Terza esercitazione 29/11/02

1) Provare le uguaglianze

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n},\ b + \frac{1}{n}\right) \quad , \quad (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n},\ b - \frac{1}{n}\right]$$

---

2) Sia X un insieme, $f : X \to [0,\infty)$. Dire se la funzione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ così definita:

$$\mu^*(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \phi \\ \sup_{x \in E} f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una misura esterna.

---

3) Sia X un insieme, $x_0 \in X$, $\mathcal{A} = \{\phi, X, \{x_0\}, \complement\{x_0\}\}$.

Definiamo

$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ ponendo

$\mu(\phi) = 0$, $\mu(\{x_0\}) = \mu(X) = 1$, $\mu(\complement\{x_0\}) = 0$.

Dire se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di misura completo. Rispondere alla stessa domanda se si definisce

$\mu(\phi) = 0$, $\mu(\{x_0\}) = 1$, $\mu(\complement\{x_0\}) = 2$, $\mu(X) = 3$.

---

4) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finito, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Sia

$$E_n := \{x \in X \mid 2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}\}.$$

Provare che $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(E_n) < \infty.$$

5) Dire se la funzione

$$f : (0, \tfrac{1}{2}] \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = -\frac{1}{x \log x}$$

è integrabile.

6) Data la successione $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n = n\,\chi_{[0,\frac{1}{n})}$

(i) studiarne la convergenza q.o. in $[0,1]$;

(ii) dire se $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x)\,dx$.

7) Calcolare $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) x^{\alpha}\,dx \qquad (\alpha > 0)$.

8) Calcolare la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-x^2}\,dx$.

9) Sia $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \geq 0$ q.o. Si consideri la successione

$$f_n := \frac{n f}{n + f}.$$

Provare che $\{f_n\} \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e risulta: $\int_X |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

10) Calcolare $\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x/n)}{x} e^{-x}\,dx$.

<u>Soluzioni terza esercitazione</u> 29/11/02

1) Proviamo solo l'uguaglianza

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) ;$$

la verifica dell'altra è analoga. Si ha evidentemente

$[a,b] \subseteq \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \quad \Rightarrow [a,b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$.

Reciprocamente,

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n} \quad \forall n$

$\Rightarrow a \leq x \leq b$ (passando al limite per $n \to \infty$)

$\Rightarrow x \in [a,b]$. Dunque $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \subseteq [a,b]$; ne segue l'uguaglianza.

---

2) La monotonia di μ^* è evidente: $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \sup_{x \in E_1} f(x) \leq \sup_{x \in E_2} f(x)$.

Per la verifica della σ-subadditività,

posto $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, osserviamo che $f\chi_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}$, da cui

$\sup_{x \in E} f(x) = \sup_{x \in X} (f\chi_E)(x) \leq$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in X} (f\chi_{E_n})(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in E_n} f(x)$.

---

3) Ogni sottoinsieme non vuoto di $\complement\{x_0\}$ non appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$; poiché $\mu(\complement\{x_0\}) = 0$, il primo spazio di misura non è completo. Invece il secondo lo è, perché l'unico insieme di misura nulla è l'insieme vuoto.

4) Sull'insieme E_n risulta

$$|f| < 2^{n+1} \leq 2|f|$$

$$\Rightarrow \int_{E_n} |f|\, d\mu < 2^{n+1} \mu(E_n) \leq 2 \int_{E_n} |f|\, d\mu .$$

Poiché X è unione disgiunta degli insiemi E_n e dell'insieme $\{|f|<2\}$, la conclusione segue dalle ~~eq~~ disuguaglianze precedenti osservando che

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_{\{|f|<2\}} |f|\, d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu \leq 2\mu(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu .$$

---

5) Notiamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in I = \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n : I \to [0, \infty), \qquad f_n := f\, \chi_{\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]} \qquad (n \geq 2).$$

Allora

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n, \qquad f_n \to f \text{ puntualmente in } I;$$

quindi per il Teorema di convergenza monotona

$$\int_I f_n\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f\, d\lambda .$$

Dato che ogni $f_n \in C\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]\right)$, quindi integrabile secondo Riemann, risulta:

$$\int_I f_n\, d\lambda = -\int_{\frac{1}{n}}^{1/2} \frac{dx}{x \log x} = -\int_{\frac{1}{n}}^{1/2} \frac{d(\log x)}{\log x} = -\int_{-\log n}^{-\log 2} \frac{dy}{y} =$$

$$= \log(\log n) - \log(\log 2) \xrightarrow[\text{per } n\to\infty]{} \infty .$$

Quindi $\int_I f\, d\lambda = \infty$, dunque $f \notin L^1(I)$.

6) Per ogni $x \in (0,1]$ risulta $f_n(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < x \iff n > \frac{1}{x}$, quindi

$$f_n \to 0 \quad \text{puntualmente in } (0,1].$$

Risulta invece

$$f_n(0) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad ;$$

comunque

$$f_n \to 0 \quad \text{q.o. in } [0,1] \quad (\text{con la misura di Lebesgue})$$

Per quanto riguarda la convergenza degli integrali, si ha:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^{1/n} dx = n\,\frac{1}{n} = 1 \qquad \forall n \;;$$

quindi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)(x)\,dx$.

---

7) Poiché $n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \cdot x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ e

$n \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)\right| \le x$ per ogni $x \in [0,1]$, risulta

$$f_n(x) := n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) x^{\alpha} \longrightarrow x^{1+\alpha} \quad \text{puntualmente in } [0,1]$$

$$|f_n(x)| \le x^{1+\alpha} \in L^1([0,1]) \quad \text{per } \alpha > -2 .$$

Quindi per il Teorema di convergenza dominata:

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) x^{\alpha}\,dx = \int_0^1 x^{1+\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+2} .$$

---

8) Per il Teorema di integrazione per serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}\right) e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} e^{x^2}\cdot e^{-x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} dx = \infty .$$

9) Poiché $f \geq 0 \Rightarrow n+f \geq n$ in X, risulta $0 \leq f_n \leq f$

$\Rightarrow f_n \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ per ogni n.

Si ha poi

$$|f_n - f| = \left| \frac{nf}{n+f} - f \right| = \frac{f^2}{n+f} \leq f \in L^1,$$

$|f_n - f| \to 0$ in X,

da cui $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$ per il Teorema di convergenza dominata.

10) Osserviamo che

$$n^2 \, \frac{1-\cos(x/n)}{x} = x \, \frac{1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x^2}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x}{2} \quad \text{in } [0,\infty).$$

Inoltre esiste $M > 0$ tale che

$$0 \leq \frac{1-\cos(x/n)}{\frac{x^2}{n^2}} \leq M \quad \text{per ogni } x \in [0,\infty),\ n \in \mathbb{N}.$$

Dunque $f_n(x) := n^2 \, \frac{1-\cos(x/n)}{x} e^{-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x}{2} e^{-x}$ in $[0,\infty)$

e risulta

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq M \frac{x}{2} e^{-x} \in L^1(0,\infty).$$

Per il Teorema di convergenza dominata si ha allora:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^\infty \frac{1-\cos(x/n)}{x} e^{-x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty x e^{-x} \, dx = \frac{1}{2}.$$