---

1. Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n^2 x)$$

converge per q.o. x in $\mathbf{R}$, e in $L^1(\mathbf{R})$.

---

2. a) Dire se la funzione

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\sqrt{x})}{nx + x^2}$$

è integrabile in $(0,\infty)$, qualunque sia $n \in \mathbf{N}$.
b) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx$.

---

3. Sia

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x > 0\,,\ y > 0\,,\ x^2 + y^2 < 1\,,\ x^2 + (y-1)^2 > 1\Big\}\,.$$

Dire per quali coppie $(\alpha, p) \in (0,\infty) \times [1,\infty]$ si ha

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \in L^p(E)\,.$$

---

4. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili in $(0,1)$. Mostrare che

$$f_n \to f \quad \text{in misura} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_0^1 T\big(|f_n(x) - f(x)|\big)\, dx \to 0\,,$$

dove $T(s) = \min\{s, 1\}$.

---

5. Si mostri che l'insieme

$$K = \Big\{f \in L^2(0,2) \ : \ f(x) \geq 3 \text{ per q.o. } x \in (0,1)\Big\}$$

è un convesso chiuso di $L^2(0,2)$. Successivamente, per ogni $f \in L^2(0,2)$, dire come è fatta la proiezione di f su K.