $(0,1)$. Mostrare che

$$f_n \to f \quad \text{in misura} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 T\big(|f_n(x) - f(x)|\big)\, dx \to 0\,,$$

dove $T(s) = \min\{s, 1\}$.

Osserviamo che si ha

$$f_n \to f \text{ in misura} \quad \Leftrightarrow \quad T\big(|f_n - f|\big) \to 0$$

dal momento che, per $0 < \lambda < 1$, si ha

$$\Big\{x \;:\; |f_n(x) - f(x)| > \lambda\Big\} = \Big\{x \;:\; T\big(|f_n(x) - f(x)|\big) > \lambda\Big\}.$$

A questo punto si può procedere come segue.
Dim. $\boxed{\Rightarrow}$: Si può applicare il teorema della convergenza dominata, essendo $0 \le T\big(|f_n - f|\big) \le 1$.
Dim. $\boxed{\Leftarrow}$:

$$\int_0^1 T\big(|f_n - f|\big)\, dx \to 0 \;\Rightarrow\; T\big(|f_n - f|\big) \to 0 \text{ in misura} \;\Rightarrow\; f_n \to f \text{ in misura}\,.$$

---

5. Si mostri che l'insieme

$$K = \Big\{f \in L^2(0,2) \;:\; f(x) \ge 3 \text{ per q.o. } x \in (0,1)\Big\}$$

è un convesso chiuso di $L^2(0,2)$. Successivamente, per ogni $f \in L^2(0,2)$, dire come è fatta la proiezione di f su K.

La convessità di K è immediata dalla definizione.
Dimostriamo che K è chiuso: sia $\{f_n\}$ una successione di elementi di K convergente a f in $L^2(0,2)$. Allora, a meno di sottosuccessioni, si ha $f_n \to f$ q.o. in $(0,2)$, quindi

$$f_n(x) \ge 3 \quad \text{q.o. in } (0,1) \;\Rightarrow\; f(x) \ge 3 \quad \text{q.o. in } (0,1)\,,$$

cioè $f \in K$. E' facile verificare che, per ogni $f \in L^2(0,2)$, la funzione di K più vicina a f in norma L^2 è

$$v(x) = \begin{cases} \max\{3, f(x)\} & \text{se } x \in (0,1) \\ f(x) & \text{se } x \in (1,2)\,. \end{cases}$$

Un modo per verificare che $v = P_K(f)$ è controllare che vale la caratterizzazione della proiezione (cfr. Brezis, Analisi Funzionale):

$$(f - v, g - v) \leq 0 \quad \forall g \in K\,.$$

infatti

$$\begin{aligned}(f - v, g - v) &= \int_0^2 (f - v)(g - v)\,dx \\ &= \int_{(0,1)\cap\{f(x)<3\}} \underbrace{(f-3)}_{<0}\,\underbrace{(g-3)}_{\geq 0}\,dx \geq 0\,.\end{aligned}$$