1. Dire se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \qquad x \in [0,1]$$

a) converge q.o. in $[0,1]$;
b) converge in misura in $[0,1]$;
c) converge in $L^1([0,1])$.
Dire inoltre per quali $a > 0$ vale l'uguaglianza $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-nx}\,dx\right) = \int_0^a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right)dx\,.$

---

2. Provare che la funzione

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha\sqrt{|x|}}{1+n^2x^2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

appartiene a $L^p(\mathbf{R})$ per ogni $p \in [1,+\infty]$, qualunque siano $\alpha > 0$ e $n = 1,2,\ldots$
Successivamente, trovare tutti i valori $\alpha > 0$ tali che la successione $\{f_n\}$ converga in $L^2(\mathbf{R})$.

---

3. Sia $B \subset \mathbf{R}^2$ il cerchio di centro l'origine e di raggio uguale a 1, e sia

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^\alpha}\,.$$

Dire per quali coppie di valori $\alpha > 0$, $p \in [1,\infty]$, risulta $f \in L^p(B)$.

---

4. Sia X uno spazio di misura, e sia $\{f_n\}_n$ una successione convergente in $L^p(X)$, dove $p \in [1,\infty)$ è fissato. Dire se:
a) $\{\|f_n\|_p\}$ converge in $\mathbf{R}$;
b) le successioni $\left\{\dfrac{f_n+f_{n+5}}{2}\right\}$, $\left\{\dfrac{f_n-f_{n+5}}{2}\right\}$ convergono in $L^p(X)$;
c) la successione $\{\mathrm{sen}(f_n)\}$ converge in $L^p(X)$.
Quali dei risultati precedenti sono veri se $p = \infty$?

---

5. Mostrare che la successione di funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\,\chi_{\left(\frac{1}{4^n},\frac{1}{4^{n-1}}\right)}(x)\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

costituisce un sistema ortonormale in $L^2(0,1)$. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = x$ rispetto a questo sistema ortonormale. Infine, dire se il sistema ortonormale è completo.