Seconda esercitazione 22/11/02

1) Data la successione

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) := 1 - e^{-\frac{x^2}{n}} \quad ,$$

(i) studiarne la convergenza puntuale;

(ii) calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, d\lambda \, .$$

Rispondere alle analoghe domande per la successione

$$f_n : (0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) := \frac{1 - e^{-\frac{x^2}{n}}}{\sqrt{x}} \, .$$

---

2) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ misurabile, tale che

$$\int_{[0,1]} |f(x)|\, d\lambda < \infty \, .$$

(i) Provare che $\int_{[0,1]} x^n |f(x)|\, d\lambda < \infty$ per ogni n.

(ii) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n |f(x)|\, d\lambda$.

---

3) Sia $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{[x]}$ ($[x] \equiv$ parte intera di x).

Consideriamo la successione

$$f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) := f(x)\, \chi_{[1,n)}(x) \qquad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}).$$

(i) Provare che f_n è integrabile in $[1,\infty)$; calcolarne l'integrale.

(ii) Provare che f non è integrabile in $[1,\infty)$.

4) Sia dato lo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu^{\#})$.

(i) Si calcoli $\int_{\mathbb{N}} g \, d\mu^{\#}$, dove $g(n) := \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) Sia $f_\alpha(n) := \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di α risulta $f_\alpha \in L^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu^{\#})$.

---

5) Sia data la successione $f_n(x) := \left[e^{\operatorname{sen}(nx)}\right]^{\frac{1}{n}}$. Calcolare

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, d\lambda$$

usando il Lemma di Fatou.

---

6) Sia data la successione

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \begin{cases} n & \text{se } |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Dire se $\{f_n\}$ converge q.o. in $\mathbb{R}$

(ii) Calcolare $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, d\lambda$.

---

7) Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finita, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Sia

$$E_n := \{ x \in X \mid n-1 < |f(x)| \leq n \} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Provare che $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, \mu(E_n) < \infty .$$

Il risultato precedente è vero se $\mu(X) = \infty$?

8) Sia data la successione

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) := n^{3/2} x\, e^{-n^2 x^2}$$

(i) Studiarne la convergenza puntuale in $[0,1]$

(ii) Dire se la convergenza è uniforme.

(iii) Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, d\lambda$

9) Data la successione

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) := x \operatorname{arctg}(nx)$$

(i) studiarne la convergenza puntuale in $[-1,1]$;

(ii) studiarne la convergenza uniforme;

(iii) calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} f_n(x)\, d\lambda$.

10) Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \operatorname{arctg} x \cdot \left(1-\frac{x}{n}\right)^n d\lambda = \int_{[0,\infty)} \operatorname{arctg} x \cdot e^{-x}\, d\lambda$$

22/11/02

Soluzioni seconda esercitazione

1) Si verifica facilmente che $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ in $[0,1]$ e risulta $0 \le f_n \le 1$ in $[0,1]$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 0$$

per il Teorema di convergenza dominata. Lo stesso vale per la seconda successione, poiché

$$0 \le f_n \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{in } (0,1) \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty .$$

2) Risulta

$$x^n |f(x)| \le |f(x)| \qquad \text{per ogni } x \in [0,1] \text{ ed ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi

$$\int_{[0,1]} x^n |f(x)| \, d\lambda \le \int_{[0,1]} |f(x)| \, d\lambda \qquad \text{per ogni } n .$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} x^n |f(x)| = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1) ,$$

quindi $\displaystyle\int_{[0,1]} x^n |f(x)| \, d\lambda \to 0$

per il Teorema di convergenza dominata.

3) Si verifica subito che $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1)}$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1)}$.

Allora

$$\int_1^\infty f_n \, dx = \int_{[1,\infty)} f_n \, d\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \infty ,$$

$$\int_1^\infty f \, dx = \int_{[1,\infty)} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} f_n \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty ,$$

avendo usato il Teorema di convergenza monotona.

4) (i) $\int_{\mathbb{N}} g \, d\mu^\# = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$.

(ii) $\int_{\mathbb{N}} f_\alpha \, d\mu^\# = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1$.

5) Risulta $\frac{1}{e} \leq e^{\operatorname{sen}(nx)} \leq e \Rightarrow e^{-\frac{1}{n}} \leq \left[e^{\operatorname{sen}(nx)}\right]^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}}$

per ogni n; quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left[e^{\operatorname{sen}(nx)}\right]^{\frac{1}{n}} = 1$$

Per il Lemma di Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}\, f_n) \, d\lambda = \infty \leq \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \infty.$$

6) Risulta

$$f_n(0) = n \to \infty, \quad f_n(x) \to 0 \quad \forall x \neq 0;$$

quindi $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ q.o. in $\mathbb{R}$ (con la misura di Lebesgue).

Poiché $f_n = n \chi_{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}$, si ha $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = n \lambda\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = 2 \quad \forall n$.

7) Per ogni $x \in E_n$ risulta (per definizione di E_n)

$$|f(x)| \leq n < |f(x)| + 1$$

$$\Rightarrow \int_{E_n} |f| \, d\mu \leq n \mu(E_n) < \int_{E_n} |f| \, d\mu + \mu(E_n)$$

Poiché $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, E_n disgiunti, per proprietà note dell'integrale ne segue

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \mu(E_n) < \int_X |f| \, d\mu + \mu(X),$$

da cui quanto asserito. Il risultato è falso se $\mu(X)=\infty$: si consideri ad esempio

$X=[1,\infty)$ con la misura di Lebesgue $\lambda([1,\infty))=\infty$.

La funzione

$$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}\quad,\quad f(x)=\frac{1}{x^2}\geq 0$$

ha integrale improprio di Riemann finito:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}:=\lim_{p\to\infty}\int_1^p\frac{dx}{x^2}=\lim_{p\to\infty}\left(1-\frac{1}{p}\right)=1\quad,$$

quindi $f\in L^1(X,\mathcal{B}(X),\lambda)$. Tuttavia

$$E_1=[1,\infty)\quad\Rightarrow\quad\lambda(E_1)=\infty$$

$$E_n=\emptyset\quad\forall n\geq 2\quad\Rightarrow\quad\lambda(E_n)=0\quad.$$

8) (i) $f_n(0)=0$, $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ per ogni $x\in(0,1]$

$\Rightarrow f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ puntualmente in $[0,1]$

(ii) Studiamo la convergenza della successione

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max_{x\in[0,1]}f_n(x)$$

Per trovare il massimo di f_n in $[0,1]$:

$$f_n'(x)=n^{3/2}(1-2n^2x^2)e^{-n^2x^2}\overset{!}{=}0\quad\Rightarrow\quad x=x_n=\frac{1}{\sqrt{2}n}$$

$$\Rightarrow\max_{x\in[0,1]}f_n(x)=f_n(x_n)=n^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2}n}e^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{n}{2e}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

$\therefore$ la successione non converge a zero uniformemente.

(iii) $$\int_{[0,1]}f_n\,d\lambda=\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(1-e^{-n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

9) (i) Risulta $\quad f_n(0)=0 \quad \forall n, \quad f_n(x) \to \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & \text{se } x>0 \\ -\frac{\pi}{2}x & \text{se } x<0 \end{cases}$

(ii) Studiamo la convergenza della successione

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)-f(x)| \quad , \quad \text{dove} \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & x\in[0,1] \\ -\frac{\pi}{2}x & x\in[-1,0) . \end{cases}$$

Osserviamo che

$$|f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(nx)\right) & \text{se } x\in[0,1] \\ x\left(\operatorname{arctg}(nx)-\frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x\in[-1,0) . \end{cases}$$

Troviamo dapprima $\max\limits_{x\in[0,1]} \left\{ x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(nx)\right)\right\}$. Annullando la derivata di questa funzione si trova

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(nx)-\frac{nx}{1+n^2x^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} nx\right) = \frac{n x_n^2}{1+n^2x_n^2} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Analogamente si trova che

$$\sup_{x\in[-1,0]} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad ;$$

quindi la convergenza $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ è uniforme in $[-1,1]$

(iii) Poiché la funzione $y=\operatorname{arctg} x$ è crescente, si verifica facilmente che $f_n \leq f_{n+1}$ in $[-1,1]$. Allora per il Teorema di convergenza monotona

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[-1,1]} f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{[-1,1]} f \, d\lambda = \int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}|x|\,dx = \frac{\pi}{2} .$$

---

10) $\displaystyle\int_{[0,n]} \operatorname{arctg} x \left(1-\frac{x}{n}\right)^n d\lambda = \int_{[0,\infty)} f_n \, d\lambda \quad , \quad \text{con } f_n := \operatorname{arctg} x \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]} .$

Poiché $f_n \leq f_{n+1}$ in $[0,\infty)$ e $f_n(x) \to \operatorname{arctg} x \cdot e^{-x}$, ne segue quanto asserito.

$$f(t) := \left(1 - \frac{x}{t}\right)^t \qquad x \in [0, t]$$

$$0 < x < t$$

$$\frac{x}{t} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{x}{t} > 0$$

$$f = e^{t \log\left(1 - \frac{x}{t}\right)}$$

$$f' = f \left[\log\left(1 - \frac{x}{t}\right) + t \, \frac{1}{1 - \frac{x}{t}} \, \frac{x}{t^2} \right]$$

$$= \underbrace{f}_{>0} \left[\underbrace{\log\left(1 - \frac{x}{t}\right) + \frac{\frac{x}{t}}{1 - \frac{x}{t}}}_{>0} \right]$$

f funzione crescente di t

$f(n) \leq f(n+1)$

$$g(\xi) := \log(1 - \xi) + \frac{\xi}{1 - \xi} \qquad \xi := \frac{x}{t} \in [0, 1]$$

$$g' = -\frac{1}{1 - \xi} + \frac{1 - \cancel{\xi} + \cancel{\xi}}{(1 - \xi)^2} = \frac{-1 + \xi + 1}{(1 - \xi)^2} = \frac{\xi}{(1 - \xi)^2} \geq 0$$

$$g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\xi) \geq 0 \quad \text{in } [0, 1)$$