1. Dire se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \qquad x \in [0,1]$$

a) converge q.o. in $[0,1]$;
b) converge in misura in $[0,1]$;
c) converge in $L^1([0,1])$.
Dire inoltre per quali $a > 0$ vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-nx}\,dx\right) = \int_0^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right) dx\,.$$

---

a) La serie converge a $s(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$ per ogni $x \in (0,1]$.
b) La serie converge a $s(x)$ anche in misura (in uno spazio di misura finita la convergenza q.o. implica quella in misura).
c) La serie non converge in $L^1([0,1])$, perché $s(x)$ non appartiene a $L^1([0,1])$.
Infine, l'uguaglianza tra gli integrali vale per ogni $a > 0$ (teorema di integrazione per serie di funzioni non negative), anche se, in virtù del punto c), diventa $\infty = \infty$.

---

2. Provare che la funzione

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha\sqrt{|x|}}{1+n^2x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1,+\infty]$, qualunque siano $\alpha > 0$ e $n = 1,2,\ldots$
Successivamente, trovare tutti i valori $\alpha > 0$ tali che la successione $\{f_n\}$ converga in $L^2(\mathbb{R})$.

Fissati n e α, la funzione è pari, continua, limitata, e per $x \to +\infty$ si ha $(f_n(x))^p \sim \dfrac{c}{x^{3p/2}}$, quindi appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ per ogni p.
Convergenza q.o.: per $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \dfrac{1}{|x|^{3/2}} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2\,. \end{cases}$$

L'unico caso in cui $f \in L^2(\mathbb{R})$ è il caso $0 < \alpha < 2$.
Infine

$$\|f_n\|_2^2 = 2n^{2\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+n^2x^2)^2}\,dx = n^{2\alpha-2}\,,$$

quindi si ha convergenza in $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se $0 < \alpha < 1$.

---

3. Sia $B \subset \mathbb{R}^2$ il cerchio di centro l'origine e di raggio uguale a 1, e sia

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha}\,.$$

Dire per quali coppie di valori $\alpha > 0$, $p \in [1,\infty]$, risulta $f \in L^p(B)$.

Se $0 < \alpha \le \dfrac{3}{2}$, si ha $f \in L^\infty(B) \subset L^p(B)$ per ogni p.
Se $\alpha > \dfrac{3}{2}$, allora

$$\int_B |f|^p = \int_0^{2\pi} |cos\theta|^p|\,\text{sen}\,\theta|^{2p}\,d\theta \int_0^1 \rho^{(3-2\alpha)p+1}\,d\rho\,,$$

e questo integrale è finito se e solo se $p < \dfrac{2}{2\alpha-3}$.

---

4. Sia X uno spazio di misura, e sia $\{f_n\}_n$ una successione convergente in $L^p(X)$, dove $p \in [1,\infty)$ è fissato. Dire se:
a) $\{\|f_n\|_p\}$ converge in $\mathbb{R}$;
b) le successioni $\left\{\frac{f_n+f_{n+5}}{2}\right\}$, $\left\{\frac{f_n-f_{n+5}}{2}\right\}$ convergono in $L^p(X)$;
c) la successione $\{\text{sen}(f_n)\}$ converge in $L^p(X)$.
Quali dei risultati precedenti sono veri se $p = \infty$?

---

a) Sì, infatti

$$\Big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\Big| \le \|f_n - f\|_p \to 0\,.$$

b) Sì, infatti $f_n \to f$, $f_{n+5} \to f$, quindi $\dfrac{f_n+f_{n+5}}{2} \to \dfrac{f+f}{2} = f$. Analogamente per l'altra successione. c) Sì. Infatti $|\,\text{sen}(f_n)| \le |f_n|$, quindi $\text{sen}(f_n) \in L^p(X)$. Inoltre $|\,\text{sen}(f_n) - \text{sen}(f)| \le |f_n - f|$, quindi $\text{sen}(f_n) - \text{sen}(f) \to 0$ in $L^p(X)$.
Tutti gli argomenti precedenti valgono anche per $p = \infty$.

---

5. Mostrare che la successione di funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\,\chi_{\left(\frac{1}{4^n},\frac{1}{4^{n-1}}\right)}(x)\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

costituisce un sistema ortonormale in $L^2(0,1)$. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = x$ rispetto a questo sistema ortonormale. Infine, dire se il sistema ortonormale è completo.

Le φ_n sono tra loro ortogonali in quanto hanno supporto disgiunto. Inoltre $\|\varphi_n\|_2^2 = \dfrac{2^{2n}}{3}\left(\dfrac{1}{4^{n-1}} - \dfrac{1}{4^n}\right) = 1$.

$$(x,\varphi_n) = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\int_{4^{-n}}^{4^{-n+1}} x\,dx = \frac{5\sqrt{3}}{2^{3n+1}}\,.$$

Il sistema non è completo. Questo si può vedere in due modi:
a) La serie di Fourier di x, cioè $\sum_n (x,\varphi_n)\,\varphi_n$, non vale x, ma è una funzione costante su ciascuno degli intervalli $\left(\dfrac{1}{4^n},\dfrac{1}{4^{n-1}}\right)$.
b) Si può esibire una funzione a funzione ortogonale a tutte le φ_n, ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left(0,\dfrac{1}{4}\right) \\ -1 & \text{se } x \in \left(\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right) \\ 1 & \text{se } x \in \left(\dfrac{5}{8},1\right). \end{cases}$$
