Quinta esercitazione

13/12/02

1) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Provare che il grafico
$$G_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in [a,b] \}$$
è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ avente misura di Lebesgue nulla.

---

2) Provare che la funzione
$$f: \mathbb{R} \to [0,\infty) \quad , \quad f(x) := \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$
è misurabile.

---

3) Stessa domanda per la funzione
$$f: \mathbb{R}^2 \to [0,\infty) \quad , \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4+3x^2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

---

4) Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f: (0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := x^{\alpha} (\operatorname{sen} x)^{\beta}$$
è integrabile.

---

5) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f^2: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ è misurabile. Mostrare con un esempio che f in generale non è misurabile.

6) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} |x|\,|f(x)|\,d\lambda < \infty$. Provare che la funzione

$$F : [0,1] \to [0,\infty), \qquad F(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} |x|^{\alpha}\,|f(x)|\,d\lambda$$

è continua.

---

7) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{\left(1+e^{-x^2}\right)^n}\,dx$ converge.

---

8) Data la successione di funzioni

$$f_n : [0,1] \to [0,\infty), \qquad f_n(x) := (\operatorname{sen} x)^{2n},$$

studiarne la convergenza: a) puntuale, b) in $L^1([0,1])$, c) uniforme.

---

9) Stessa domanda per la successione di funzioni

$$f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad f_n(x) := \frac{1}{1+(x+n)^2}.$$

---

10) Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ esiste finito il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}\,dx .$$

Soluzioni quinta esercitazione 13/12/02

1) La dimostrazione è la stessa dell'integrabilità secondo Riemann di $f \in C([a,b])$. Data una partizione Δ di $[a,b]$ e dette

$$\sigma(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \quad , \quad \Sigma(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

le corrispondenti somme integrali per difetto e per eccesso, resta determinato in corrispondenza un ricoprimento del grafico G_f con plurirettangoli di area

$$\Sigma(f,\Delta) - \sigma(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Poiché $f \in C([a,b])$, per il Teorema di Heine-Cantor f è uniformemente continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che, per ogni partizione Δ con norma $|\Delta| < \delta$ risulta

$$M_k - m_k < \varepsilon \qquad \forall\, k = 1, .., n$$

$$\Rightarrow 0 \le \Sigma(f,\Delta) - \sigma(f,\Delta) < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon (b-a).$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, ne segue che la misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ di G_f è nulla, quindi G_f è misurabile e ha misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ nulla.

2) Si verifica facilmente che

$$\alpha > 1 \Rightarrow \{f \geq \alpha\} = [\sqrt{\alpha}, \infty)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \{f \geq \alpha\} = (-\infty, 0] \cup [\sqrt{\alpha}, \infty)$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \{f \geq \alpha\} = \mathbb{R} .$$

Poiché tali insiemi sono misurabili, anche la funzione f lo è.

---

3) Poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'insieme $\{f \geq \alpha\}$ è aperto (quindi misurabile) $\forall \alpha > 0$. Per $\alpha \leq 0$ risulta $\{f \geq \alpha\} = \mathbb{R}^2$. Quindi la funzione è misurabile.

---

4) Dato che $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\exists\ \bar{\varepsilon} > 0$ tale che

$$\frac{x}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{3}{2} x \qquad \text{per } x \in (0, \bar{\varepsilon})$$

$\Rightarrow \exists\ c_1, c_2 > 0$ tali che $\quad c_1 x^\beta \leq (\operatorname{sen} x)^\beta \leq c_2 x^\beta \quad \forall x \in (0, \bar{\varepsilon})$.

Dunque $\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ risulta

$$(*) \quad c_1 \int_\varepsilon^1 x^{\alpha+\beta}\,dx \leq \int_\varepsilon^1 x^\alpha (\operatorname{sen} x)^\beta\,dx \leq c_2 \int_\varepsilon^1 x^{\alpha+\beta}\,dx .$$

Si ha inoltre

$$\int_\varepsilon^1 x^{\alpha+\beta}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1} & \text{se } \alpha+\beta \neq -1 \\ \log x & \text{se } \alpha+\beta = -1 \end{cases}$$

Ne segue che $\int_0^1 x^{\alpha+\beta}\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{\alpha+\beta}\,dx < \infty$ se e solo se $\alpha+\beta > -1$. Per la disuguaglianza $(*)$ lo stesso vale per l'integrale improprio $\int_0^1 x^\alpha (\operatorname{sen} x)^\beta\,dx$, dunque per l'integrabilità di f.

5) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non misurabile. Allora $f = \chi_E - \chi_{\complement E}$ non è misurabile, mentre $f^2 \equiv 1$ lo è.

---

6) L'integrando $f_\alpha(x) := |x|^\alpha |f(x)|$ è funzione continua di $\alpha \in [0,1]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato. Inoltre risulta, per ogni $\alpha \in [0,1]$:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |f(x)| \, d\lambda = \int_{\{|x|<1\}} |x|^\alpha |f(x)| \, d\lambda + \int_{\{|x|\geq 1\}} |x|^\alpha |f(x)| \, d\lambda \leq$$

$$\leq \int_{\{|x|<1\}} |f(x)| \, d\lambda + \int_{\{|x|\geq 1\}} |x| \, |f(x)| \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |x| \, |f(x)| \, d\lambda < \infty .$$

Allora l'affermazione segue dal Teorema 6.6.5-(i) di [Tesi].

---

7) Per il teorema di integrazione per serie risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{\left(1+e^{-x^2}\right)^n} \, dx = \int_1^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{\left(1+e^{-x^2}\right)^n} \, dx \right\} .$$

Per ogni $x \in [1, \infty)$ fissato si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{\left(1+e^{-x^2}\right)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}} \right)^n - 1 =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}} - 1 = e^{-x^2} .$$

Poiché $\int_1^{\infty} e^{-x^2} \, dx < \infty$, la serie data converge.

8) Per $x \in [0,1]$ si ha $0 \leq \operatorname{sen} x \leq \operatorname{sen} 1 < 1$. Ne segue subito che la successione data tende a zero nei tre sensi a) - c).

---

9) Risulta evidentemente

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ fissato},$$

quindi $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puntualmente in $\mathbb{R}$.

Per studiare la convergenza uniforme, osserviamo che

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) .$$

Per ogni n fissato, $\lim_{|x|\to\infty} f_n(x) = 0$; inoltre

$$f_n'(x) = \frac{-2(x+n)}{\left[1+(x+n)^2\right]^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_n = -n$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = f_n(-n) = 1 \qquad \forall n .$$

Quindi $f_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$.

Per la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$, si osservi che

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx := \lim_{p\to\infty} \int_0^p f_n(x)\,dx + \lim_{q\to-\infty} \int_q^0 f_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_n^{p+n} + \lim_{q\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{q+n}^{n} = \pi \qquad \forall n ;$$

quindi $f_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ in $L^1(\mathbb{R})$.

10) Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}-1}{\frac{x}{n}}\cdot x = x \qquad \forall\, x>0,$$

quindi

$$f_n(x) := \frac{\operatorname{sen} x}{n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right) x^{\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1+\alpha}} \qquad \forall\, x>0$$

Inoltre la disuguaglianza

$$e^{t}-1 = t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \geq t \qquad \forall\, t\geq 0$$

implica

$$n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right) = x\,\frac{e^{\frac{x}{n}}-1}{\frac{x}{n}} \geq x \qquad \forall\, x>0$$

$$\Rightarrow \quad |f_n(x)| \leq \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^{1+\alpha}} =: g(x) \qquad \forall\, x>0, \ \forall\, n.$$

Risulta poi

$$\int_0^{\infty} g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^{\infty} g(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^1 g(x)\,dx + \lim_{p\to\infty} \int_1^p g(x)\,dx.$$

Poiché $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, risulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^1 g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{dx}{x^{\alpha}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty \qquad \forall\, \alpha<1.$$

Inoltre, poiché $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ $\forall\, x$, si ha:

$$\lim_{p\to\infty} \int_1^p g(x)\,dx \leq \lim_{p\to\infty} \int_1^p \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \infty \qquad \forall\, \alpha>0.$$

Allora per il Teorema di convergenza dominata esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)\cdot x^{\alpha}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1+\alpha}}\,dx \qquad \forall\, \alpha\in(0,1).$$