Quarta esercitazione 6/12/02

1) Sia $\{\alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad f_n(x) := (\cos x)^2 e^{-\alpha_n x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Provare che

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \infty$ se $\alpha \le 0$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (\cos x)^2 e^{-\alpha x^2} dx$ se $\alpha > 0$.

---

2) Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x^n)}{n}$, $x \in [0,1]$.

a) Provare che la serie converge q.o. in $[0,1]$.

b) Provare l'uguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x^n)}{n}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x^n)}{n} \right) dx .$$

---

3) (i) Trovare una successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ misurabili, tali che $f_n \ge f_{n+1}$ in $\mathbb{R}$ e risulti

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda > \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\lambda \qquad \text{strettamente.}$$

(ii) È possibile trovare una tale successione, se inoltre $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$?

---

4) Un noto teorema afferma che, se $f_n \in C([a,b])$ e $f_n \to f$ uniformemente in $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx .$$

Dimostrare tale risultato applicando il Teorema di convergenza dominata ad una opportuna successione.

5) Data la funzione $f(x) = (1-x^2)\chi_{[-1,1]}$, si consideri la successione $f_n(x) := f(nx)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(i) Studiare la convergenza puntuale di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$.

(ii) Calcolare $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$.

(iii) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$.

(iv) Si può usare il Teorema di convergenza dominata per calcolare il limite precedente?

6) Calcolare $\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \log\left[1 + \frac{1}{n(1+x^2)}\right] dx$.

7) Trovare una successione $\{f_n\}$ di funzioni continue in $[0,1]$ tali che

(i) f_n abbia limite puntuale f in $[0,1]$, ma $f_n \not\to f$ uniformemente in $[0,1]$;

(ii) $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$.

8) Data la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(t) := \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt)\, dx$,

(i) provare che F è limitata e continua in $\mathbb{R}$;

(ii) provare che F è derivabile.

9) Calcolare $\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(nx)}{a^n} \right) dx \qquad (a > 1)$.

10) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x,y) \in (0,1) \times (0,1).$$

Provare che $F(x) := \int_0^1 f(x,y)\, dy$ è integrabile in $(0,1)$.

Soluzioni quarta esercitazione 6/12/02

1) Risulta evidentemente

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) := (\cos x)^2 e^{-\alpha x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Se $\alpha \le 0$, $e^{-\alpha x^2} = e^{|\alpha| x^2} \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq g(x) := (\cos x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Evidentemente $g \notin L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (\cos x)^2\,dx = \infty \quad ;$$

quindi neppure $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per il Lemma di Fatou ne segue:

$$\infty = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)\,dx \le \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \infty .$$

b) Sia $\alpha > 0$. Poiché $\alpha_n \to \alpha$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$

$$\alpha_n > \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \Rightarrow 0 \le f_n(x) \le (\cos x)^2 e^{-\frac{\alpha}{2} x^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Allora l'affermazione segue dal Teorema di convergenza dominata.

---

2) a) Dalla stima elementare $\dfrac{|\operatorname{sen}(x^n)|}{n} \le \dfrac{x^n}{n}$ $(x \in [0,1])$, segue per il teorema di confronto che la serie data converge assolutamente (quindi puntualmente) per ogni $x \in [0,1)$.

b) Per il teorema di integrazione per serie, basta provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 |\operatorname{sen}(x^n)|\,dx < \infty .$$

Dalla stima precedente (vedi a)) segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 |\operatorname{sen}(x^n)|\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty ,$$ da cui la conclusione.

3) (i) La successione $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ ha le proprietà volute, infatti: a) $\chi_{[n,\infty)} \geq \chi_{[n+1,\infty)}$ in $\mathbb{R}$; b) $\chi_{[n,\infty)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puntualmente; c) risulta

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,\infty)}(x)\, d\lambda = \infty \quad \forall n, \qquad \text{mentre } \int_{\mathbb{R}} (\lim f_n)\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\lambda = 0.$$

(ii) Se $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, allora $0 \leq f_n \leq f_1 \Rightarrow f_n \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall n$ (perché la successione è decrescente). Allora il Teorema di convergenza dominata implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\lambda .$$

---

4) La successione $g_n := |f_n - f|$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ ha le proprietà seguenti:

(i) $g_n \to 0$ puntualmente in $[a,b]$

(ii) $\sup_{x\in[a,b]} g_n(x) \to 0$ (perché $f_n \to f$ uniformemente)

$\Rightarrow \exists\, M > 0$ tale che $|g_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b],\ \forall n$.

Poiché $g(x) := M \in L^1([a,b])$, per il Teorema di convergenza dominata risulta

$$\int_a^b g_n(x)\, dx = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx .$$

---

5) (i) Risulta $f_n(x) = \begin{cases} 1 - n^2x^2 & \text{se } |x| \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = (1-n^2x^2)\,\chi_{\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}(x)$.

Per ogni $x \neq 0$ risulta $f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq \frac{1}{|x|}$, quindi

$f_n \to 0$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; invece $f_n(0) = 1 \quad \forall n \Rightarrow f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

(ii)-(iii) Risulta

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{1/n} (1-n^2x^2)\,dx = \left(x - n^2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(iv) Sì : $f_n \to 0$ q.o. in $\mathbb{R}$; inoltre

$$0 \le f_n \le \chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall n .$$

~~6) Calcolare~~ $\cancel{\lim_{n\to\infty} n\int_{\mathbb{R}} \log\left[1+\frac{1}{n(1+x^2)}\right]dx}$.

---

6) Risulta

$$n \log\left[1+\frac{1}{n(1+x^2)}\right] = \frac{\log\left[1+\frac{1}{n(1+x^2)}\right]}{\frac{1}{n(1+x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+x^2} ;$$

inoltre si verifica che

$$0 \le n\log\left[1+\frac{1}{n(1+x^2)}\right] \le \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} .$$

Poiché $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi < \infty$, per il Teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{\mathbb{R}} \log\left[1+\frac{1}{n(1+x^2)}\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

---

7) La successione $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ ha le proprietà richieste. Infatti:

(i) $f_n(x) \to 0$ in $[0,1)$, $f_n(1) = 1 \to 1$;

(ii) poiché la funzione limite è discontinua, la convergenza non è uniforme;

(iii) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$.

---

8) (i) Risulta

$$|F(t)| \le \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \infty \quad \text{per ogni } t\in\mathbb{R} \Rightarrow F \text{ è limitata in } \mathbb{R}.$$

Per provarne la continuità, osserviamo che

$$F(t) = \int_0^\infty f(x,t)\,dx, \quad \text{con } f(x,t) := e^{-x^2}\cos(xt) \quad \overset{(x\ge 0,\, t\in\mathbb{R})}{(\cancel{(x,t)\in\mathbb{R}^2})}.$$

Poiché $f(x,\cdot)$ è continua per ~~$x\in\mathbb{R}$~~ $x\ge 0$ fissato e

$$|f(x,t)| \le e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \forall\, t\in\mathbb{R},$$

il risultato segue dal Teorema 6.6.5 pag. 182 del libro [Tesi].

(ii) Risulta anche che $f(x,\cdot)$ è derivabile e

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = |x e^{-x^2} \operatorname{sen}(x,t)| \le x e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

la tesi segue dallo stesso Teorema 6.6.5.

---

9) Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{n|\operatorname{sen}(nx)|}{a^n}\,dx \le \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{n\,dx}{a^n} = \pi \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{a^n} < \infty .$$

Allora per il Teorema di integrazione per serie risulta:

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n \operatorname{sen}(nx)}{a^n}\right)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{a^n}\int_0^\pi \operatorname{sen}(nx)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1-\cos(n\pi)}{a^n} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{2}{a^{2k+1}} = \frac{2}{a}\,\frac{1}{1-\frac{1}{a^2}} = \frac{2a}{a^2-1} .$$

10) La funzione f è continua, quindi misurabile in $Q:=(0,1)\times(0,1)$; inoltre $f\geq 0$. Allora per il Teorema di Tonelli

$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy \quad \left(= \int_0^1 dy \int_0^1 dx\, f(x,y) \right).$$

Usando coordinate polari si verifica facilmente che il primo integrale è finito, infatti

$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos\vartheta}} \frac{\cancel{\rho}\,d\rho}{\cancel{\rho}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}} \frac{\cancel{\rho}\,d\rho}{\cancel{\rho}} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ne segue la tesi.